Kombinatorika 1.

K1.1. Az összehasonlítások folyamán a második legnehezebb kőnél csak az első lehet nehezebb.

Eredmény:

A „kieséses” rendszerű sorsolásnál 31 összehasonlításból megtalálható a legnehezebb, s a vele összehasonlított 4 kő között van a második legnehezebb, amelyet 3 további méréssel megtalálhatunk.

K1.2. Jelöljük a súlyokat 1, 2, … ,18-cal, s mérjük meg először a 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15 súlyokat. A második mérés legyen
a) 800 g esetén 1, 2, 3, 8, 9;
b) 799 g esetén 2, 3, 4, 7, 8, 12;
c) 798 g esetén 3, 4, 5, 6, 7, 12;
d) 797 g esetén 4, 5, 6, 12.

K1.3. Mivel a harmadik tényező minden tagja n-edfokú, az első két tényező szorzatából azokat a tagokat vegyük figyelembe, amelyek szorzata szintén n-edfokú.

Eredmény:

A Pascal-háromszög n. sorában lévő számok köbösszege.

K1.4. Mutassuk meg, hogy bármely 3x1-es (és 1x3-as) rácstéglalap pontosan egy fekete mezőt tartalmaz.

Eredmény:

33 fekete mező van bármely 9x11-es rácstéglalapban.

K1.5. Az axb méretű táblázatban legyen S_a a résztéglalapok a-irányú hosszainak összege, S_b hasonlóan a másik irányú összeg, ekkor a keresett területösszeg S_aS_b. Adott k-ra az a-irányban $a - k + 1$ darab k-hosszúságú oldal van. Innen $S_a = 1\cdot a + 2\cdot(a-1) + 3\cdot(a-2) + \dots + a\cdot 1 = \binom{a+2}{3}$, s a keresett területösszeg $S_aS_b = \binom{a+2}{3}\cdot\binom{b+2}{3}$.

Kombinatorika 2.

K2.1. a) Vizsgáljuk meg az összeget mod 4 szempontjából.
b) Mennyi az a legkisebb összeg, amit A kaphatott?

K2.2. $10^{33} < a_{100} < 10^{34}$.

Eredmény:

31.

K2.3. Pl. az egyik 7x11-es lap felülete nem fedhető le hézagmentesen, mert a téglák oldallapjainak területei 3-mal oszthatók.

Megjegyzés:

Megmutatható, hogy a maximumként adódó 75 darab tégla viszont elhelyezhető.

K2.4. Tegyük fel, hogy az egyik tanuló (nevezzük T-nek) k darab feladatot oldott meg. Ekkor egyrészt mindegyik feladathoz két további tanulót találhatunk, akik ezeket megoldották, ami összesen 2k tanulót jelent T-n kívül; másrészt a 8 tanuló mindegyike pontosan egy feladatot oldott meg T megoldott példái közül. Tehát $2k = 8$, $k = 4$. Ha n feladatot tűztek ki, akkor $3 \cdot n = 9 \cdot 4$.

Eredmény:

$n = 12$.

Második megoldás:

Számoljuk össze kétféleképpen a (T_1, T_2, F) típusú rendezett hármasokat! (T_1, T_2 azt a két tanulót jelöli ki, akik megoldották az F feladatot.) Egyrészt a hármasok száma $9 \cdot 8 = 72$ (bármely két tanuló pontosan egy közös feladatot oldott meg), másrészt bármely F feladatot 6-szor soroltunk fel a hármasokban (mivel minden feladatot pontosan 3 tanuló oldott meg, s közülük 6-féleképpen rendezhetünk sorba 2-t). tehát: $9 \cdot 8 = n \cdot 6$.

Megjegyzés:

A feladat hátterében a következő kódolási probléma áll:

Egy 9xn-es táblázat néhány mezőjébe 1-est írtunk. Tudjuk, hogy
– minden oszlopban pontosan 3 darab 1-es van;
– bármely két sort is tekintjük, pontosan egy olyan oszlopot találunk, amelyben mindkét sorban 1-es áll.
Mennyi n értéke? (Hány oszlopa van a táblázatnak?)

K2.5. Legyen a bal alsó (1, 1) koordinátájú (első oszlop, első sor) mező fekete színű, legyen A a (páros, páros) koordinátájú mezőkön lévő korongok száma, B a (páratlan, páratlan) koordinátájú mezőkön levőké, C pedig a (páratlan, páros) koordinátájú mezőkön levő korongok száma. Ekkor a fekete mezőkön $A + B = (A + C) + (B + C) - 2C$ korong van.

Skatulya-elv 1.

K3.1. Ha k darab piros tollat használ egy harcos ($0 \le k \le 5$), a sárga tollak lerakása után ezeket $10 - k$ helyre teheti, s ezt $\binom{10-k}{k}$ módon végezheti. Az összes lehetőség:

$$\binom{10}{0}+\binom{9}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{5}{5} = 89.$$

Eredmény:

Nem lehet minden lándzsa különböző.

Megjegyzés:

Más megoldási lehetőség pl. rekurzió alkalmazása. Ekkor észrevehetjük, hogy megoldásként a Fibonacci-számok jelennek meg.

K3.2. Legyen $|M| = n$. Az A_i halmazok elemszámát összeadva $\frac{4000n}{3}$-at kapunk (egy-egy elemet több részhalmazban is számoltunk). Ha minden elem legfeljebb 1333 részhalmazban fordulna elő, $1333n < \frac{4000n}{3}$ lenne.

K3.3. Az egyes prímek kitevőinek paritását tekintve $2^5 = 32$ lehetőség adódik. Skatulya-elv.

K3.4. Vegyük észre, hogy ha egy vonal áthalad egy dominón, akkor át kell haladnia még egy másik dominón is.

Megjegyzés:

Álljon itt őseinkre emlékezve, szó szerint idézve az alábbi feladat:

1963. évi OTV matematikaverseny II. fordulójának (döntő) 3/3. feladata:

Egy 6x6 mezőből álló „sakktáblát” hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtük le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté.

K3.5. a) Legyenek a mod 6 maradékok 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1.

b) Nincs ilyen halmaz. A skatulya-elv miatt bármely 3 elemből kiválaszthatunk 2-t, melyek összege páros, és bármely 5 elemből kiválaszthatunk 3-t, melyek összege osztható 3-mal.Így találunk 5 párt, melyek összege páros, s ebből 3 pár összege 3-mal is osztható.

Megjegyzés:

Az Erdős-Ginzburg-Ziv tétel szerint $2n - 1$ egész szám közül kiválasztható n darab, amelyek összege osztható 5-tel.

Skatulya-elv 2.

K4.1. A személyek távolsága a saját helyüktől 1, 2, … , 11 ülésnyire lehet.

K4.2. Jelölje A_i az i. napig olvasott összórányi mennyiséget, ekkor $1 \le A_1 < A_2 < \ldots < A_{37} \le 73$, valamint $14 \le A_1 + 13 < A_2 + 13 < \ldots < A_{37} + 13 \le 73$. Kaptuk, hogy 1 és 73 között 74 egész számunk van, alkalmazzuk a skatulya-elvet.

K4.3. A skatulya-elv miatt van két olyan rácspont a sokszög belsejében, amelyek mindkét koordinátája azonos maradékot ad mod m.

K4.4. Ha bármely két résztvevő beszélne közös nyelven, 36 párhoz 27 nyelv tartozna. A skatulya-elvből következik az állítás.
Ha pl. A és B nem beszél közös nyelven, együtt legfeljebb 6 idegen nyelvet tudnak. Mivel 7 további résztvevő van, alkalmazzuk ismét a skatulya-elvet.

Megjegyzés:

A feladat megfogalmazható kódolási problémaként és halmazrendszerek témakörében is.

K4.5. A skatulya-elv miatt a különbségsorozat első $10^6 + 1$ tagja között van két egyforma maradékú mod 1000, ezért $F_{i+1} - F_{j+1} \equiv F_i - F_j \equiv 0$. A rekurzív összefüggést felhasználva mutassuk meg, hogy $F_{i-1} - F_{j-1}$ is azonos maradékot ad, s az eljárást folytatva $F_{i-j} - F_0$ osztható 1000-rel.

Skatulya-elv 3.

K5.1. $0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 32 + 32 + 32 + 33 = 1617 > 1600$.

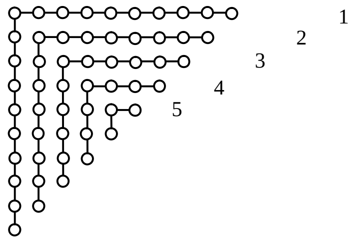
K5.2. Mutassuk meg, hogy kell lennie 4 törpének, akik mindegyikénél legalább 48 kulcs van. Ekkor a másik három törpénél összesen legalább 144 kulcsnak kell lennie; együttesen $4 \cdot 48 + 144 = 336$.

K5.3. Alkalmazzuk a skatulya-elvet az 1997^k típusú számokra: ezek között lesznek olyanok, amelyek utolsó 1997 számjegye azonos.

Eredmény:

Vannak ilyen számok.

K5.4. Az (x; y) oldalú téglalapok közül elég az $x \le y$ típusokat vizsgálni; a derékszögű koordinátarendszerben a téglalapoknak megfelelő rácspontok egy 100x100-as táblázat felső részháromszögéből kerülnek ki. Soroljuk 50 osztályba a téglalapokat pl. az alábbi ábrán látható módon (az ábra a legfeljebb 10x10-es méretű téglalapok 5 osztályba sorolását szemlélteti):



A skatulya-elv miatt lesz három téglalap valamelyik osztályban.

K5.5. Minden tíztagú összeg 55 és 955 között van, s 1023 nem-üres részhalmaz létezik. Skatulya-elv.

Egzisztencia és konstrukció a kombinatorikában 1.

K6.1. 6 csillag nem elég: ekkor két oszlopban legfeljebb 1 – 1 csillag van, s a másik két oszlopot elvéve eltüntethetjük a csillagokat. 7 csillagra nem nehéz konstrukciót találni.

K6.2. Az első két helyiérték legfeljebb $3 \cdot 3 = 9$-féle lehet, s ez elérhető.

Eredmény:

1111, 1222, 1333, 2123, 2231, 2312, 3132, 3213, 3321.

K6.3. Használjunk kettes számrendszert!

Eredmény:

A pálcák hossza 1, 2, 4, 8, 16, 32 cm.

K6.4. a) Ha egy sorban (vagy oszlopban) pl. x fehér korong van, akkor az összetartozó párok száma $x(8 - x)$, s ez $x = 4$ esetén maximális.

b) Legyen két szomszédos oszlopban p és q ($p \leq q$) fehér korong. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a p fehér korong közül kicserélünk egyet a másik oszlop $(8 - q)$ valamelyik fekete korongjával.

Eredmény:

a) 256, a sakktáblaszerű elhelyezés pl.

b) 128, pl. 4 – 4 egyszínű oszloppal.

K6.5. 41 színnel a kívánt színezés elvégezhető (az ábrán a 41. színt nem jelöltük).

1	2	3	4						
	5	6	7	8					

…

38	39	40							37

A 42 szín már nem érhető el.
Mivel $9 \cdot 4 + 5 = 41$, 41-nél több szín esetén legalább két sorban 5-5 színt kell felhasználnunk. Ekkor viszont minden oszlopban legfeljebb 3-3 további szín jöhet szóba, s $10 + 10 \cdot 3 < 42$.

Eredmény:

41.

Egzisztencia és konstrukció a kombinatorikában 2.

K7.1. Négyet könnyű kivágni, többet nem lehet. Ehhez tekintsük a középső 4x4-es résztáblázatot, ebbe kellene az öt kereszt középső mezőjét elhelyezni, de könnyen látható (pl. további 2x2-es részekre bontva a 4x4-es négyzetet), hogy ez nem lehetséges.

K7.2. Ha n páratlan, akkor megfelelő szabályos csillagsokszög konstruálható. Páros n-re vizsgáljuk meg, hogy két pontot összekötő szakasz két oldalán hogyan helyezkednek el a pontok.

Eredmény:

Akkor és csak akkor létezik megfelelő töröttvonal, ha n páratlan.

K7.3. Három pontot felvehetünk három csúcsban, több pont felvétele nem lehetséges. Ehhez azt bizonyítsuk be, hogy négy ilyen pontnak a hatszög körülírt körén négyzetet kellene alkotnia.

K7.4. a) Legyen a három halmaz a három mod 3-beli maradékosztály.
b) Tekintsük a mod 4 maradékosztályokat!
c) tegyük fel, hogy megadható 3 megfelelő részhalmaz. Ekkor: 1, 3, 6 különböző halmazokban vannak; 1, 4, 6 szintén; ezért 3 és 4 azonos halmazban van. Hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk a 2, 4, 7, ill. 2, 5, 7 számokra, így 4, 5 azonos halmazban van. S mivel 3, 5, 8 különböző halmazban kell, hogy legyenek, ellentmondást kaptunk.

K7.5. Jelöljük a csúcsok, élek, lapok számát rendre C, É, L-lel; ebből legyen a háromszög lapok száma H, a többi T. Ekkor $C + L \geq E + 2$ (egyszerű poliédereknél egyenlőség van), az élekre $2E \geq 3H + 4T$; innen $2C + 2L - 4 \geq 4L - H$. A feltétel szerint $L - C \geq 1$, ebből $H \geq 6$ következik. Ha egymásba fordítunk pl. két egybevágó alapú tetraédert, elérhető ez az érték.

Eredmény:

A lapok száma legalább 6.

Algoritmusok 1.

K8.1. Visszafelé okoskodva 9 lépésben érhető el az 1, tehát az első lépésben $1 \to 1$ lépést végezzük.

K8.2. Az $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}=\frac{5}{6^2}$, $\frac{5}{6^2}-\frac{1}{4^2}=\frac{11}{12^2}$, $\frac{11}{12^2}-\frac{1}{5^2}=\frac{131}{60^2}$, $\frac{131}{60^2}-\frac{1}{6^2}=\frac{31}{60^2}$ stb. algoritmus $\frac{31}{60^2}$ utolsó tagját 9-cel bővítve $\frac{279}{180^2}=\frac{225+25+16+9+4}{180^2}$.

Eredmény:

Igen, előállítható: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{45^2}+\frac{1}{60^2}+\frac{1}{90^2}$.

K8.3. A végállapot nem érhető el. Néhány bizonyítás:

a) Ha sakktáblaszerűen színezünk, kezdetben 5 fekete és 4 fehér mezőn állnak a korongok, a kívánt végállapotban 4 fekete és 5 fehér mező van, s egy-egy lépés színtartó.
b) Színezhetjük pl. vízszintesen minden második sávot.
c) Írjuk minden mezőre azt a számot, ahányadik sorban áll. Kezdetben 18 a lefedett mezők összege, a végállapotban 63 lenne, de a lépések megtartják a mezők paritását.

K8.4. Feladat:

Ha az 1, 3, 5, 7. sorokat beszínezzük, akkor látható, hogy 3 darab függőleges irányú egységnyi lépésre mindenféleképpen szükség van. Függőleges irányban a megtett lépések együttes hossza 45, tehát 24 lépés elvileg elég (21 darab függőleges irányban 2-hosszú és 3 darab 1-hosszú), s erre adható konstrukció.

K8.5. a) Az A, B, C betűknek feleltessük meg a 0, 1, 2 maradékokat mod 3 esetén; ekkor a képzési szabály szerint X_iX_{i+1} alá $-X_i-X_{i+1}$ kerül. Ezután mutassuk meg, hogy az utolsó sorba kerülő szám összefüggésbe hozható a binomiális együtthatókkal, s mivel $\binom{9}{k}$ csak k = 0 és k = 9 esetén nem osztható 3-mal, az utolsó szám $-X_1-X_{10}$ lesz.

b) Hasonlóan mutatható meg, hogy $n \equiv 0 \pmod 3$ esetén a helyzet ugyanez.

Algoritmusok 2.

K9.1. Nem érhető el. Az $\underline{abcd}$ alakú számban az (a + c) és (b + d) összegek egyszerre változnak a műveletek során.

K9.2. Mutassuk meg, hogy a táblán lévő három szám négyzetösszege állandó.

Eredmény:

Nem lehetséges.

K9.3. Először mutassuk meg, hogy 98 lépés szükséges (már a kerületen lévő 4*97 mező megfelelő színezéséhez is), majd erre adjunk konstrukciót.

Megjegyzés:

Általában is megmutatható, hogy nxn-es sakktáblán n – 1 lépés mindig kell (már csak a kerületen lévő 4·(n – 1) mező megfelelő színezéséhez is), s ha n páros, akkor még egy további lépés szükséges.

Feladat:

Ha az nxn-es tábla tetszőlegesen színezett, akkor vajon hány lépésre van szükség?

K9.4. Legyen az (x_k), ill. (y_k) sorozat a k. lépésben elérhető maximális, ill. minimális érték, ha a sin, ill. cos függvényeket alkalmazzuk. Mutassuk meg, hogy $x_{k+1} = \cos y_k$ és $y_{k+1} = \sin y_k$. Innen $x_{2001} = \cos y_{2000} = \cos(\sin y_{1999})$ stb.

Eredmény:

cos(sin(sin…(sin…(cos1))…), ahol 1999-szer hívjuk meg a színusz-függvényt.

K9.5. a) Az 1-típusú lépésekből csak véges sok hajtható végre; a 2-es típusú lépések esetén a $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i$ összeg szigorúan csökkenő. (Itt a_i jelenti az i. mezőben lévő érmék számát.)

b) Az $f_1 = f_2 = 1$ kezdetű Fibonacci-sorozat elemeire teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$. Az S = $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ összeg invariáns mennyiség mindkét fajta műveletre, így a kezdeti $f_{n+2} - 1$ összegnél nagyobbat kapnánk, ha az (n + 1). négyzetbe érme kerülne.

Kétszemélyes játékok

K10.1. Ha n páros, a kezdő játékos két egyenlő részre osztással a szimmetriára törekszik; ha n páratlan, akkor három részre oszt, 1, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ módon.

Eredmény:

A kezdő nyer.

K10.2. Színezzük be a táblát sakktáblaszerűen, s Peter alkalmazza a szimmetrikus lépéseket.

Eredmény:

Mary nyer, ha n páratlan, egyébként Peter.

K10.3. Ha n páratlan, a játék hasonló az előzőhöz.

Ha n páros, akkor Peter egyik bábuját Maryével azonos sorba, másikat Maryével azonos oszlopba viszi.

Eredmény:

Mary nyer, ha n páratlan, egyébként Peter.

K10.4. A kezdő nyerhet, pl. a $c = 1$ választással. Ha a második b-t helyettesíti, legyen $a = \frac{b^2}{4}$; ha a-t helyettesíti, legyen $b = \frac{a^2}{4}$. Az első esetben $x^3 + \frac{b^2}{4}x^2 + bx + 1 = x^3 + (\frac{b}{2}x + 1)^2$, a második esetben $x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{4}x + 1 = x(x + \frac{a}{2})^2 + 1$.

K10.5. Mivel öt páratlan kitevőjű tag van, a kezdő negyedik lépése után $f(x) = g(x) + ax^m + bx^n$ alakú polinomot állíthat elő második, ahol pl. m páratlan (a és b kitöltetlen). Vegyük észre, hogy $f(1) + f(-1)$ nem függ a-tól, ezért ha n páros, akkor második olyan b-t választ, amelyre $f(1) + f(-1) = 0$. Ha n páratlan, akkor $2^m f(1) + f(-2)$ független a-tól, ezért második olyan b-t választ, amelyre $2^m f(1) + f(-2) = 0$.

Kombinatorikai rekurziók 1.

K11.1. A sorozat rekurzív alakja $t_1 = 1$, $t_{n+1} = t_n + 6n$ $(n \geq 1)$. Az explicit alak $t_n = 3n^2 - 3n + 1$, innen $n^2 - n - 56 = 100m$ a megoldandó diofantikus egyenlet. Innen a diszkrimináns vizsgálatával folytathatjuk. Az $n = 20M + 8$, ill. az $n = 20M + 13$ megoldásokból a 69. tag $20*34 + 1$ miatt $20M + 8$ alakú.

Eredmény:

$t_{688} = 1417969$.

K11.2. Jelentse F(6) a kézfogások számát; mutassuk meg, hogy érvényes az $F(6) = 2F(5) + 2F(4)F(1) + 2F(3)F(2)$ rekurzió.

Eredmény:

$F(6) = 132$.

Megjegyzés:

A feladat a Catalan-számokkal hozható kapcsolatba, lásd pl. Dörrie: Diadalmas matematika, Gondolat, 1965 c. könyvét

K11.3. Legyen S_n az n. diák után a táblán lévő számok összege ($S_0 = 2$), s mutassuk meg, hogy $S_{k+1} = S_k + 2S_k - 2$.

Eredmény:

$S_n = 3^n + 1$, bizonyítsunk teljes indukcióval.

K11.4. Jelöljük r_n-nel a felső (vagy alsó) sor n. pontjába vezető utak számát, s hasonlóan m_n-nel a középső sor n. pontjába vezető utak számát. Ekkor $r_0 = m_0 = 0$ és

$r_n = r_{n-1} + m_n$,
$m_n = 2r_{n-1} + m_{n-1}$.

A szimultán rekurziókról egyváltozós rekurzióra térhetünk át: $m_{n+1} - 4m_n + m_{n-1} = 0$.

Eredmény:

$$m_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

K11.5. Legyen a keresett permutációk száma p_n. (Nyilván $p_1 = 0$ és $p_2 = 1$.) Vizsgáljuk meg n helyzetét a permutációban: ha $a_n = n$, akkor p_{n-1} permutációt kapunk, míg ha $a_i = n$, akkor a megelőző i – 1 és a következő n – i elem sorrendje kötött. Ezért

$$p_n = p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-i}{i-1} = p_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Eredmény:

$p_n = 2^n - n - 1$.

Kombinatorikai rekurziók 2.

K12.1. a) Az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, $n > 3$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ rekurzió írja le a folyamatot.

b) Jelöljük b_n-nel a 6. lépcsőt kihagyó utak számát. Ekkor $b_n = a_n$, ha $n < 6$; $b_6 = 0$; b_7-től kezdve ismét alkalmazhatjuk a $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ rekurziót.

Eredmény:

a) $a_{10} = 274$.

b) $b_{10} = 106$.

K12.2. Leszámolhatjuk a megfelelő színezéseket pl. az alkalmazott színek száma szerint.

Más megoldási lehetőség:

Jelentse x_n a megfelelő n-hosszú színezéseket (a szomszédos körcikkek mellett az 1. és n. is különböző színű), ekkor $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$, $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, ahonnan $x_n = (-1)^n \cdot 3 + 3^n$.

Eredmény:

$\frac{x_7}{7} = 312.$

K12.3. Jelölje a_{ijk}^{n} azon n-hosszú 0-1 sorozatok számát, amelyek ijk-ra végződnek és 0101 nem szerepel bennük. Ekkor $a_{ijk}^{n+1} = a_{0ij}^{n} + a_{1ij}^{n}$, ha ijk $\neq$ 101, és $a_{101}^{n+1} = a_{110}^{n}$. Felírható, hogy $A_{n+1} = 2A_n - a_{010}^{n}$. Ezután mutassuk meg, hogy $A_n \equiv A_{n-6}$ (mod 2).

Eredmény:

$A_{2001} \equiv 0$ (mod 2).

K12.4. Pl. a csúcsok váltakozó színezéséből következik, hogy n csak páros lehet.
Számozzuk a csúcsokat 1-től 8-ig (A = 1, B = 5), $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_8^{(k)})$ jelentse azon lehetőségek számát, ahányféleképpen a robot k perc alatt eljuthat a csúcsokba; majd mutassuk meg m szerinti teljes indukcióval, hogy $a^{(2m)} = (2^{2m-2} + 2^{m-1}, 0, 2^{2m-2}, 0, 2^{2m-2} - 2^{m-1}, 0, 2^{2m-2}, 0)$.

Eredmény:

Az utak száma $2^{k-1}(2^{k-1} - 1)$.

K12.5. A sorozat néhány kezdőtagja 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, … Mutassuk meg, hogy $\{u_n\}$ pontosan azokat a természetes számokat tartalmazza, amelyek 3-as számrendszerbeli alakjában nincs 2-es számjegy (ez abból következik, hogy két ilyen tulajdonságú különböző szám összegében lesz 1-es számjegy, s így nem lehet egyenlő egy harmdik 0-1 típusú szám kétszeresével). Ezekez a számokat 2-es számrendszerben elképzelve, u_{100} éppen annyi lesz, amennyi 100 2-es számrendszerben felírt értéke 3-as számrendszerben.

Eredmény:

1100100_2, ezért $u_{100} = 1100100_2 = 981$.

Kombinatorikus számelmélet 1.

K13.1. A kitöltés nem lehetséges; páros számú 2-nél nagyobb prímszám összege nem lehet prím.

K13.2. Ha ciklikusan összeadjuk a szomszédos számhármasokat, akkor a teljes összeg háromszorosát kapjuk, vagyis 69750-et; míg ha minden összeg legfeljebb 2300 lenne, csak $30 \cdot 2300 = 69000$-et kapnánk.

K13.3. Mutassuk meg, hogy a középső mező az ú.n. bűvös állandó harmada, majd vizsgáljuk meg, hogy az egyes számok hány összegben szerepelnek.

K13.4. Ha az a_i-k között 4 egész és egy nem-egész szám van, akkor N = 6. Használjuk fel a következőket:
a) ha $\{a\} \neq \{b\}$, akkor a + c és b + c közül legfeljebb az egyik lehet egész;
b) ha a = b, akkor a + b pontosan akkor egész, ha $\{a\} = 0$ vagy $\{a\} = 0,5$;

c) ha $\{a\} \neq \{b\}$ és $a + b$ egész, akkor sem $\{a\}$, sem $\{b\}$ nem lehet sem 0, sem 0,5;
majd mutassuk meg, hogy több, mint 6 egész összeg csak akkor lehetne, ha $\{a_1\} = \{a_2\} = \{a_3\} = \{a_4\} = \{a_5\}$.

Eredmény:

N = 6.

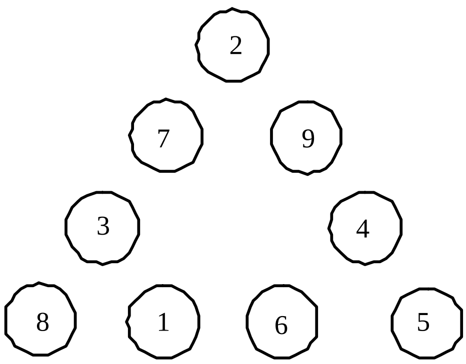
K13.5. Legyen a számok összege s, a négyzetszámok összege S, a sarkokon lévő számok $x < y < z$. Ekkor az alábbi egyenletrendszer adódik:

$3s = 45 + x + y + z$,
$3S = 285 + x^2 + y^2 + z^2$.

Mutassuk meg, hogy $x \equiv y \equiv z \pmod 3$, s az így kapott három esetet (t.i. $(x, y, z) = (3, 6, 9)$, $(1, 4, 7)$, $(2, 5, 8)$) rendre vizsgáljuk meg az egyik oldal két fennmaradó számának segítségével.

Eredmény:

Lényegében egyetlen megoldást kapunk:



Az ábra elforgatottjaival együtt a megoldásszám 48.

Kombinatorikus számelmélet 2.

K14.1. Egy-egy oszlopban a számok összege $s = \frac{3(n+1)}{2}$, ezért $n = 2m + 1$ lehet csak, s ekkor $s = 3(m + 1)$. Ezután mutassuk meg, hogy az 1 a második sorban az $(m + 1)$. vagy $(m + 2)$. oszlopban lehet csak.

Eredmény:

Kétféle kitöltés lehetséges.

K14.2. Tekintsük a nemnegatív számok közül a legnagyobb x-et; mutassuk meg, hogy ekkor a két szomszéd csak x és 0 lehet.

Eredmény:

Ha n 3 többszöröse.

K14.3. Az $\left[\frac{N}{3}\right]=\left[\frac{N}{5}\right]+\left[\frac{N}{7}\right]-\left[\frac{N}{35}\right]$ egyenlet legnagyobb egész megoldását becslésekkel kereshetjük meg: $\frac{N-2}{3}+\frac{N-34}{35}\le\frac{N}{5}+\frac{N}{7}$, ahonnan N ≤ 86. Ugyanakkor ha N ≥ 70, akkor $\frac{N-2}{3}+\frac{N-16}{35}\le\frac{N}{5}+\frac{N}{7}$-ből N ≤ 59, tehát N legfeljebb 69 lehet.

Eredmény:

N = 65.

K14.4. Mutassuk meg, hogy az a_1, $a_1 + a_2$, … , $a_0 + a_2 + … + a_{n-1}$ számok mind különböző (nemzérus) maradékot adnak mod n.

K14.5. a) Feltehetjük, hogy s és t relatív prímek. Legyen $s^2 + t^2 = k$, ekkor m számú lépés után (s + mt, t – ms) párt kapjuk, és s(s + mt) + t(t – ms) = k. Van olyan m’, amelyre m’t ≡ – s (mod k), ekkor m’s ≡ t (mod k), s ekkor s + m’t és t – m’s nem relatív prímek.

b) Ha s és t legnagyobb közös osztója d, tekintsük az $s'=\frac{s}{d}$, $t'=\frac{t}{d}$ számokat, s válasszuk x, y-t úgy, hogy d = sx + ty.

Kombinatorikus számelmélet 3.

K15.1. Legyen az első jegy x. A maradék 9 jegy összege egyrészt 10 – x, másrészt 9 – x nemzérus jegy van közöttük, s ez csak úgy lehet, ha egy 2-es és 8 – x darab 1-es van.

Eredmény:

6210001000.

K15.2. Nyilván 4-nél nagyobb számok nem szerepelhetnek a maximális szorzatban; a 4-esek pedig kicserélhetők két 2-esre. Mivel 3·3 > 2·2·2, egy vagy két darab 2-es lehet a felbontásban.

Eredmény:

Ha n = 3k + 1 alakú (k > 0), akkor $3^{k-1}\cdot 2^2$ a maximális szorzat; ha n = 3k + 2 alakú, akkor $3^k\cdot 2$.

K15.3. Az $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ választással $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \dots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \dots < a_{n-1} + a_n$, így legalább 2n – 3 különböző összeg van. Ugyanakkor pl. $a_i = i$ esetén 1 + 2 = 3 a minimális és (n + 1) + n = 2n + 1 a maximális összeg.

Eredmény:

A legkisebb érték m = 2n – 3.

K15.4. A permutációk ciklusainak legkisebb közös többszöröse 30, ezért a ciklusok hossza 2, 3, 5 lehet csak.

Eredmény:

$\binom{10}{2}\binom{8}{3}\cdot 2\cdot 4! = 120960$.

K15.5. Legyen D azon 2-es számrendszerbeli legfeljebb 16-jegyű számok halmaza, amelyek pontosan 8 darab 1-es számjegyet tartalmaznak. $|D| = \binom{16}{8} > 10000$, tehát az M-beli elemeket $n_1, n_2, \dots, n_{10000}$ D-beli elemekkel reprezentálhatjuk. Egy $k \in M$ szám pontosan akkor legyen benne az M_j részhalmazban (j = 1, 2, … , 16), ha pl. jobbról a j. számjegye 1.

Kombinatorikus számelmélet 4.

K16.1. Legyen az $a_1, a_2, \dots, a_{1998}$ számok összege M. Az $M - a_1, M - a_2, \dots, M - a_{1998}$ számok összegzéséből M = 0 adódik, az új halmaz elemei $-a_1, -a_2, \dots, -a_{1998}$. Ezután mutassuk meg, hogy 0 nem lehet a számok között, s így 999 darab (a, – a) típusú számpárunk van.

K16.2. Jelöljük a körvonalra írt számokat $a_1, a_2, \dots, a_{60}$-nal. $a_1 + a_8$ és $a_8 + a_{15}$ osztható 7-tel, ezért a_1 és a_{15} maradéka 7-tel osztva ugyanaz. Hasonlóan ugyanaz a maradéka az a_{29}, a_{43}, a_{57}, a_{11}, a_{25}, a_{39}, a_{53}, a_7 stb. számoknak is, ami ellentmondás.

Eredmény:

Nem lehetséges.

K16.3. Ha m darab páratlan egész szám van a 7 között, legfeljebb $f(m) = \binom{m}{2} + 2m(7 - m)$ páratlan szám írható fel.

Eredmény:

f(m) maximuma f(4) = f(5) = 30.

K16.4. $n + 1 = w_0 + w_1 + \dots + w_n = 0\cdot w_0 + 1\cdot w_1 + \dots + n\cdot w_n$, innen $w_0 = w_2 + 2\cdot w_3 + 3\cdot w_4 + \dots + (n-1)\cdot w_n$. Ezután vizsgáljunk eseteket $w_0 = 0, 1, 2, \geq 3$ alapján.

Eredmény:

(1, 2, 1, 0), (2, 0, 2, 0), (2, 1, 2, 0, 0), ill. (n – 3, 2, 1, 0, 0, 0, … , 0, 1, 0, 0, 0), ha $n \geq 6$.

K16.5. n = 1-re és n = 3-ra (1), ill. (1, 3, 2) és (3, 1, 2) permutációk megfelelők. Mivel $n \mid 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ezért n páratlan. Legyen tehát $n \geq 5$ páratlan szám. Az $m = \frac{n+1}{2}$ jelöléssel $S_{n-1} = nm - x_n$, innen $x_n \equiv m \pmod{n-1}$, s ez csak úgy lehetséges, ha $x_n = m$. Hasonlóan megmutatható, hogy $x_{n-1} \equiv m \pmod{n-2}$, s ebből következik az $x_n = x_{n-1}$ ellentmondás.

Eredmény:

n = 1-re és n = 3-ra (1), ill. (1, 3, 2) és (3, 1, 2).

Kombinatorikus geometria 1.

K17.1. Igen, lehet. Válasszuk pl. az 1, 2, 5, 15, 17 sorszámú csúcsokat.

Megjegyzés:

A feladat kitűzésében felesleges a kört megadni.

K17.2. Tegyük fel, hogy egy P pontot 6 másikkal kötöttünk össze. Ekkor az így kapott 6 háromszög valamelyikében $P\angle \leq 60°$, s ebben nem húzhatjuk be mindkét P-ből kiinduló oldalt.

K17.3. Ha az i. téglalap oldalai x_i, y_i hosszúak, akkor $x_i^2 + y_i^2 \geq 2x_iy_i$ típusú egyenlőtlenségeket kell összegeznünk.

K17.4. Legyen R_1 egy pont R-ből. Az R_1-hez legközelebbi négy R-beli pont legyen R_2, R_3, R_4, R_5. Az öt pont konvex burka lehet ötszög, négyszög, háromszög; mutassuk meg, hogy egyik esetben sem érhető el a kívánt felosztás.

K17.5. A keresett X_i pont pl. a B középpontú CD sugarú, a C középpontú AB sugarú, valamint az A és D középpontú, AX_i sugarú körök metszéspontjaiban helyezkedhet el. Négy körnek legfeljebb 8 metszéspontja lehet, tehát $n \leq 8$.

Legyenek pl. az ABX_1 és X_1CD háromszögek egybevágóak úgy, hogy $AB = X_1C$, $BX_1 = CD$. A B középpontú BX_1 sugarú és C középpontú CX_1 sugarú körök második metszéspontja, X_2 is megfelelő pont. Ekkor mutassuk meg, hogy AD párhuzamos BC-vel (mindkettő merőleges X_1X_2-re), s innen $n \leq 4$.

Végül adjunk konstrukciót az n = 4 esetre: szabályos hatszög egyik olalegyenesére mindkét irányban felmérjük a hatszög olalának hosszát. Az így kapott nyolc pont megfelelő.

Kombinatorikus geometria 2.

K18.1. Színezzük ki a kocka csúcsait két színnel úgy, hogy az élben szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Ebből látható, hogy a töröttvonal legfeljebb három szomszédos éle lehet lapátló; s mutassuk meg, hogy 6 lapátló nem lehet a töröttvonalban.

Eredmény:

$3+4\sqrt{2}$.

K18.2. Legyen A_1, A_2 a kör átmérőjének két végpontja. Ezután a pitagoraszi számhármasok előállítása segítségével a köríven végtelen sok A_i pontot felvehetünk úgy, hogy A_1A_i racionális legyen, s két ilyen pont távolsága Ptolemaiosz tétele miatt szintén racionális.

K18.3. Vizsgáljuk meg, hogy milyen lehet egy egyenes és egy parabola kölcsönös helyzete; majd vegyünk fel egy olyan egyenest, amely egyik parabola tengelyével sem párhuzamos.

K18.4. Először mutassuk meg, hogy ha a kívánt alakzatnak legalább 3 szimmetria tengelye van, akkor ezek a tengelyek egy ponton mennek át. (Egy lehetséges út, ha a tengelyek alkotta háromszögön belüli M ponttól legtávolabbi A pontot tükrözzük valamelyik tengelyre.)

Eredmény:

Az $n = 4k$ és $n = 4k + 1$ esetekhez viszonylag könnyű konstrukciót találni.

K18.5. Ha a két téglalap oldalainak bezárt szöge α, a tartalmazás szükséges és elégséges feltétele, hogy $a\cos\alpha + b\sin\alpha \le c$ és $b\cos\alpha + a\sin\alpha \le d$ teljesüljön. Az $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ helyettesítéssel ez pontosan akkor következik be, ha az $ax + by = c$ és $bx + ay = d$ egyenesek metszéspontja az egység sugarú körön belülre kerül. A metszéspont $\left(\frac{bd-ac}{b^2-a^2}, \frac{bc-ad}{b^2-a^2}\right)$.

Pl. az $(a, b) = (5, 20)$ és $(c, d) = (16, 19)$ választással a kisebb téglalap csak egyféleképpen helyezhető el.

Kombinatorikus geometria 3.

K19.1. Vizsgáljuk meg a négyzet beírt köre megrajzolásával kapott 5 tartományt.

Eredmény:

2 rácspont, s erre könnyen mutatható konstrukció.

K19.2. A leszámolást végezhetjük pl. a 3 kiválasztott pont típusa alapján.

Eredmény:

81.

K19.3. A lépcsőház keresztmetszetének területéből adódóan $n \equiv 1 \pmod 3$ nem lehetséges. Ezután mutassuk meg teljes indukcióval, hogy $n = 3k$-ról $n = 3k + 6$ ($k > 1$) és $n = 3k + 2$ lehetséges.

Eredmény:

$n = 3k$ vagy $n = 3k + 2$ alakú lehet, kivéve $n = 3$ és $n = 5$.

K19.4. Tekintsük a pontok által alkotott maximális területű PQR háromszöget; szerkesszük meg az ABC háromszöget úgy, hogy a PQR középháromszöge legyen, s mutassuk meg, hogy az ABC háromszögön kívül nem lehet pont.

K19.5. Vegyünk fel két merőleges egyenest mint koordináta-tengelyeket. A szakaszokat eltolhatjuk úgy, hogy kezdőpontjuk az origóba kerüljön, és tükrözhetjük a tengelyekre, hogy az első síknegyedbe essenek. Ha a szakaszok hossza d_i, a két tengelyre vett vetületek összege d_i és $\sqrt{2}d_i$ közé esik, tehát nem lehet mind a két tengelyre vett vetület-összeg nagyobb, mint $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (Ha egyenlőség állna fenn (minden szakasz 45°-os szöget zárna be a két tengellyel), akkor mozgassuk el a tengelyeket.)

Színezések 1.

K20.1. a) Nem; ellenpélda pl. az a1, b5, c3, d6, e2, f4, g7 színezés.
b) Igen. Vizsgáljunk két esetet aszerint, hogy van-e színezett sarokmező vagy sem.

K20.2. Legyen P a páratlan sor- és páratlan oszlopindexű mezőkön lévő számok (1-esek) összege; Q ugyanez a páratlan sor- és páros oszlopindexű mezőkre; S pedig a páros sor- és páros oszlopindexű mezőkre. Ekkor P + Q a páratlan sorokban (1, 3, 5, 7, 9) lévő számok összege, tehát páratlan; Q + S szintén páratlan; innen P + S páros. Ez éppen a fekete mezőkön lévő 1-esek száma.

Megjegyzés:

Hasonló volt a **K2.5.** feladat állítása 2nx2n-es táblázat esetén.

K20.3. Induljunk ki pl. a táblázat bal szélén lévő egyik (nem sarok-) mezőből. Ennek két szomszédja különböző színű. Ezután folytassuk ezen mezők további közös szomszédjának szomszédaival. Ezek egyformák stb.

Megjegyzés:

A feladat szempontjából a 9x9-es táblázat helyett elég olyat megadni, amelynek egyik mérete páratlan.

K20.4. Legyen p darab piros és k darab kék csúcs ($p + k = 6n + 1$), s számoljuk meg a „tarka" egyenlő szárú háromszögek számát! Egy „tarka" élhez mint alaphoz egy, mint szárhoz két egyenlő szárú háromszög illeszthető, s minden „tarka” egyenlő szárú háromszöget kétszer számoltunk. A „tarka” egyenlő szárú háromszögek száma tehát $\frac{3pk}{2}$, állandó.

K20.5. Elég megszámolni azokaz az eseteket, amikor nem keletkezik szabályos háromszög (ekkor hatszög sem lehetséges) és négyzet.
4 szabályos háromszög keletkezhet, mindegyiket $2^3 – 2 = 6$-féleképpen színezhetjük ki, ez $6^4 = 1296$ színezés.
Háromfajta négyzet keletkezhet. Legyen S_i ($i = 1, 2, 3$) azon színezések halmaza, amelyekben a P_i-típusú egyszínű négyzetek esetén nincs egyszínű háromszög. $|S_1 \cup S_2 \cup S_3|$-t a szita-formulával határozhatjuk meg. $|S_i| = 2\cdot 3^4$ (a négyzetek 4 csúcsa 4 különböző háromszögbe esik, s így ezek maradék két csúcsa 3-féle színezésű lehet), $|S_i \cap S_j| = 34$ és $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 6$.

Eredmény:

$1296 – 3\cdot 162 + 3\cdot 34 – 6 = 906$.

Színezések 2.

K21.1. Az S csúcsú gúla oldalélei közül legalább 5 egyszínű, pl. fehér. Az SA, SB, SC, SD, SE élek által meghatározott ABCDE ötszögben található olyan háromszög, melynek oldalai egyúttal az ötszög átlói.

K21.2. Induljunk ki három szomszédos rácspont A, B, C típusú színezéséből. Ekkor a színezés függőleges irányban egyértelműen folytatható.

K21.3. piros pontokból kiinduló szakaszok száma $180\cdot 4 + 39\cdot 3 = 837$, ezek mind pirosak vagy feketék. Ha x a piros szakaszok száma, akkor $837 = 2x + 237$, tehát 300 darab piros szakasz van.

Eredmény:

A kék szakaszok száma 223.

K21.4 A piros pontokból kiinduló szakaszok száma $625\cdot 4$ + (4 vagy 5 vagy 6), ezek mind pirosak vagy feketék. Ha x a piros szakaszok száma, akkor $625\cdot 4$ + (4 vagy 5 vagy 6) = $2x + 101$.

Eredmény:

A piros szakaszok száma $x = 1202$.

K21.5. Az adott egyeneseket 3^{2n}-féleképpen színezhetjük, a pontok színezése a függőleges és vízszintes egyenesek egymás közötti színezési sorrendjétől független. Ugyanakkor ha adott az n^2 pont egy színezése, egy egyenes színét tetszőlegesen választhatjuk (3-féleképpen), a többi adódik.

Eredmény:

$$\frac{3^{2n}}{3} = 3^{2n-1}.$$

Gráfok

K22.1. a) Mivel minden tapsolást kétszer számolunk, a tapsok összege nem lehet páratlan.
b) A konstrukciót legegyszerűbb mod 4 alapján megadni.

K22.2. Ha valaki nem ismer négy személyt, akkor közöttük mindenkinek ismernie kell a másikat; ha pedig valaki legalább öt embert ismer, erre az ötre alkalmazhatjuk Ramsey klasszikus tételét.

K22.3. a) Egy kiválasztott személyt tekintve az ő három ismerősének legfeljebb 2 – 2 további ismerőse lehet, a tagok száma legfeljebb 10. 10 résztvevőre lehetséges is megfelelő gráfot konstruálni.

Megjegyzés:

A feladat megoldása során szerkesztett gráf a Petersen-gráf. Egy ide kapcsolódó tanulságos feladat:

KöMaL g2784.

Egy légitársaság ingajáratokat közlekedtet néhány város között úgy, hogy egy városból nem lehet háromnál több másikba közvetlenül eljutni. Legfeljebb egy átszállással viszont már eljuthatunk bárhonnan bárhova. Legfeljebb hány város között járnak a gépek?

b) Kiindulva egy háromszögből könnyen megmutatható, hogy a tagok száma legfeljebb 8.

K22.4. A feladat gráfelméleti megfogalmazásban páros hosszú kör létezését kérdezi, ha minden pont foka legalább három. Ennek igazolására tekintsük a gráfban a leghosszabb $X_1X_2 \ldots X_s$ utat; ebben legyen X_i és X_j a maximális távolságú szomszédja X_1-nek. Az $X_1X_2 \ldots X_i \ldots X_jX_1$, vagy valamelyik részköre megfelelő.

K22.5. Érdemes a gráfok nyelvén dolgozni. Általában n = 2m (= 1998), $P_1, P_2, \ldots, P_n$ esetén P_i-t és P_j-t akkor kössük össze, ha i és j különböző paritásúak; ekkor m^2 = 998001 él (járat) keletkezik.
Ha az élek száma m^2-nél több lenne, akkor tekintsük a maximális fokszámú P_i pontot, ennek foka m + x (x > 0). Mutassuk meg, hogy ekkor a gráf éleinek száma legfeljebb
$\frac{1}{2}\big((m+x)+(m+x)(m-x)+(m-x-1)(m+x)\big) = m^2 - x^2 \le m^2$, s ez ellentmondás.

Eredmény:

A maximum m^2 = 998001.