Átvételi vizsga a 9c (spec. mat.) osztályba
A vizsga írásbeli részének megoldásai

1. feladat (5 pont) Juliska az A városból elindult biciklivel az attól 31 kilométerre lévő B városba. Miután eltelt fél óra, látta, hogy el fog késni, ezért 4 km/h-val növelte a sebességét. Így végül másfél óra alatt tette meg az utat. Mekkora sebességgel indult el az A városból?

Megoldás. Jelölje x, hogy Juliska mekkora sebességgel indult el a városból (km/h mértékegységben mérve). Ekkor tehát fél óráig x, majd az útból hátralevő egy órában $x+4$ km/h sebességgel halad, így az út teljes hosszára felírható a következő egyenlet:

$$x \cdot \frac{1}{2} + (x+4) \cdot 1 = 31$$

átrendezve

$$\frac{3}{2}x + 4 = 31$$

azaz

$$x = 18$$

Tehát **Juliska 18 km/h sebességgel indult el az A városból**. □

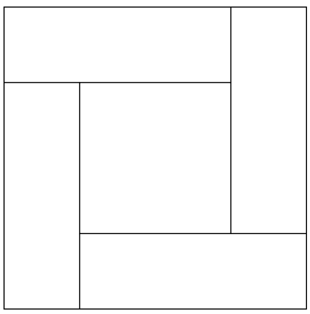
2. feladat (5 pont) Egy nyári táborban a gyerekek 60%-a focizik, 30%-a úszik. A focisták 40%-a úszik is. A nem úszó gyerekek hány százaléka focizik? A választ a legközelebbi egész százalékra kerekítsd.

Megoldás. Az focizó gyerekek 40%-a úszik, tehát 60%-uk nem úszik. Azaz az összes gyerek $\frac{6}{10}$ részének $\frac{6}{10}$ részére teljesül, hogy focizik, de nem úszik. Ez az összes gyerek $\frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100}$ része, avagy 36%-a.

A nem úszó gyerekek az összes gyerek 70%-át alkotják, ezen gyerekeknek így a $\frac{36}{70}$ része, azaz $100 \cdot \frac{36}{70} = \frac{360}{7} = 51{,}42\ldots \approx$ **51 %-a focizik.** □

3. feladat (5 pont) Egy négyzet és négy egybevágó téglalap hézagmentes és átfedés nélküli összeillesztésével összeállítottunk egy nagyobb négyzetet. A kapott négyzet területe négyszerese az összeállításban szereplő kis négyzet területének. Határozd meg a téglalapok oldalainak arányát.

Megoldás. Egy négyzet és négy egybevágó téglalap az alábbi ábrán látható elrendezésbe alkothat egy nagyobb négyzetet.



A nagy négyzet területe 4-szerese, tehát az oldalhosszúsága 2-szerese a kis négyzetének.

Válasszuk a kis négyzet oldalát egységnek, és jelölje a téglalap rövidebbik oldalát x, a hosszabbik oldalát y (ezen egység szerint mérve). Ekkor az ábrán látható, hogy a nagy négyzet oldala a szélén:

$$2 = x + y$$

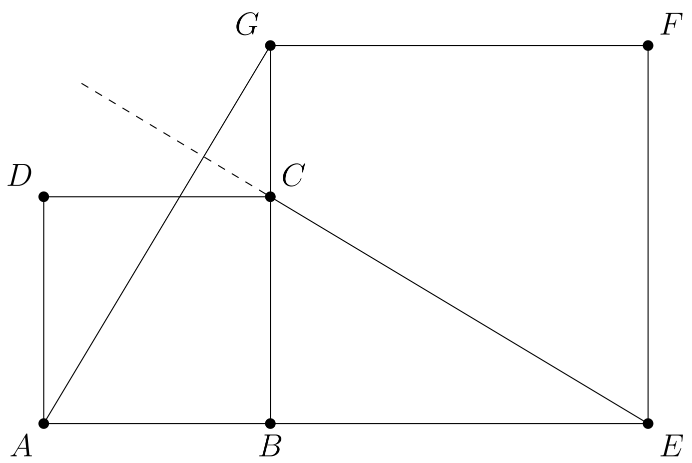
míg a nagy négyzet közepén, az oldalakkal párhuzamos vonal mentén:

$$2 = 1 + 2x$$

A második egyenletből $x = \frac{1}{2}$, ekkor az első egyenletbe ezt x helyére helyettesítve megkapjuk, hogy $y = \frac{3}{2}$. Tehát **a téglalap oldalainak aránya 1 : 3**. □

4. feladat Az A, B és E pontok egy egyenesen helyezkednek el, ebben a sorrendben. Rajzoljuk meg az $ABCD$ és $BEFG$ négyzeteket az egyenes azonos oldalára.
a) (3 pont) Bizonyítsd be, hogy az AG és a CE szakasz egyforma hosszú.
b) (4 pont) Határozd meg az AG és CE egyenesek által bezárt szöget.

Megoldás. Készítsünk ábrát!



a) ABG és CBE háromszögek egybevágók. Ez azért igaz, mert $AB = CB$ (az $ABCD$ négyzet oldalai), $BG = BE$ (a $BEFG$ négyzet oldalai), és az AB és a BG derékszöget zár be egymással, csakúgy mint a CB és a BE. Tehát a két háromszög egybevágóságának „két-két oldal és a bezárt szögük egyenlő" alapesete áll fenn.

Az ABG és CBE egybevágó háromszögekben AG és CE éppen egymásnak megfelelő oldalak (átfogók a derékszögű háromszögekben), így egyenlő hosszúak.

b) Vegyük észre, hogy a CBE háromszöget a B körüli 90°-os forgatás viszi az ABG háromszögbe. Mivel ez a forgatás a CE szakaszt a az AG szakaszba viszi, ezért **a két egyenes derékszöget zár be**.
(A keresett szög a forgatás észrevétele nélkül, a **a)** részben megtalált egybevágó háromszögek egyforma nagyságú szögein alapuló szögszámolással is meghatározható.) □

5. feladat (7 pont) Milyen számjegy állhat az x helyén, ha $444...444x222...222$ osztható 42-vel, ahol az x előtt 42 db 4-es, az x után 42 db 2-es számjegy áll?

Megoldás. Egy szám akkor és csak akkor osztható 42-vel, ha 2-vel, 3-mal és 7-tel is osztható.

A $\underbrace{444...444}_{42\text{ db}}x\underbrace{222...222}_{42\text{ db}}$ szám biztosan osztható lesz 2-vel, hiszen az utolsó számjegye páros.

Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. A vizsgált szám jegyeinek összege:

$$42 \cdot 4 + x + 42 \cdot 2 = 42 \cdot (4 + 2) + x = 42 \cdot 6 + x$$

Mivel $42 \cdot 6$ nyilván osztható 3-mal, így ez a szám akkor lesz osztható 3-mal, ha x osztható 3-mal. Ez alapján x lehet $0, 3, 6$ vagy 9.

A 7-tel való oszthatóság vizsgálatához a következő megállapítást tesszük: a

$$\underbrace{444...444}_{42\text{ db}}0\underbrace{222...222}_{42\text{ db}}$$

szám osztható 7-tel. Ezt például így lehet megindokolni:

1. 222222 osztható 7-tel, mivel $222222 = 222 \cdot 1001 = 222 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
2. Nyilván ennek kétszerese, a 444444 is osztható 7-tel.
3. Ha 7-tel osztható számokat írunk egymás mögé, akkor 7-tel osztható számot kapunk.
4. A fenti számunk úgy épül fel: 7 db egymás mögé írva a 444444 számból, mögé írva egy 0, majd mögé írva 7 db 222222 szám. Tehát csupa 7-tel osztható szám egymás mögé írásával felépítettük.

Ha a $\underbrace{444...444}_{42\text{ db}}x\underbrace{222...222}_{42\text{ db}}$ szám osztható 7-tel, akkor ha ebből egy 7-tel osztható számot kivonunk, akkor is 7-tel oszthatót kapunk. Így

$$\underbrace{444...444}_{42\text{ db}}x\underbrace{222...222}_{42\text{ db}} - \underbrace{444...444}_{42\text{ db}}0\underbrace{222...222}_{42\text{ db}} = x\underbrace{000...000}_{42\text{ db}} = x \cdot 10^{42}$$

is osztható 7-tel. Az $x \cdot 10^{42}$ pedig pontosan akkor osztható 7-tel, ha x osztható 7-tel. Tehát a $\underbrace{444...444}_{42\text{ db}}x\underbrace{222...222}_{42\text{ db}}$ szám pontosan akkor osztható 7-tel, ha az x számjegy 0 vagy 7.

Összevetve a 3-mal és 7-tel való oszthatóságra kapott eredményünket, azt kapjuk, hogy **az** x **helyén csak a 0 állhat**.

□

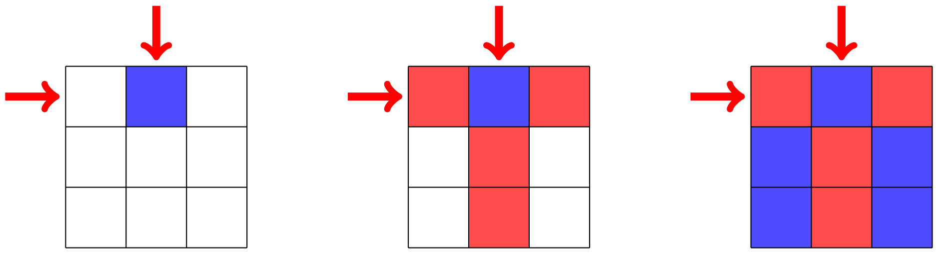
6. feladat (7 pont) Egy 3×3-as táblázat 9 mezőjének mindegyikét pirosra vagy kékre színezem úgy, hogy mindegyik sorban és mindegyik oszlopban szerepeljen mindkét szín. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
(A táblázat rögzítve van az asztalon, tehát nem lehet elforgatni. Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik mező színe eltér a két színezésben.)

Megoldás. Mivel minden sorban van piros és kék mező is, ezért mindegyik színből kell legyen legalább három mező. Így a 9 mező között az alábbi színelosztások valósulhatnak meg:

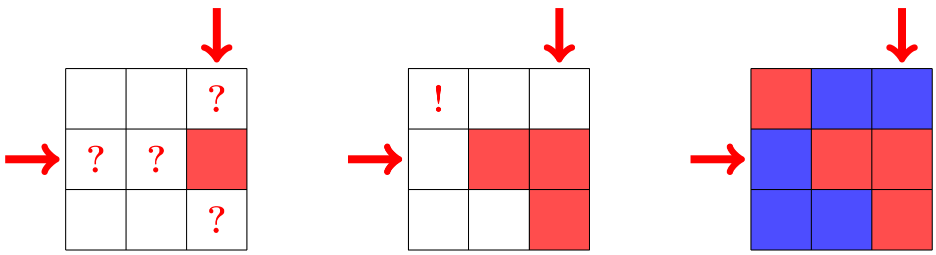
1. eset **3 piros és 6 kék**. Ilyen színezésből 6 db van, ami a következő módon látható át.
A három pirosból mindegyik oszlopra kell jusson egy-egy, tehát különböző oszlopokban kell lenniük. Az első sorban még 3-féleképpen választhatom ki a piros mezőt, a második sorban már csak 2-féleképpen és ezzel a harmadik piros mező helyét már meg is határoztam. Tehát az ilyen színezések száma $3\cdot2=6$.

2. eset **4 piros és 5 kék**. Ilyen színezésből 45 db van, ami a következő módon látható át.
Négy piros mező csak úgy oszolhat meg a sorok között, hogy van egy sor, amelyben kettő piros van, ezt nevezzük *dupla-sor*nak, és két sor, amelyben egy-egy piros van. Hasonlóképpen kell legyen pontosan egy *dupla-oszlop* is, a másik két oszlopban egy-egy piros mező lesz. Összesen $3\cdot3=9$ lehetőségem van arra, hogy kiválasszam, melyik legyen a dupla-sor és a dupla-oszlop.

A dupla-sor és a dupla-oszlop egy mezőben metszi egymást. Ha ez a mező kék, akkor a dupla-sor és dupla-oszlop másik két-két mezőjének mind pirosnak kell lennie. Ezzel mind a 4 piros mezőt el is helyeztem, a kapott színezés teljesíti is a szabályokat.



Ha a dupla-sor és a dupla-mező metszéspontja piros, akkor a dupla-sorban és a dupla-oszlopban is külön-külön eldönthetem, hogy melyik legyen a második piros mező a két-két szabad mező közül. Ez $2\cdot2=4$ lehetőség. Eddigre három piros mezőt már elhelyeztem. Maradni fog egyetlen sor és oszlop, amelyben még nincs piros mező, ezek metszéspontja kell legyen az utolsó piros mező, így a szabályokat teljesítő színezést kapok.



Tehát 4 piros és 5 kék mező $9\cdot(1+4)=45$-féleképpen helyezhető el.

3. eset **5 piros és 4 kék**. Ilyen színezésből is 45 db van, hiszen a színek kicserélésével ezek megfeleltethetők a 2. eset színezéseinek.

4. eset **6 piros és 3 kék**. Ilyen színezésből is 6 db van, hiszen a színek kicserélésével ezek megfeleltethetők az 1. eset színezéseinek.

Összefoglalva: $6+45+45+6=108$ lehetséges színezés van. □