Általános geometria 1.

G1.1. Forgassuk el egymás után háromszor O körül 90°-kal a BCDE négyzetet, így az A csúcs képei négyzetet határoznak meg.

Eredmény:

OA = $\frac{m+n}{\sqrt{2}}$.

G1.2. Legyen x és y egy négyzet oldalának vízszintes és függőleges vetülete, ekkor 3y + 2x = 8 és 3y + x = 7.

Eredmény:

A négyzet oldalának hossza $\sqrt{5}$.

G1.3. Mutassuk meg, hogy BMA és CMK háromszögek hasonlóak.

Más megoldási lehetőség:

Tükrözzük A-t C-re, ekkor az ABA’ háromszögben A’K súlyvonal, M súlypont.

G1.4. Forgassuk el A körül pl. -90°-kal az MN szakaszt. Ekkor NM = MN', s ANMN' deltoid.

Más megoldási lehetőség:

Legyen DAN$\angle$ = α, MAB$\angle$ = β; ekkor NM = tgα + tgβ; NC = 1 – tgα, CM = 1 – tgβ. Ezután alkalmazzuk Pitagorasz tételét.

Eredmény:

MAN$\angle$ = 45°.

Megjegyzés:

Igaz a tétel megfordítása is.

G1.5. Dolgozhatunk pl. analitikusan. Legyen N az origó, AO az x-tengely, NP az y-tengely, s ekkor AB és AC egyenesek ellentétes meredekségűek.

Általános geometria 2.

G2.1. Mutassuk meg, hogy KD = LC, s KBD és LBC háromszögek egybevágók.

G2.2. Mivel CA = CB, tükrözzük P-t AB felező merőlegesére.

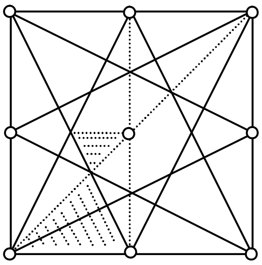
Eredmény:

BPC∠ = 80°.

G2.3. A CD és EF szakaszok metszéspontját jelöljük N-nel, s írjuk fel a DN:NC arányt két hasonló háromszögpár segítségével.

G2.4. Tükrözzük pl. a piros golyót (ill. tükörképét) sorban három oldalra.

G2.5. A kapott nyolcszögnek négy szimmetriatengelye van, felbontható nyolc egybevágó háromszögre, ***de nem szabályos***. (Egy szabályos nyolcszögnek nyolc szimmetria tengelye van.)



A megoldáshoz pl. hasonló háromszögek segítségével juthatunk el; az ábrán satírozott háromszögek hasonlóak, a hasonlósági arány 1 : 2.

Eredmény:

$t = \frac{1}{6}$.

Megjegyzés:

Ez a példa a műszaki és természettudományi egyetemek-főiskolák felvételi feladata volt 1989-ben. Pl. Scharnitzky Viktor: Egyetemi felvételi feladatok matematikából IX, 1989 – 1992, Tankönyvkiadó, 1992. c. könyvében hat megoldást találhat az olvasó.

Háromszög-geometria 1.

G3.1. Húzzunk C-n keresztül AM-mel párhuzamost!

G3.2. Alkalmazzuk az ABM és ABC háromszögekben a szögfelező osztásarány-tételét, majd fejezzük ki a BM súlyvonalat a háromszög oldalaival.

Eredmény:

AB ≈ 1083,8, BC = 2574.

G3.3. Mérjünk fel A-ból az AC oldalra kifelé kétszer $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szöget, s alkalmazzuk ezen egyenesek és a BC szakasz C-n túli meghosszabbításának metszéspontjaira a szögefelező osztásarány-tulajdonságát.

Megjegyzés:

Hasonlóan megmutatható pl. a $b^2 + ab = c^2$ összefüggés is.

Ide kapcsolódik az alábbi **feladat** (Bényei: 33 matematika feladatsorozat felvételizőknek, Műszaki, 1990):

Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög α, β, γ szögeire $\alpha = 2\beta = 4\gamma$, akkor $a^2 = c(a + b + c)$.

G3.4. Bocsássunk D-ből merőlegeseket a háromszög oldalaira (ill. azok meghosszabbítására). Mutassuk meg (pl. a szinusz-tétel segítségével), hogy az így kapott A_1, B_1, C_1 pontokra $DB_1 = DA_1 + DC_1$. Ezután legyen az M, ill. N pontok távolsága a szemköztes oldalaktól x és y, s a hasonló háromszögekben felírható arányokat fejezzük ki x-szel és y-nal.

G3.5. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét s mutassuk meg, hogy $BN^2 + AB^2 = CN^2 + AC^2$, pl. M és N BC-re vett vetületeinek segítségével.

Más megoldási lehetőség:

Alkalmazhatunk koordináta-geometriai módszereket (pl. A(0, a), B(b, 0), C(c, 0) kezdeti „kiosztással”, vagy bizonyíthatunk a skaláris szorzat segítségével is.

Háromszög-geometria 2.

G4.1. A magasság talppontját T-vel, a BC oldal felezőpontját F-fel jelölve használjuk ki, hogy BAF egyenlő szárú háromszög, valamint AF szögfelező a CAT háromszögben.

Eredmény:

A szögek nagysága 30°, 60°, 90°.

Más megoldási lehetőség:

Tükrözzük a TFA háromszöget az AF egyenesre!

Megjegyzés:

A feladat megtalálható pl. Katz Sándor: Matematika feladatsorok c. könyvében. Ugyanitt olvasható a következő **feladat:**

Az ABC háromszögben az A csúcsból kiinduló magasság, súlyvonal és szögfelező a $BAC\angle$-et négy egyenlő részre osztja. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

G4.2. Több megoldási lehetőség is van: területek alkalmazása, hasonlóság, Ceva-tétel, súlyozás.

Eredmény:

$\frac{AO}{MO} = \frac{9}{2}$.

G4.3. Az AB_1B_2 és $L_1B_1B_2$ egyenlő szárú háromszögek; írjuk fel a szinusz-tételt az AL_1B_2 és a koszinusz-tételt az AB_1B_2 háromszögekben. Ha $B_1AB_2\angle = \varepsilon$ és $L_1KL_2\ \angle = \alpha$, kapjuk, hogy $\cos\varepsilon = \frac{1+2\cos\alpha}{3+2\cos\alpha}$.

G4.4. CF és BM metszéspontját jelöljük S-sel, AS és BC metszéspontját D-vel, s rajzoljuk meg ABS és BSC háromszögek körülírt köreit. Az adott szögek érintő szárú kerületi szögek lesznek, az AB, BC, AC szakaszok pedig érintők. (Segítség: $MC^2 = MS\cdot MC = MA^2$). Végezetül az $ASC\angle = FSD\angle = 180° - \beta$ egyenlőséget mutathatjuk meg.

G4.5. AB és LK metszéspontját jelöljük N-nel. Alkalmazzuk Ceva tételét az ABC háromszögben, majd Menelaosz tételét az ABC háromszöger és a KL egyenesre; majd használjuk ki az NKA és MWA, valamint NKB és MVB háromszögek hasonlóságát.

Háromszög-geometria 3.

G5.1. Alkalmazzuk a szögfelező osztásarány-tételét és a Pitagorasz-tételt kétszer a CF magasságra.

Erdemény:

DH = 1,25.

G5.2. Legyen a beírt kör középpontja K, a körülírt kör középpontja O. Mutassuk meg, hogy $AKB\angle = 90° + \frac{\gamma}{2}$, majd a kerületi-középponti szögek tételét alkalmazva keressünk egyenletet a γ tompaszögre.

Eredmény:

$\gamma = 108°$, $\alpha = \beta = 36°$.

G5.3. Valamely háromszög helyett hozzá hasonlót is szerepeltethetünk, ezért feltehetjük, hogy pl. b = b'. Ezen oldal egyik végpontjában felmérve α-t és $\pi - \alpha$-t, kapjuk, hogy a = a'; ezután alkalmazzuk Pitagorasz tételét.

G5.4. Mutassuk meg, hogy ACQP húrnégyszög. (Vagy összegezzük a BCP háromszög belső szögeit.)

Eredmény:

$QPC\angle = \frac{\alpha}{2}$.

G5.5. Írjuk fel AD^2-et kétféleképpen a Pitagorasz-tétel segítségével az AB, majd AC átfogójú derékszögű háromszögekben, ezután alkalmazzuk a szelőszakaszok tételét.

Háromszög-geometria 4.

G6.1. Húzzunk pl. C-n keresztül párhuzamost AE-vel.

Eredmény:

$BAC\angle = 90°$.

G6.2. Tegyük fel, hogy AB < AC, ekkor E a BC oldal B-n túli meghosszabbításán van. Mérjük fel AB A-n túli meghosszabbítására az AZ = AC szakaszt, ekkor EB = BZ, $BEZ\angle = \frac{B\angle}{2}$ és EC = EZ.

Eredmény:

$B\angle = 80°$ és $C\angle = 40°$.

G6.3. Az AC oldal F felezőpontjára tükrözzük D-t; az így kapott D' pont rajta lesz az ABC háromszög köré írt körön, valamint D, G, O, O' egy egyenesbe esnek. Ekkor a bizonyítandó állítás: ha $2R(1 + \cos\alpha + \cos\beta) = k$ $(= 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, akkor $\gamma = 90°$.
A megfordítást igazolhatjuk pl. indirekt módon is.

G6.4. Alkalmazzuk a BAQ háromszögben a szögfelező-tételt, majd mutassuk meg, hogy a Q-n átmenő AB-vel párhuzamos egyenes egyenlő szárú háromszöget vág le az AQC háromszögből. Ezen párhuzamos és az AC oldal metszéspontját R-nek nevezve megmutatható, hogy AQ = QR.

Eredmény:

$PAC\angle = 90°$.

G6.5. Először mutassuk meg, hogy DI = IC és $DIE\angle = 45°$. DK és IE metszéspontját jelöljük L-lel, s bizonyítsuk be, hogy IKL és DEL háromszögek egybevágók.

Háromszög-geometria 5.

G7.1. Rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört!

G7.2. A szinusz-tétel és a megfelelő területképletek segítségével a $9abc \le (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ezután alkalmazzuk mindkét jobboldali tényezőre a számtani – mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

G7.3. Legyen AA" az ADE háromszög DE oldalhoz tartozó magassága. Használjuk ki, hogy ADA'E húrnégyszög, s mutassuk meg, hogy $BAA''\angle = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

G7.4. Tükrözzük AC-re az S_i pontokat; ekkor pl. $S_1S_1'S_3$ és S_1S_2B háromszögek egybevágók.

G7.5. Bizonyítsuk be a következő segédtételt: Ha az ABC háromszög oldalaira kifelé megszerkesztjük az ABX, ACY, BCZ szabályos háromszögeket, az ABX és BCZ háromszögek köré írt körök középpontjait összekötő egyenes merőleges BY-ra.

A segédtétel bizonyításához mutassuk meg a kerületi-középponti szögek segítségével, hogy az ABX és BCZ háromszögek köré írt körök M második metszéspontja rajta van a BY szakaszon.

A segédtétel jelöléseit használva B'N $\parallel$ BY, A'C' $\parallel$ O_aO_c (a megfelelő körközéppontok centrálisa).

Illeszkedési feladatok 1.

G8.1. Általában megmutatható, hogy $\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$. A bizonyítás történhet a hat részháromszög terület-arányainak segítségével.

Másik megoldási lehetőség:

Az ABC háromszög csúcsaiba úgy helyezzünk el súlyokat, hogy az ABC háromszög súlypontja O-ba essen, s ennek megfelelően alkalmazzuk a súlypontszerkesztési tételt.

Eredmény:

OF = 31.

G8.2. a) Legyen AB = a, AD = b. Mutassuk meg, hogy az EBF háromszög köré írt kör sugara $r = \frac{a^2}{2b}$ (Pitagorasz-tétel), s hogy OP a két sugár összege.
b) Mutassuk meg pl., hogy az ADG és GBA szögek összege 90°.

G8.3. Végezhetünk egyszerű szögszámításokat I helyzetét felhasználva, vagy alkalmazhatunk pl. $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítést C-ből.

Megjegyzések:

1. A beírt kör középpontjára a feladat szövegében nincs szükség.

2. Hasonló az alábbi feladat:

Az ABC háromszög C csúcsából bocsássunk merőlegeseket a BAC és ABC szögek belső és külső szögfelezőire. Mutassuk meg, hogy az így kapott négy talppont egy egyenesen van.

G8.4. Az A középpontú forgatva nyújtással BC átvihető EF-be; jelöljük BE és CF metszéspontját Q-val. A forgatás BAC szöge megjelenik BQC-ben is, s innen P = Q.

Megjegyzés:

Egy ide kívánkozó feladat:

Két kör metszéspontjai A és B. Az A ponton át húzott egyenes az egyik kört C, a másik kört D pontban metszi. Igazoljuk, hogy a C, illetve a D pontban húzott érintők metszéspontja rajta van a BCD háromszög köré írt körön.

G8.5. Legyen a HK és QS szakaszok metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy a QHKP húrnégyszögben $QKH\angle$ ($= QKX\angle$) és $KQS\angle$ ($= KQM\angle$) egyenlő (ez utóbbi váltószöge $QSR\angle$-nek). Ekkor KMQ egyenlő szárú háromszög.

Más megoldási lehetőség:

Q-ból az SR egyenesre bocsátott merőleges talppontja legyen L. Ekkor K, H, L egy egyenesre esik (a PRS háromszög Simson-egyenese), és QLSK téglalap.

Illeszkedési feladatok 2. - Három egyenes egy ponton

G9.1. Végezzünk a négyzet O középpontja körül 90°-os forgatást!

Más megoldási lehetőség:

Viszonylag könnyen kijön a feladat koordináta-geometriai segítséggel. Legyen az origó a négyzet középpontja, P(u, v) a tetszőleges pont, s mutassuk meg, hogy a merőlegesek átmennek a (– v, u) ponton.

G9.2. Mutassuk meg, hogy A’P belső szögfelező az A’B’C’ háromszögben.

G9.3. Legyen F pl. az R-ből húzott magasság talppontja, O a körülírt kör középpontja, H a magasságpont. Ekkor POHR húrnégyszög, s O egyúttal a PHF háromszög beírt körének középpontja.

G9.4. Pl. az A_2 centrumú középpontos tükrözés A_3-at az $A_1B_1C_1$ háromszög beírt körének középpontjába viszi.

G9.5. Ha a négyszög húrnégyszög, a körülírt kör középpontját a középvonalak metszéspontjára tükrözve kapjuk a szemköztes oldalakhoz tartozó merőlegesek metszéspontját. Visszafelé okoskodhatunk pl. indirekt módon.

Megjegyzés:

A feladat egyik irányban megegyezik a KöMaL F.1215. feladatával.

Illeszkedési feladatok 3. – Három pont egy egyenesen

G10.1. Használjuk fel az ABC és ABD háromszögekben a szögfelező osztásarány-tételét és a szinusz-tételt! Az $ABD\angle = \alpha$, $ADB\angle = \beta$, $ACB\angle = \gamma$ jelöléssel kapjuk, hogy $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \gamma)$, s innen $\alpha + \beta + \alpha + \gamma = \pi$ következik.

G10.2. Legyen az érintők metszéspontja G, ekkor BAG és CBG, valamint ADG és DCG hasonló háromszögek segítségével igazolható az állítás. A fordított irányt indirekt úton bizonyíthatjuk.

G10.3. B_1, A, B_2 egy egyenesre esnek, $MO_1 = AO_2$ és $MO_2 = AO_1$ (háromszögek középvonalai). Mutassuk meg, hogy az MO_1A és MO_2A, valamint MO_1M_1 és MO_2M_2 háromszögek egybevágók; innen $MM_1 = MM_2$. A középponti szögek feltételét felhasználva M_1, B, M_2 egy egyenesbe esik.

G10.4. Mutassuk meg, hogy AB felezőmerőlegese akkor és csak akkor halad át K-n, ha $\frac{AM}{BN} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, innen következik AMD és BND háromszögek hasonlósága. Jelöljük P-vel AB és CD metszéspontját, s írjuk fel a szinusz-tételt rendre az $\frac{MD}{BD}$ arányra, az APC háromszögben az $\frac{AP}{CP}$, s a BPC háromszögben a $\frac{BP}{CP}$ arányra. Kapjuk, hogy $\frac{AP}{BP} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$.

G10.5. Jelöljük R-rel a k és AH másik metszéspontját. Mutassuk meg, hogy BR szögfelező, ezért HAB egyenlő szárú háromszög; MT párhuzamos BC-vel; ezután elég megmutatni, hogy $\frac{HS}{SM} = \frac{HK}{MT}$. A szögfelező-tulajdonság kihasználásával $\frac{HK}{HC} = \frac{KB}{AB}$, a szelőszakaszok tételéből $HS \cdot HM = HC \cdot HB$. Ezután a szinusz-tétel segítségével $\frac{SM}{AB} = \sin\frac{MAS\angle}{2}$ levezethető, ahonnan az ABT és MKB háromszögek területének egyenlősége következik.

Illeszkedési feladatok 4.

G11.1. Jelöljük az A_1A', B_1B', C_1C' szakaszok hosszát rendre a, b, c-vel. A terület-egyenlőség miatt van olyan P pont a háromszög belsejében, melynek az oldalaktól mért távolsága a, b, c. Ezen P pontra pl. PA_1 merőleges AA'-re, s innen következik, hogy PH a keresett kör átmérője.

G11.2. Legyen $DAB\angle = \alpha$, $ABC\angle = \beta$, AD és BC metszéspontja E, AC és BD metszéspontja L (ekkor L az ABE háromszög magasságpontja). Mutassuk meg, hogy a CEDK húrnégyszögben $CKD\angle = AKB\angle = \alpha + \beta$, s ebből az is következik, hogy ABLK és CDKL húrnégyszögek. Az ABCD, ABLK és CDKL körök hatványvonalai egy ponton mennek át (M), s ezért K, L, M egy egyenesbe esik.

G11.3. Legyen az AP és BQ egyenesek metszéspontja X, s mutassuk meg, hogy ABXC és QPRX húrnégyszögek.

G11.4. Alkalmazzuk Ceva tételét és használjuk fel a koszinusz-tételt, valamint a belső szögfelező osztásarány-tételét.

G11.5. Alkalmazzunk inverziót; az alapkör középpontja legyen A', a sugara tetszőleges. Ezután használjuk fel a körökre vonatkozó hatványtételt.

Körgeometria 1.

G12.1. Az érintőnégyszög-tulajdonságból megkapjuk a szárak hosszát; ezután alkalmazzuk Pitagorasz-tételét.

Eredmény:

$R = \frac{5}{4}\sqrt{41}$, $r = 4$.

G12.2. Legyen r az A_1MA_2 háromszög köré írt kör sugara. Ha az érintőre A_1-ben állított merőleges K-ban metszi a k_1 kört, mutassuk meg K segítségével, hogy $r\sin A_1A_2M\angle = r_1\sin MA_1A_2\angle$.

G12.3. A BCE háromszögben CD magasságvonal. Mutassuk meg a kerületi szögek tételének felhasználásával, hogy pl. CFG és CBE szögek egyállásúak.

G12.4. Jelöljük T-vel az AB ív felezőpontját (itt érinti C_1 S_1-et), valamint D-vel és E-vel rendre a BT szakasz metszéspontját C_1-gyel és S_2-vel. Mutassuk meg, hogy D rajta van a PR, E pedig az RQ szakaszon, s ezen szakaszok merőlegesek OT, ill. OB-re.

G12.5. Ha a négyszög nem trapéz, jelöljük AB és CD egyenesek metszéspontját F-fel, s tekintsük a DFB és AFC körök metszéspontját.

Körgeometria 2.

G13.1. Általános esetbem ARLM és LSBM olyan húrnégyszögek, amelyekben AL, ill. BL a körülírt kör átmérője.
Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet is, amikor M az e egyenesre esik!

G13.2. A PA + PB összeg kifejezhető Ptolemaiosz tételéből, s elég a $\frac{PD}{PC} = \frac{AE}{AC}$ egyenlőséget igazolni.

Második megoldás:

A PB szakaszt hosszabbítsuk meg B-n túl Z-ig úgy, hogy BZ = AP legyen, s használjuk fel a CAP és CBZ háromszögek egybevágóságát.

G13.3. A PNQ háromszög P és Q csúcsainál lévő érintő szárú kerületi szögek összege a QMR szög.

G13.4. Legyen $CAD\angle = \alpha$ és $BAC\angle = \beta$. Ekkor az általános szinusz-tétel következményeként elég megmutatni, hogy $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + 2\beta)$, ha $\alpha + \beta = 60°$.

G13.5. Legyen I a beírt kör középpontja, AW az AKL háromszög magassága. Felhasználva az IPK és AWK háromszögek hasonlóságát, mutassuk meg Ceva tételének segítségével, hogy W = N. Ezután használjuk fel, hogy az APIQ körön N is rajta van.

Körgeometria 3.

G14.1. Alkalmazzuk a körzsugorítás módszerét és Pitagorasz-tételét!

Eredmény:

A két sugár szorzata 48.

G14.2. A szelőszakaszok tételének segítségével mutassuk meg, hogy az MN egyenes PQ-t felezi.

G14.3. A CO sugár meghosszabbítása kijelöli a CD átmérőt, s ABCD húrtrapéz.

G14.4. Vegyük észre, hogy a két átlóhoz tartozó kerületi szögek kiegészítő szögek; fejezzük ki az átlókat az oldalakkal és szögekkel, s alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét.
Az egyenlőtlenség legegyszerűbb igazolása a számtani-mértani közép segítségével történhet; egyenlőség az a = b = c = d esetben állhat fönn.

Megjegyzés:

Hasonlóan vezethetjük le a húrnégyszögek területképletét: $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ahol s a félkerület.

G14.5. A BQN és PMC háromszögek köré írt körét AM, ill. AN rendre az X, ill. Y pontban metszi. $QBC\angle = PCB\angle$ teljesüléséhez elég megmutatnunk, hogy MNXY húrnégyszög. Használjuk fel az ABX és ACY háromszögek hasonlóságát, valamint az ABM és ACN háromszögek területének egyenlőségét is.

Körgeometria 4.

G15.1. Legyen a négyzet AB-vel párhuzamos CD oldalának felezőpontja E; írjuk fel Pitagorasz tételét az OED háromszögre.

G15.2. Használjuk fel, hogy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei is egyenlők, és alkalmazzuk a kerületi szögek tételét.

G15.3. Tükrözzük a C-t a B-re (E) és mutassuk meg, hogy EAMC húrnégyszög.

Eredmény:

$ABM\angle = 90° - 2x$.

G15.4. Ha az A középpontú, AD sugarú kör E' és F' pontokban metszi a befogókat, s az E'F' egyenes G és H pontokban a CAD, ill. DAB szögek szögfelezőit, mutassuk meg, hogy AE'G és ADG háromszögek egybevágók, $ADG\angle = 45°$ s így G az ABD háromszög beírt körének középpontja.

G15.5. Húzzunk merőlegeseket O-ból az AD, DC, CB oldalakra, ezek az AB egyenessel, ill, egymással rendre α, β, γ, δ szögeket zárnak be ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$). Feltehetjük, hogy a félkör sugara egységnyi, ekkor $AD + BC = \left(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right) + \left(\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\delta\right)$. Ezután használjuk fel, hogy ABCD húrnégyszög ($B\angle = \beta$, β és δ pótszögek stb.).

Körgeometria 5.

G16.1. A BC oldalt AD-re vetítve a kimaradt szakaszok hossza legyen x és 10 – x, s fejezzük ki a trapéz szárait x függvényében.

Eredmény:

Lehetséges.

G16.2. Legyen AB és CP metszéspontja T, $PAB\angle = \alpha$, $PBA\angle = \beta$, s alkalmazzuk a kerületi-középponti szögek tételét (érintő szárú kerületi szögek). Pl. $PQB\angle = PCB\angle = \beta$. Mutassuk meg, hogy $PRB\angle = PQR\angle = \alpha + \beta$.

G16.3. Legyen a HA és BC, a HB és CA, valamint a HC és AB egyenesek metszéspontja rendre D, E, F. Mutassuk meg, hogy a szóban forgó körök átmennek a D, E, F pontokon; s mivel ADBE húrnégyszög, alkalmazhatjuk a szelőszakaszok tételét.

G16.4. Vegyük fel a Q_1 pontot a BD szakaszon úgy, hogy CQ_1 szögfelező legyen. Alkalmazzuk a szögfelező osztásarány-tételét, s a feltételt felhasználva mutassuk meg, hogy $ABCQ_1$ húrnégyszög.

G16.5. Vegyük fel a K pontot a BN egyenes meghosszabbításán úgy, hogy $BCK\angle = BMA\angle$ legyen, ekkor ABM és KBC háromszögek hasonlók. Az $\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC}$ egyenlő arányok miatt ABK és MBC háromszögek is hasonlók lesznek. Ezután mutassuk meg, hogy ANCK húrnégyszög, s alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét.

Körgeometria 6.

G17.1. Legyen L tükörképe BO-ra L’, O tükörképe D-re (és AB-re) O’. Mutassuk meg, hogy OM’O’M paralelogramma, és $CLO\angle = BLM\angle = BL'M\angle = BKO\angle$.

G17.2. A C középpontú és CA = b sugarú kör BC-t F-ben, AB-t D-ben metszi. Legyen PB = 1, ekkor BF = 2. A szelőszakaszok tételéből PD = b adódik, s AC = CD = DP-ből következik az állítás.

G17.3. Mutassuk meg pl. a C pontbeli közös érintő segítségével, hogy ha a CKL kör érinti ω-t, akkor $KL \parallel BD$, majd használjuk fel az érintő szárú kerületi szögeket.

G17.4. A $k_1(PDG)$ és $k_2(PFE)$ körök második metszéspontja legyen Q. Ekkor $PQ \perp O_1O_2$, tehát azt kell megmutatni, hogy A, P, Q egy egyenesen vannak. Ha az AP egyenes H és K pontokban metszi a DE, ill. BC szakaszokat, akkor DH : HE = BK : KC; s mivel FH : HG = BK : KC, ezért DH : HE = FH : HG. Innen következik, hogy H rajta van k_1 és k_2 hatványvonalán.

G17.5. A körök centrálisára vonatkozó tengelyes szimmetria miatt a magasságpontok egyenlő szárú trapézt alkotnak, ezért elég belátni pl., hogy ha H az AMN háromszög magasságpontja, akkor HB merőleges AB-re. Legyen MN metszéspontja AH-val és AB-vel P, ill. Q.

Derékszögű háromszögek hasonlósága miatt PM·PN = PH·PA; ezután mutassuk meg, hogy HBQP húrnégyszög, vagyis AH·AP = AQ·AB.

Mértani hely

G18.1. Az AD és BE egyenesek metszéspontja G; mutassuk meg, hogy DCEG paralelogramma.

Eredmény:

A mértani hely a kapott ABG háromszög AB-vel párhuzamos középvonala, a végpontok kivételével.

G18.2. A BC felezőmerőlegese és a BC egyenesből a BC szakasz elhagyásával kapott halmazon kívül egy BC ív is hozzátartozik a mértani helyhez.
Speciális eset, ha A a BC szakasz felezőpontja.

G18.3. Akkor lehet megoldás, ha az AE szakasz Thalesz-körének és a trapéz alapokkal párhuzamos középvonalának van közös pontja.

Eredmény:

$2 - \sqrt{2}$.

G18.4. Forgassuk el A körül pl. -90°-kal az MN szakaszt. Ekkor NM = MN', s ANMN' deltoid.
Az AMN és AMN' háromszögek egybevágósága miatt $AMN\angle = AMN'\angle$, az APM és ABM háromszögek egybevágósága miatt AP = AB = 1.

Eredmény:

A mértani hely A középpontú, egység sugarú negyedkörív, kivéve B és D határpontokat.

G18.5. Ha $A\angle = 90°$, akkor a mértani hely az A pont.
Ha $A\angle \neq 90°$, akkor tükrözzük A-t BC-re, így kapjuk D-t; D-t tükrözve MN-re, kapjuk K-t; s a keresett magasságpontok rajta vannak a K ponton átmenő, BC-vel párhuzamos egyenesen. Az egyenes azon H_1 és H_2 pontja nem tartozik a mértani helyhez, amelyre $DH_1 \perp DB$ és $DH_2 \perp DC$.

Területszámítás 1.

G19.1. Pl. a súlypontszerkesztési tétellel meghatározhatjuk az egyes szakaszok osztási arányait, majd kiszámolhatjuk a kapott részháromszögek területeinek arányát (terület arányos az alappal és a magassággal).

Eredmény:

n = 8.

G19.2. Az átlók metszéspontját M-mel jelölve $T_{ABM} = T_{MDE}$.

G19.3. Mutassuk meg, hogy T(APIK) – T(CPI) = T(CLI).

G19.4. Legyen pl. a BC oldalra emelt félkör középpontja D, s írjuk fel az ABC háromszög területét az ABD és ACD háromszögek területének összegeként; majd ugyanezt végezzük el a másik két oldalra is.

Megjegyzés:

A megoldásban nem használtuk ki, hogy az ABC háromszög derékszögű, tehát az állítás igaz tetszőleges háromszögre is.

G19.5. Mutassuk meg, hogy a keletkezett hatszög középpontosan tükrös; majd használjuk fel a kis háromszögek és az eredeti háromszög hasonlóságát.

Megjegyzés:

Hasonló hangszerelésű az alábbi feladat:

1955. évi Országos Tanulmányi Verseny:

Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. mekkora az adott háromszög területe, ha adva van a keletkezett 3 háromszög területe: t_1, t_2, t_3?

Területszámítás 2.

G20.1. S egy háromszögtartomány, csúcsai $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, (0, 0).

Eredmény:

A terület $\frac{1}{12}$.

G20.2. Húzzuk be az AM szakaszt, s írjunk fel egyenleteket az ABM és ACM háromszögek területére!

Eredmény:

x = 22.

G20.3. Legyen α és β az A, ill. B pont helyzetét jellemző szög. Írjuk fel a p_1, ill. p_2 területeket az OAB körcikk, valamint a pontok vetületeiből adódó megfelelő derékszögű háromszögek területének segítségével. $p_1 + p_2 = \beta - \alpha$ adódik, ami valóban AB hossza.

G20.4. Használjuk fel, hogy $MA_1 = A_1A_2$ (M a magasságpont), és az $\frac{A_1M}{A_1A}$ típusú arányokat fejezzük ki a megfelelő háromszögek területeivel.

G20.5. Hasonlóság alkalmazásával megmutathatjuk, hogy pl. $D_1 = 2\sqrt{T_2 T_3}$, s ezután alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Geometriai egyenlőtlenségek 1.

G21.1. Mutassuk meg, hogy r + R egyenlő a háromszög kerületének felével, majd az egyenlőtlenséget csak r és R segítségével írjuk fel.

G21.2. Az S területű háromszög oldalait jelöljük a, b, c-vel, beírt körének sugarát r-rel. Nyilván $s \le r^2$, valamint a + b-t $2\sqrt{ab}$ -vel és c-t $\sqrt{2ab}$ -vel alulról becsülve $S \ge (3 + 2\sqrt{2})r^2$.

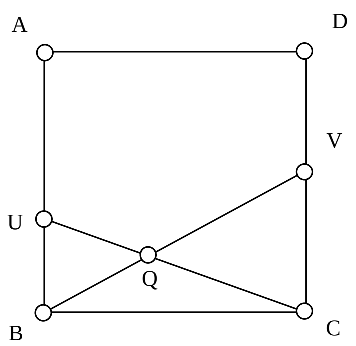
Egyenlő szárú derékszögű háromszögek esetén áll fenn az egyenlőség.

G21.3. A Héron-képletből a bizonyítandó állítás:
$\sqrt{abc(a+b+c)} \ge \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$.
Továbbléphetünk pl. az $a^2 \ge a^2 - (b-c)^2$ típusú egyenlőtlenségeket alkalmazva, vagy az u = a + b – c, v = a – b + c, w = – a + b + c helyettesítés után az u, v számokra felírt számtani – mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével.

Egyenlőség szabályos háromszög esetén állhat fenn.

G21.4. Alkalmazzuk a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij- egyenlőtlenséget a $\left(\sqrt{ar_1}, \sqrt{br_2}, \sqrt{cr_3}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ számhármasokra. Felhasználva, hogy $ar_1 + br_2 + cr_3 = \frac{abc}{2R}$, kapjuk, hogy $\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)^2 \le \frac{ab+bc+ac}{2R}$. Itt ismét alkalmazhatjuk a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij- egyenlőtlenséget, vagy a rendezési tételt.
Egyenlőség szabályos háromszögben van, ha P a középpont.

G21.5.



Vegyük fel pl. az ábra szerint betűzött egységoldalú négyzet B csúcsában a koordináta-rendszer kezdőpontját, ekkor A(0; 1) és C(1; 0) a koordináták.

Legyen U(0; a) és V(1; d); ekkor számolható Q két koordinátája: $Q\left(\frac{a}{a+d}; \frac{ad}{a+d}\right)$.

Ezután mutassuk meg a BQC és UVQ háromszögek területének egyenlőségét, s határozzuk is meg a BQC háromszög területét ($\frac{ad}{2(a+d)}$). Végezetül a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség segítségével összehasonlíthatjuk a BQC háromszög és a BCVU trapéz területét.

Eredmény:

A keresett terület legfeljebb a négyzet területének negyede lehet; a maximális érték akkor lép fel, ha $a = d$.

Más megoldási lehetőség:

Ha pl. a BQU és CQV háromszögek területét x-szel, ill. y-nal jelöljük, megmutatható, hogy a BQC és UQV háromszögek területe $\sqrt{xy}$. (Ekkor persze a BCVU trapéz területe $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$.)

Geometriai egyenlőtlenségek 2.

G22.1. Alakítsuk szorzattá az $a^3 + b^3$ kifejezést, s alkalmazzuk a koszinusz-tételt.

Második megoldás (becslés):

Mivel $a, b < c$, ezért $c^2 = \frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{c} < a^2 + b^2$.

Megjegyzés:

Lényegében ugyanezt a feladatot tűzték ki a Középiskolai Matematikai Lapok 1995/7. számában, a 3010. gyakorlatként.

A 2002. május 22-i egyetemi felvételi feladatsor **8. feladata:**

Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. Tudjuk, hogy $a^3 + b^3 = c^3$. Igazolja, hogy a háromszög c hosszúságú oldalával szemközti szöge 60°-nál nagyobb, de 90°-nál kisebb!

G22.2. Könnyen látható, hogy az A csúcs vagy az A-ból húzott magasság talppontja P két lehetséges helyzete. Az $a + m_a > b + c$ egyenlőtlenség Pitagorasz tételével és a területképletek segítségével látható be.

Eredmény:

A P pontot A-ban kell felvenni.

G22.3. Először mutassuk meg, hogy $BD < CE$ ($HBC\angle = C\angle + 5°$). Ezután bizonyítsuk be, hogy B és C a két kör közös AZ húrjának különböző félsíkjába esik, majd állapítsuk meg a két kör sugarának nagyságviszonyát.

G22.4. Legyen AC = a, CE = b, AE = c. Newton tétele értelmében (a Ptolemaiosz-tétel egyenlőtlenség alakban) $AC \cdot EF + CE \cdot AF \geq AE \cdot CF$, ahonnan
$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ következik. A jobboldal kétszeresét
$\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{c}{c+a}$ -val becsülhetjük alulról.
Egyenlőség akkor lehet, ha a = b = c, vagyis a hatszög szabályos.

G22.5. a) Alkalmazzuk a $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{h_a}{l_a}$ összefüggést, a t = rs területképletet és az a = 2RsinA szinusz-tételt. Ezek segítségével $\frac{h_a}{l_a^{\,2}}=\frac{R}{2t}\left(\sin A+\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)\right)$. Összegzés után alkalmazzuk a sinA + sinB + sinC = $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ összefüggést.

b) A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből $\left(\frac{\sqrt{h_a}}{l_a}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_a}}+\frac{\sqrt{h_b}}{l_b}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_b}}+\frac{\sqrt{h_b}}{l_b}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_b}}\right)^2 \leq$ $\left(\frac{h_a}{l_a^{\,2}}+\frac{h_b}{l_b^{\,2}}+\frac{h_c}{l_c^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$, s az $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ összefüggésből következik az állítás.

Geometriai egyenlőtlenségek 3.

G23.1. Alkalmazzunk kétszeres nagyítást M-ből, ekkor O a háromszög magasságpontjába kerül.

Eredmény:

Minimális értéket akkor kapunk, ha M a B csúcsból húzott magasság talppontja.

G23.2. a) Vegyük észre, hogy $g_a=\frac{m_a}{3}$.
b) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{1}{r}$, s alkalmazzuk pl. a számtani-harmonikus közép közötti összefüggést.

G23.3. Egyenesen kell mennie $\sqrt{2}$ km-t, majd merőlegesen elfordulva szintén $\sqrt{2}$ km-t.

G23.4. a) A baloldali egyenlőtlenség a hatszög szomszédos oldalaira felírt háromszög-egyenlőtlenségekből következik. Az ACE, ill. BDF háromszögek kerületének metszéspontjait felhasználva tudjuk felülről becsülni a hatszög kerületét, innen következik az u + v > s egyenlőtlenség.

b) Az egyenlőtlenségek nem élesíthetők. Az egyik példa lehet az AB oldalra „lapos háromszög-típusú” hatszög ($AB \sim \frac{s}{2}$), a másik a „lapos téglalap-típusú” hatszög ($AF = BC \sim \frac{s}{2}$).

G23.5. Az egyenlőtlenség szorzattá alakítható: $(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0$.

Vektorok

G24.1. Dolgozhatunk koordinátageometriai eszközökkel: ekkor érdemes a beírt kör középpontjában választani az origót.

Másik megoldási lehetőség vektorok alkalmazása.

G24.2. Alkalmazzuk a vektorok skaláris szorzatát!

G24.3. a) Észrevehetjük, hogy a H pont körüli 90°-os elforgatás pl. $\overrightarrow{BC}$ -t $\overrightarrow{HA_1}$ -be viszi.
b) Az a)-beli egyenlőség éppen a súlypont-tulajdonságot jelenti.

G24.4. Az egyenletet átalakítva $\overrightarrow{XC}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}) = 0$.

Megjegyzés:

Mely X pontra teljesül az egyenlet, ha X az AB szakaszon kívül is lehet?

G24.5. Legyen AB és CD metszéspontja E, AD és BC metszéspontja F, D és AC távolsága h, B és AC távolsága k. Ekkor területek segítségével megmutatható, hogy helyvektorokkal felírva $\mathbf{p_1} = \frac{k+h}{2k}\mathbf{c} + \frac{k-h}{2k}\mathbf{e}$. A megfelelő $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$ és $\mathbf{p_4}$ vektorok felírása után mutassuk meg, hogy $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_4}$ párhuzamosak (egymás számszorosai), a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok szimmetrikus helyzete miatt ebből már következik az állítás.

Geometriai trigonometria 1.

G25.1. Legyen a CH magasság talppontja az AB oldalon D, s írjuk fel az így kapott derékszögű háromszögekben a hegyesszögek szögfüggvényeit.

Más megoldási lehetőség:

Legyen BE a háromszög köré írt kör átmérője, s mutassuk meg, hogy AHCE paralelogramma.

G25.2. AB = y, CD = x bevezetésével egyrészt xy = 2; másrészt ha felírjuk a koszinusz-tételt az ABC háromszög BC oldalára, a kapott negyedfokú egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van.

Eredmény:

CD = $\sqrt[3]{2}$.

G25.3. Legyen pl. az A csúcsból húzott magasság talppontja D. Mutassuk meg, hogy az AEDF húrnégyszögben AEF és ABC háromszögek hasonlók, s mivel az AEF háromszög köré írt kör átmérője AD, megvan a hasonlóság aránya.

Második megoldás:

Dolgozhatunk szögfüggvényekkel is. Az általános szinusz-tétel segítségével EF = $2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

G25.4. Mutassuk meg, hogy pl. QB = $\frac{BC}{2\cos\alpha}$ (innen megkaptuk a kerületet), majd alkalmazzuk az általános szinusz-tételt.

Eredmény:

$\mathrm{tg}ABC\angle + \mathrm{tg}BCA\angle + \mathrm{tg}CAB\angle = \frac{k}{2R}$.

G25.5. Mutassuk meg, hogy hegyesszögű háromszögben a $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ függvény konkáv, s alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenséget.
Egyenlőség a szabályos háromszögben lép fel.

Geometriai trigonometria 2.

G26.1. Bocsássunk D-ből, ill. E-ből merőlegeseket a szemközti szárakra, ezen merőlegesek talppontjai N és M; valamint húzzunk F-ből merőlegeseket a DN, ill. EM szakaszokra, ezen merőlegesek talppontjai F_1, ill. F_2. Az FF_1D és EF_2F háromszögek hasonlóságából az állítás már következik.

Második megoldás:

Az ADFE húrnégyszögben alkalmazhatjuk az általános szinusz-tételt és a koszinusz-tételt.

G26.2. Írjuk fel a szinusz-tételt az ACD és ABD háromszögekben az AD, ill. az AB = CD oldalakra.

Eredmény:

$\alpha = 72°$.

G26.3. Alkalmazzuk a szinusz-tételt az API, ill. AQI háromszögekben!

Eredmény:

Mivel AB $\neq$ AC, ezért A$\angle$ = 60°.

G26.4. A CH magasság talppontját Q-val, az AH magasság talppontját R-rel, az AB oldal felezőpontját P-vel jelölve CHT és CQP, valamint ABR és AHQ háromszögek hasonlóak.

G26.5. Alkalmazzuk a b) egyenletben az addíciós tételeket, majd a színusz-tétel segítségével térjünk át az oldalakról a szögekre.

Térgeometria

G27.1. Legyen az AE és CD egyenesek metszéspontja F. A síkmetszet további csúcsait FM és CC_1 metszéspontja G, valamint FM és DD_1 metszéspontja H adják. A síkmetszet szerkesztése után alkalmazzunk hasonlóságot! (A síkmetszet trapéz, szárai $\frac{\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{\sqrt{10}}{3}$, alapjai $\frac{\sqrt{13}}{6}$ és $\frac{\sqrt{13}}{3}$ hosszúak; a trapéz területe az AFH háromszög területének $\frac{3}{4}$ része.)

Eredmény:

$t \approx 0{,}94$.

G27.2. Legyen az AB szakasz felezőpontja F, s mutassuk meg Pitagorasz tételével, hogy $O_1F^2 - O_2F^2 = O_1P^2 - O_2P^2$, innen PF és O_1O_2 merőlegesek.

G27.3. Az AC és BD átlók M metszéspontja a gúla S csúcsból induló magasságán van, és ez a magasság felezi az ASD és BSD egyforma szögeket. Forgassuk ezt a két háromszöget egymásra, és bizonyítsuk az így adódó síkgeometriai állítást.

Megjegyzés:

Lényegében így szólt az 1957. évi OTV második fordulójában kitűzött 3. feladat is.

G27.4. Tekintsük az AB szakaszra O középponttal emelt Thalesz-gömböt, legyen C tükörképe O-ra E; ekkor $\cos DBE\angle < \cos DCE\angle$, $DBE\angle > DCE\angle$ a feladat állítása. Ennek bizonyítására fejezzük ki a színusz-tétellel a háromszögek köré írt körök sugarait.

G27.5. a) Legyen $\overrightarrow{DA} = p\overrightarrow{DP}$ és $\overrightarrow{CB} = q\overrightarrow{CQ}$. Vezessük le $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}$ segítségével, hogy $\overrightarrow{NM} = \frac{p}{2}\overrightarrow{NP} + \frac{q}{2}\overrightarrow{NQ} + \frac{p-q}{4}\overrightarrow{DC}$; mivel M, N, P, Q egysíkúak, innen p = q következik.

b) Vegyük fel a térbeli koordináta-rendszert, s alkalmazzunk vektoriális szorzatokat. Pl.:
$A\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},0,0\right)$, $C\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$. Ekkor D, M, N felírható, s pl.

$$\vec{P} = \left(0,-\frac{a}{2},0\right) + t\left(\frac{a}{2\sqrt{3}},\frac{a}{2},\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}\right) \text{ és } \vec{Q} = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2},0,0\right) + s\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2},0\right).$$

$\overrightarrow{NQ} \cdot \left(\overrightarrow{NM} X \overrightarrow{MP} \right) = 0$ alapján s = t; a területre felírható T(MNPQ) = $\frac{1}{2}\left(\left| \overrightarrow{MQ} X \overrightarrow{NQ} \right| + \left| \overrightarrow{MP} X \overrightarrow{NP} \right| \right)$ alapján a minimális arány $t = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$ esetén adódik.