Rekurzív sorozatok

Bevezető

A középiskolás törzsanyag a rekurzív sorozatok elméletét nem tartalmazza. Az általános tantervű osztályokban a számtani és mértani sorozatokkal foglalkozunk; ezenkívül fakultáció keretében tanítjuk 11. és 12. osztályban a sorozatok analitikai tulajdonságait, a határértékszámítást. Rekurzív sorozatokat csak érintőlegesen, alkalmanként használunk, főleg konkrét feladatok esetében. (Néhány feladat található ebből a témából az összefoglaló érettségi feladatgyűjteményben, valamint az utóbbi évtizedek egyetemi felvételi feladatai között.)

Méltánytalanul elhanyagoljuk a *rekurzív gondolkodásmód* tanítását. Tapasztalataim szerint ez a kombinatorika-jellegű téma sikeres a diákok körében (pl. több feladat megoldása egyszerűbbé, elegánsabbá válik). Nehézséget leginkább az okoz, hogy a rekurzív kapcsolatok kezelése komoly technikai jártasságot igényel, amit csak sok gyakorlással, időigényes rutinszerzéssel lehet elérni.

A rekurzív sorozatok témakörének több (felsőfokú) folytatása is van. Az alkalmazások köréből néhány (nem egyforma fajsúllyal) ezek közül:

– Catalan-számok;
– Markov-láncok;
– generátorfüggvények;
– differenciaegyenletek;
– differenciálegyenletek;
– szimulációs modellek (pl. a káosz jelensége a populációbiológiában).

A rekurziós problémák a számítógépek elterjedése óta még inkább előtérbe kerültek, hiszen a gyors gépek rendkívül alkalmasak az algoritmikus számításokra. Godoljunk csak a véges rekurziók numerikus kezelésén kívül pl. a rekurzív függvények és görbék, a fraktálok vizsgálatára.

A cikk további részében a következő témaköröket vizsgáljuk:

1. Általános fogalmak
2. A rekurziók és a teljes indukció kapcsolata
3. Elsőrendű rekurziók
4. Az elsőrendű lineáris rekurziók általános megoldása
5. Másodrendű rekurziók
6. A másodrendű rekurziók alkalmazása
7. Egyéb rekurziók
8. Érdekességek (trükkök és problémák)
9. Gyakorló feladatok

1. Általános fogalmak

A rekurzív összefüggések szakmai és módszertani elemzését általában úgy végezzük el, hogy a rekurzív sorozatok tárgyalt típusait általánosan megoldjuk (vagyis meghatározzuk az explicit alakot), majd a probléma megoldását visszavezetjük a rekurzív összefüggés keresésére, ill. felállítására.

Módszertani szempontból egyébként is érdemes külön egységként tárgyalni a rekurzió felállítását és megoldását. A matematikailag kezelhetetlen rekurzív sorozatok tagjai is gyakran előállíthatók számítógéppel.

Jelölések:

Állapodjunk meg a következőkben. Jelentse (a) azt a sorozatot, amelynek tagjai a_1, a_2, a_3, … stb. Az i, k, n indexek a továbbiakban természetes számokat jelentenek, a sorozatok kezdőtagját 0-tól vagy 1-től indexeljük.

Explicit és rekurzív alakok:

A sorozat explicit megadása azt jelenti, hogy az általános n. tagot olyan képlettel adjuk meg, amely csak n-től függ (tehát nem függ a sorozat korábbi tagjaitól). Pl. $a_n = 2n$, $n \geq 1$. A rekurzív formula olyan egyértelmű utasítás, amellyel a sorozat tagjait a korábbi tagok segítségével fejezhetjük ki. Ekkor a sorozat bizonyos számú kezdőtagját előre meg kell adni, hiszen csak így tudjuk a később következő tagokat meghatározni. Az előző példa rekurzív megadása: $a_n = a_{n-1} + 2$ $(n \geq 2)$ és $a_1 = 2$; vagy az ezzel egyenértékű $a_{n+1} = a_n + 2$ $(n \geq 1)$ és $a_1 = 2$.

Az explicit alak segítségével a sorozat algebrailag és analitikailag is könnyen kezelhetővé válik. Ezért általában a rekurzív sorozatok explicit alakjának meghatározása a célunk; ezt nevezzük a rekurzió megoldásának. A fordított irányú - explicitből rekurzív - átírásra ritkábban van szükség.

Rekurziók osztályozása:

A sorozatokat jellemezhetjük attól függően, hogy a rekurzív összefüggésben a sorozat hány korábbi tagja szerepel (vagyis hányad rendű a rekurzió), található-e konstans tag stb. Néhány példa:

a) $a_n = a_{n-1} + d$ $(n \geq 2)$, $a_1 = c$ (c, d állandó). Ez a számtani sorozat rekurzív alakja; állandó együtthatós, elsőrendű, d = 0 esetén homogén, egyébként inhomogén, lineáris rekurzió. Az ismert explicit formula: $a_n = c + (n - 1)d$, $(n \geq 1)$.

b) $b_n = qb_{n-1}$ $(n \geq 2)$, $b_1 = c$ (c, $q \neq 0$ állandók). Ez a mértani sorozat: állandó együtthatós, elsőrendű, homogén, lineáris rekurzió. A mértani sorozat explicit alakja $b_n = cq^{n-1}$ $(n \geq 1)$.

c) $c_n = nc_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $c_0 = 1$. Nem-állandó együtthatós, elsőrendű, homogén, lineáris rekurzió. Megoldása $c_n = n!$ $(n \geq 0)$ a $0! = 1$ megállapodással.

d) A jól ismert Fibonacci-sorozat: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \ge 2)$, $f_0 = f_1 = 1$ állandó együtthatós, másodrendű, homogén, lineáris rekurzió.

e) $d_n = d^2_{n-1}$ elsőrendű, $e_n = \frac{1}{e_{n-2}}$ másodrendű, $g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-2} + g_{n-4}$ pedig negyedrendű homogén nemlineáris rekurziók.

A sorozatok rekurzív alakja nem egyértelmű:

Tekintsük pl. a 2, 4, 6, 8, ... számtani sorozatot. Ennek egy rekurzív megadása lehet a "klasszikus" $a_n = a_{n-1} + 2$ $(n \ge 2)$, $a_1 = 2$ képlet.

A sorozatot megadhatjuk másodrendű rekurzióval is: $a_n = a_{n-2} + 4$ $(n \ge 3)$, ekkor két kezdőtagot kell megadnunk: $a_1 = 2$ és $a_2 = 4$. A sorozatot harmadrendű (és hasonló gondolatmenettel tetszőleges rendű) rekurzióval is megadhatjuk: $a_n = a_{n-3} + 6$ $(n \ge 4)$, s a kezdeti értékek $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$.

Egy másik gondolatmenet a következő:
A számtani sorozatban bármely közbülső elem a két szomszédos tag számtani közepe. Így $n \ge 2$ esetén $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, vagyis $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, innen indexeltolással $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \ge 3)$. Ezzel a módszerrel egy másodrendű rekurziót kaptunk, amelynek két kezdőtagját kell megadnunk: $a_1 = 2$ és $a_2 = 4$.

Negyedrendű rekurzióhoz jutunk pl. az $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{5}$ összefüggés felhasználásával: $a_{n+2} = -a_{n+1} + 4a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \ge 3)$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$;
és így tovább.

2. A rekurziók és a teljes indukció kapcsolata

Általánosan használt eljárás, hogy a rekurzív összefüggés alapján felírjuk a sorozat néhány kezdőtagját, kialakul egy sejtésünk a sorozat explicit alakjára, majd a sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk. Nézzünk néhány feladatot!

2.1. feladat: Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^{\,2}}$, $(n \ge 2,\ a_1 = 1)$ sorozat explicit alakját!

Megoldás: Az $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = 2$ behelyettesítések alapján az $a_n = \sqrt{n}$ összefüggést sejthetjük meg. Teljes indukcióval bizonyítunk: feltesszük, hogy $a_k = \sqrt{k}$, s kérdés, hogy $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ teljesül-e. A rekurziós összefüggés és az indukciós feltevés alapján $a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k^2} = \sqrt{1 + \sqrt{k}^{\,2}} = \sqrt{1 + k}$, vagyis sejtésünk igaz.

Megjegyzés: Érdemes a sorozatot más pozitív egész kezdőérték esetén is megvizsgálni.

2.2. feladat: Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{1}{2 - a_{n-1}}$, $(n \geq 2,\ a_1 = \dfrac{1}{2})$ sorozat explicit alakját!

Megoldás: A sorozat néhány kezdőtagja alapján $(a_2 = \dfrac{2}{3},\ a_3 = \dfrac{3}{4},\ a_4 = \dfrac{4}{5})$ az $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ sejtést próbáljuk bebizonyítani az $a_k = \dfrac{k}{k+1}$ indukciós feltevésből kiindulva.
Mivel $a_{k+1} = \dfrac{1}{2 - a_k} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{k+1}{k+2}$, így az explicit képlet valóban $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2.3. feladat: Az $a_n = 2a_{n-1} - 1$ $(n \geq 2,\ a_1 = 2)$ sorozat mely tagjai oszthatók 3-mal?

Első megoldás: A sorozat tagjainak hárommal való osztási maradékai (2, 0, 2, 0, …) periodikusan ismétlődnek. (A periodicitás egyébként - a skatulya-elv miatt - bármely rendű rekurzív összefüggés és a 3-as helyett tetszőleges modulus esetében is fennáll, ha a sorozat elemei egészek.) Így a sorozat páros indexű tagjai - és csak azok - oszthatók 3-mal.

Második megoldás: A sorozat kezdőelemei 2, 3, 5, 9, 17 stb. Észrevehetjük, hogy mindegyik tag eggyel nagyobb egy kettőhatványnál, így az $a_n = 2^{n-1} + 1$, $n \geq 1$ explicit alakot sejthetjük meg. Az indukciós feltevés $a_k = 2^{k-1} + 1$, ebből kell belátnunk, hogy $a_{k+1} = 2^k + 1$, ez pedig az $a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1$ átalakításból már következik.
$2^{n-1} + 1$ ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, mint $(-1)^{n-1} + 1$, tehát a sorozat páros indexű tagjai oszthatók 3-mal.

3. Elsőrendű lineáris rekurziók

A számtani sorozat $a_n = a_{n-1} + d$ $(n \geq 2)$, $a_1 = c$ (c, d állandó) rekurzív formuláját kézenfekvő úgy általánosítanunk, hogy a képletben a d konstans helyett egy n-től függő változót szerepeltetünk. Jelöljük a változót f_n-nel, ekkor az $a_n = a_{n-1} + f_{n-1}$ $(n \geq 2,\ a_1 = c$, c állandó) rekurzió explicit alakját keressük.

Írjuk fel az i. tag rekurziós alakját rendre az i = 1, 2, 3, ... , n esetekben:

$a_1 = c,$
$a_2 = a_1 + f_1,$
$a_3 = a_2 + f_2,$
…
$a_i = a_{i-1} + f_{i-1},$
…
$a_n = a_{n-1} + f_{n-1}.$

Az egyenleteket összeadva, a közbülső a_i tagok kiesnek, az $a_n = c + \sum_{i=1}^{n-1} f_i$ explicit alakot kapjuk. Vagyis minden olyan esetben felírhatjuk a_n-et zárt alakban, amikor $\sum f_i$ zárt alakra hozható.

Az eljárás nem túl nehéz, a diákok egy része önállóan, mások kis segítséggel rátalálnak a megoldásra. Az alábbiakban felsorolunk néhány feladatot.

3.1. feladat: Folytasd az 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, ... sorozatot!
a) Mi lehet a sorozat 1995. tagja?
b) A sorozat mely tagjai oszthatók 3-mal?

Megoldás: a) A sorozat persze tetszőlegesen folytatható. Az egyik lehetséges megoldás az $a_n = a_{n-1} + n - 1$ ($n \geq 2$, $a_1 = 1$) összefüggés felismerésén alapszik. Az

$a_1 = 1$,
$a_2 = a_1 + 1$,
$a_3 = a_2 + 2$,
…
$a_n = a_{n-1} + n - 1$

egyenleteket összeadva $a_n = 1 + 1 + 2 + \ldots + (n - 1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$, s így $a_{1995} = 1 + \frac{1995 \cdot 1994}{2}$.

b) A 3-mal való oszthatóság szempontjából elég vizsgálni az $a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)+2}{2}$ explicit alak számlálóját, hiszen 2 és 3 relatív prímek.

Ha n maradéka 0, 1 vagy 2, akkor $n(n - 1) + 2$ maradéka rendre 2, 2, 1. Vagyis ebben a sorozatban nincs 3-mal osztható tag.

3.2. feladat: Legfeljebb hány részre osztja n egyenes a síkot?

Ezt a klasszikus feladatot a diákok egy része általában meg tudja oldani. Néhányuknak esetleg segítünk elindulni, felvesszük a kezdőhelyzeteket, de a rekurziós összefüggést már önállóan sejtik meg.

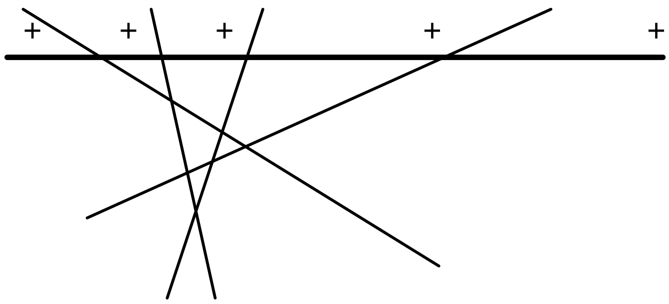
Megoldás: Adott számú egyenes esetén a legtöbb síkrészt akkor kaphatjuk, ha az egyenesek között nincsenek párhuzamosak és semelyik ponton nem megy át kettőnél több egyenes; tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az egyenesek általános helyzetűek.

Nézzük meg, hogy $n = 0, 1, 2, 3, 4$ egyenes felvételekor hány tartomány keletkezik! Némi próbálkozás és rajzolás után kapjuk az alábbi táblázatot:

Egyenesek száma:	0	1	2	3	4
Tartományok száma:	1	2	4	7	11
Különbség:	1	2	3	4	

Észrevehetjük, hogy a szomszédos tartományszámok különbsége eggyel nő.

A sejtés bizonyításához tegyük fel, hogy n – 1 egyenes S_{n-1} részre osztja a síkot. Az n. egyenes elmetszi a korábban felvett n – 1 egyenest, ekkor n – 1 új tartomány keletkezik; valamint az utolsó metszéspont után szintén kapunk egy plusz síkrészt. Vagyis n egyenes legfeljebb $S_{n-1} + n$ részre osztja fel a síkot, mint azt sejthettük. (Az ábrán az n = 5 eset látható.)



Az $S_n = S_{n-1} + n$ $(n \geq 1,\ S_0 = 1)$ rekurzió megoldása már nem okoz nehézséget. Az egyenleteket összegezve $S_n = 1 + 1 + 2 + \ldots + n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ képlet adódik. A kapott képlet összhangban van az eddigi eredményeinkkel, erről az $n \leq 4$ kezdeti értékek visszahelyettesítésével meggyőződhetünk.

Megjegyzés: A probléma a középiskolai érettségi példatár, a "Zöld könyv" 3626. sz. feladatában a következő megfogalmazásban szerepel: "Bizonyítsa be, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ részre osztja."

Itt a teljes indukciós bizonyítást a rekurziós összefüggés segítségével lehet elvégezni. Ebben az esetben is egyenértékű a teljes indukció és a rekurzió módszerét használó megoldás, bár a teljes indukció alkalmazásához ismerni kell a végeredményt.

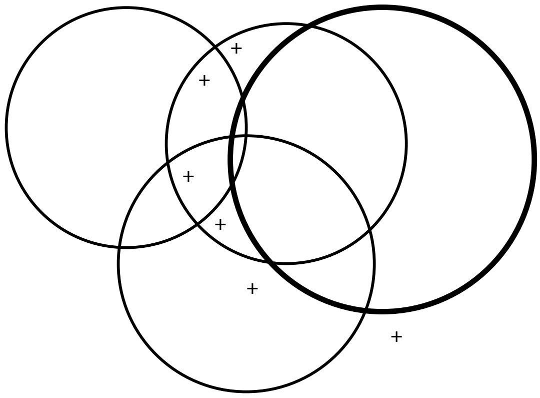
Általában is gyakoroltathatjuk (ismétlés, szinten tartás) az egyik téma keretében a másikat.

3.3. feladat: (Z.3627.) Bizonyítsa be, hogy n kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja.

Az előző feladat megjegyzése most is érvényes, bizonyíthatnánk teljes indukcióval is. Használjuk azonban a rekurzió felállításának és megoldásának a módszerét, hiszen így azt is megtudjuk, hogyan kapható meg az explicit képlet.

Megoldás: A képletet $n \geq 1$ esetén igazoljuk, n = 0-ra nem teljesül.

Adott számú kör felvételekor a legtöbb síkbeli tartományt akkor kaphatjuk, ha bármely két kör két pontban metszi egymást és semelyik metszésponton nem megy át kettőnél több kör. (Ellenkező esetben a tartományok számát növelhetnénk.) A továbbiakban tehát csak az ilyen helyzetű körökkel foglalkozunk.



Tegyük fel, hogy n – 1 darab kör k_{n-1} részre osztja a síkot. Az n. kör felvételekor 2(n – 1) metszéspontot kapunk, s mindegyikhez tartozik egy új tartomány (az ábra az n = 4 esetet mutatja).

Így a $k_n = k_{n-1} + 2(n-1)$ ($n \geq 2$, $k_1 = 2$) rekurzív összefüggést kapjuk, ennek megoldása $k_n = 2 + 2(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = 2 + n(n-1)$, ami valóban megegyezik a bizonyítandó $n^2 - n + 2$-vel.

A szélsőhelyzet el is érhető. Tetszőleges n esetén megadhatunk n darab kört úgy, hogy bármely kettőnek két metszéspontja legyen. Pl. egy adott kört rögzített irányban (n – 1)-szer „kissé” eltolunk; ha az első és utolsó kör középpontjának távolsága kisebb, mint a kör sugara, akkor mindegyik kör metszi mindegyik kört, különböző pontokban.

3.4. feladat: Hány átlója van egy konvex n-szögnek?

Egyik lehetséges megoldás: Összekötjük a pontokat egymással, megszámoljuk a keletkezett szakaszokat, majd levonjuk az oldalak számát.

Az első csúcsból n – 1 darab szakaszt húzhatunk (kimarad önmaga); a második csúcsból már csak n – 2-t, hiszen az első csúccsal már összekötöttük egyszer; a harmadikból n – 3-at stb; végül az utolsó, (n – 1). csúcsból már csak egy szakasz húzható. A behúzott szakaszok száma $1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, az átlók száma tehát $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Második megoldás: Minden csúcsból n – 3 átlót húzhatunk; ez n(n – 3) átlót jelent. Mivel minden átlót kétszer számoltunk, az összes átló száma $\frac{n(n-3)}{2}$.

Harmadik megoldás (rekurzív gondolatmenettel): Tegyük fel, hogy a konvex (n – 1)-szög átlóinak száma A_{n-1}. Sorszámozzuk be a csúcsokat pl. pozitív irányú körüljárás szerint 1-től (n – 1)-ig, és az n. pontot az 1. és (n – 1). között vegyük fel. Az n. pontból n – 3 darab új átló indul ki (kimarad a két szomszédos csúcs); valamint az 1. és (n – 1). csúcs között is keletkezik egy új átló. (Eddig ez a szakasz egy oldalél volt.) Vagyis az $A_n = A_{n-1} + n - 2$ ($n \geq 4$, $A_3 = 0$) rekurzió explicit alakját kell előállítanunk.

Ennek megoldása a hagyományos módon $A_n = 2 + 3 + \ldots + (n-2) = \frac{n(n-3)}{2}$.

Megjegyzések: Az első két megoldás alapján ez a probléma már általános iskolában is típusfeladatnak minősül a tehetségesebb gyerekek körében. A harmadik megoldás is minimális technikai apparátust használ. A diákokat egyszerű feladatokkal érdemes már igen korán hozzászoktatnunk a rekurzív gondolkodásmódhoz.

A középiskolások számára akkor ad valami újat az - esetleg sokadszor hallott - feladat, ha kifejezetten rekurzión alapuló megoldást kérünk. Az egyszerű feladatokkal is tudunk gyakoroltatni, mert a rekurzió felállítása újszerű gondolatot kíván.

3.5. feladat: Egy szabályos 8-szög alakú labirintus egyik csúcsában egy egér, másik csúcsában egy sajtdarab van. Az egér nem látja a sajtot; minden lépésben a 8-szög oldalai vagy átlói közül véletlenszerűen választ egyet, és az utat csúcstól csúcsig végigjárja (tehát pl. a második lépésben visszatérhet a kiindulási helyére).

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egér nem találja meg a sajtot?

b) Átlagosan mennyi idő múlva találja meg az egér a sajtot?

c) Átlagosan mennyi időre van szüksége az egérnek, ha az összes csúcsot át akarja kutatni?

Megoldás: A csúcsok szerepe szimmetrikus. Az egér bármely csúcsból $\frac{1}{7}$ valószínűséggel találja meg a sajtot, ill. $\frac{6}{7}$ valószínűséggel egy másik csúcsba jut.

a) Annak a valószínűsége, hogy az egér az n. lépésig nem találja meg a sajtot, $\left(\frac{6}{7}\right)^{n}$. Ez az érték a lépésszám növekedtével nullához tart, tehát az egér előbb-utóbb 1 valószínűséggel rátalál a sajtra.

b) Jelöljük L-lel a sajt megtalálásához szükséges átlagos lépésszámot. Az egér az alaphelyzetből vagy $\frac{1}{7}$ valószínűséggel egy lépésben célt ér, vagy $\frac{6}{7}$ valószínűséggel lép egyet és egy másik csúcsba kerül. Ez az állapot a kiindulási helyzettel ekvivalens, innen továbbra is L a sajt megtalálásához szükséges átlagos lépésszám. Ennek alapján a felírható rekurzív összefüggés: $L = \frac{1}{7}\cdot 1+\frac{6}{7}(1+L)$. Ennek megoldása $L = 7$.

A sajt megtalálásához szükséges átlagos "idő" 7 lépés.

c) Színezzük be a csúcsokat: legyen pl. piros színű az a csúcs, ahol már járt az egér, és legyen kék, ahol még nem. Kezdetben egy csúcs piros, ahol az egér áll, a többi hét kék színű. Az első lépésével az egér mindenféleképpen "pirosra színez" egy csúcsot. A második lépés már kétféle lehet: $\frac{1}{7}$ valószínűséggel piros csúcsba vezető élt választ az egér, $\frac{6}{7}$ valószínűséggel kék csúcsba vezetőt. (Ekkor 3 piros és 5 kék csúcs lesz.) Általában ha a kék csúcsok száma i, $\frac{i}{7}$ valószínűséggel kék, $\frac{7-i}{7}$ valószínűséggel piros csúcsot választ az egér. (Itt kihasználtuk, hogy az egér mindig piros csúcson áll.) Jelöljük L_i-vel azt az átlagos lépésszámot, ami az összes csúcs pirosra színezéséhez szükséges, ha még i darab kék van közöttük. A feladat L_7 meghatározása.

Ha a kék csúcsok száma i, $\frac{i}{7}$ valószínűséggel kék csúcsot választ az egér. Ekkor történt egy lépés, és (i – 1) kék csúcs maradt; az ezek színezéséhez szükséges lépésszám L_{i-1}. Ha $\frac{7-i}{7}$ valószínűséggel piros csúcsot választ az egér, akkor lép egyet, és továbbra is átlagosan L_i lépésre van szüksége. Ez alapján az $L_i = \frac{i}{7}(1+L_{i-1})+\frac{7-i}{7}(1+L_i)$ véges rekurziót írhatjuk fel ($i = 1, 2, ..., 7$ és $L_0 = 0$).

A képlet átalakítása után az $L_i = L_{i-1} + \frac{7}{i}$ formulát kapjuk, ahonnan $L_7 = \sum_{i=1}^{7}\frac{7}{i} = 32{,}15$; ennyi a csúcsok bejárásához szükséges átlagos lépésszám.

Megjegyzés: ez egy tipikus bolyongás-feladat a Markov-láncok témaköréből. ;

Néhány további feladat önálló gyakorlásra:

3.6. feladat: Hány részre osztja a síkot n darab párhuzamos helyzetű téglalap?

3.7. feladat: Hány 5-tel osztható szám van az $a_n = a_{n-1} + n^2$, ($n \geq 2$, $a_1 = 1$) sorozat első 100 tagja között?

3.8. feladat: Hány háromszöget határoz meg n darab általános helyzetű pont a síkon?

3.9. feladat: Legfeljebb hány részre osztja a teret n darab sík?

3.10. feladat: Legfeljebb hány részre osztja a teret n darab gömb?

4. Az elsőrendű lineáris rekurziók általános megoldása

További általánosítási lehetőség, amikor az $a_n = b \cdot a_{n-1} + c$ képletben a b, c együtthatók állandók, de most $b \neq 1$.

4.1. feladat: Adjuk meg az $a_n = b \cdot a_{n-1} + c$, ($n \geq 2$, $a_1 = e$) rekurzív sorozat explicit alakját!

Megoldás: Írjuk fel a sorozat néhány kezdőtagját és vizsgáljuk a szomszédos tagok különbségét:

$a_1 = e$,
$a_2 = b \cdot a_1 + c$,
$a_3 = b \cdot a_2 + c$,
$a_4 = b \cdot a_3 + c$,
…

A különbségek: $a_2 - a_1 = b\cdot a_1 + c - e$, $a_3 - a_2 = b(a_2 - a_1)$, $a_4 - a_3 = b(a_3 - a_2)$, … Definiáljuk a (d) különbségsorozatot $d_i = a_i - a_{i-1}$ ($i \geq 2$) formában, ekkor $d_2 = b\cdot a_1 + c - e$ (= állandó), $d_3 = b\cdot d_2$, $d_4 = b\cdot d_3$ … Vagyis (d) egy b hányadosú mértani sorozat, $d_n = b^{n-2}\cdot d_2$. Mivel $a_n = d_n + a_{n-1}$, $a_{n-1} = d_{n-1} + a_{n-2}$, … $a_2 = d_2 + a_1$, a (d) sorozat ismeretével egy olyan elsőrendű rekurziót kaptunk (a)-ra, melyben a_{n-1} együtthatója 1. Ennek megoldása már egyszerű: az egyenleteket összeadva $a_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i$, innen $a_n = a_1 + \frac{b^{n-1}-1}{b-1} d_2$ = e + $\frac{b^{n-1}-1}{b-1}(be + c - e)$.

4.2. feladat: Mi az $a_n = 2a_{n-1} + 1$, ($n \geq 2$, $a_1 = 3$) rekurzív sorozat explicit alakja?

Megoldás: A sorozat kezdőtagjai: $a_1 = 3$, $a_2 = 2a_1 + 1 = 7$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 15$, $a_4 = 2a_3 + 1 = 31$. A különbségsorozat $d_2 = 4$, $d_3 = 8$, $d_4 = 16$, ... , $d_n = 2^n$. Így $a_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i = 3 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Megjegyzések:

Természetesen a korábban levezetett általános $a_n = e + \frac{b^{n-1}-1}{b-1}(be + c - e)$ formulába egyszerűen behelyettesíthettük volna az $a_1 = e = 3$, $b = 2$, $c = 1$ értékeket.

Az is látható, hogy a különbségsorozat használata miatt kissé kényelmesebb az (a) sorozatot 0-tól indexelni.

Egyébként az explicit alak könnyen megsejthető, dolgozhattunk volna teljes indukcióval is.

4.3. feladat: Adjuk meg az $a_n = b_n\cdot a_{n-1} + c_n$ ($n \geq 1$, $a_0 = e$) általános elsőrendű lineáris rekurzió megoldását!

Megoldás: Ha $c_n = 0$, akkor a rekurzió homogén, egyébként inhomogén. Az általános megoldást a speciális homogén rekurzió megoldása segítségével állítjuk elő.

A továbbiakban feltesszük, hogy $b_n \neq 0$ (egyébként a rekurzió elfajul). Legyen a $c_n = 0$ esethez tartozó homogén rekurzió megoldása (h): $h_n = b_n\cdot h_{n-1}$ ($n \geq 1$, h_0 értéke egyelőre szabadon választható); majd tekintsük a (q) = $\left(\frac{a}{h}\right)$ sorozatot: $\frac{a_n}{h_n} = \frac{b_n a_{n-1}}{h_n} + \frac{c_n}{h_n} = \frac{a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{c_n}{h_n}$. Az így kapott $q_n = q_{n-1} + \frac{c_n}{h_n}$, ($n \geq 1$, q_0 később meghatározandó) rekurzió megoldása $q_n = q_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{h_i}$, innen $\frac{a_n}{h_n} = \frac{a_0}{h_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{h_i}$, vagyis $a_n = \frac{a_0}{h_0} h_n + h_n \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{h_i}$.

A homogén rekurzió megoldása $h_n = h_0 b_1 b_2 \ldots b_n$; ha b_n állandó, akkor speciális esetként a mértani sorozatot kapjuk meg. Az is látható, hogy a $h_0 = 1$ választás a legkényelmesebb.

4.4. feladat: Oldjuk meg az $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, ($n \geq 1$, $a_0 = 1$) rekurziót:

a) írjuk fel a sorozat első n elemének összegét n függvényeként;

b) állapítsuk meg, hogy a sorozat mely tagjai oszthatók 5-tel!

Megoldás: A sorozat néhány kezdőtagja: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 19$, $a_3 = 65$.

A 4.3. feladat megoldása alapján először a $h_n = 3h_{n-1}$, ($n \geq 1$, $h_0 = 1$) homogén lineáris rekurziót oldjuk meg. A (h) mértani sorozat explicit alakja $h_n = 3^n$. Ezután meghatározzuk a

$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{h_i}$ összeget; $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{3^i} = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 2-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. Végül az

$a_n = \frac{a_0}{h_0}h_n + h_n\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{h_i}$ összefüggés alapján $a_n = 3^n + 3^n\left(2-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Vagyis az explicit alak $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ ($n \geq 0$).

A kapott képlet összhangban van az eddigi eredményeinkkel, erről az $n \leq 3$ kezdeti értékek visszahelyettesítésével meggyőződhetünk.

a) Az első n elem összege $S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(3^{i+1} - 2^{i+1}\right) = \frac{3^{n+1}-1}{2} - 2^{n+1} + 1$.

b) A $3^{n+1} - 2^{n+1}$ kifejezés 5-tel való osztási maradékait vizsgáljuk. Az oszthatósági szempontból egyenértékű $(-2)^{n+1} - 2^{n+1}$ kifejezés páros kitevőkre (tehát páratlan n értékekre) nulla maradékot ad, páratlan kitevők (tehát páros n-ek) esetén $-2\cdot 2^{n+1}$ a maradék. Tehát az $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ ($n \geq 1$, $a_0 = 1$) sorozatban csak a páratlan sorszámú tagok oszthatók 5-tel.

Második megoldás: Egyes esetekben speciális módszereket is alkalmazhatunk. Az

$a_0 = 1$,
$a_1 = 3a_0 + 2$,
$a_2 = 3a_1 + 2^2$,
…
$a_{n-1} = 3a_{n-2} + 2^{n-1}$,
$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$

egyenletek összeadása előtt azonos együtthatókat állítunk elő mindkét oldalon. Az n. (utolsó előtti) egyenletet megszorozzuk 3-mal; az (n – 1). egyenletet 3^2-, az (n – 2)-et 3^3-, …, végül az első egyenletet 3^n-nel. Az egyenleteket összeadva az $a_n = 3^n + 2\cdot 3^{n-1} + 2^2\cdot 3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}\cdot 3 + 2^n$ összeget kapjuk, ami a (3 – 2)-es tényezővel bővítve $3^{n+1} - 2^{n+1}$ ($n \geq 0$).

Megjegyzés: A $3^n + 2\cdot 3^{n-1} + 2^2\cdot 3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}\cdot 3 + 2^n$ típusú összeget felfoghatjuk egy 3^n kezdőtagú és $\frac{2}{3}$ kvóciensű mértani sornak is, ekkor az összegzés a hagyományos képlettel történhet.

4.5. feladat (1972. közgazdasági egyetemi felvételi): Valaki évente 2000 Ft-ot rak a takarékpénztárba évi 5% kamatos kamatra. Hány év múlva lesz 100000 Ft-ja?

Megoldás: Ezzel a feladattal minden középiskolás diák találkozik. Jelentse a_n az n. év végén meglévő összeget, ekkor tulajdonképpen az $a_1 = 2000\cdot 1{,}05$, $a_n = (a_{n-1} + 2000)\cdot 1{,}05 = 1{,}05a_{n-1} + 2000\cdot 1{,}05$ rekurziót kell megoldanunk ($n \geq 2$). A korábbi négy megoldási módszer mellé (teljes indukció, különbségsorozat módszere, általános képlet, együtthatók visszaszorzása (4.4. feladat második megoldása)) most a leggyakrabban használt “frontális” módszert alkalmazzuk.

Az első év végén $a_1 = 2000\cdot1{,}05$ az összeg; a második év végén ez tovább kamatozik, értéke $2000\cdot1{,}05^2$ lesz; s az újonnan betett 2000 Ft további $2000\cdot1{,}05$ értéket ad.

A harmadik év végére $(2000\cdot1{,}05^2 + 2000\cdot1{,}05)\cdot1{,}05 + 2000\cdot1{,}05 = 2000\cdot1{,}05^3 + 2000\cdot1{,}05^2 + 2000\cdot1{,}05$ a kamatozott összeg. Észrevéve a szabályosságot, az n. év végére $2000\cdot1{,}05^n + 2000\cdot1{,}05^{n-1} + \ldots + 2000\cdot1{,}05$ a teljes összeg, ami nagyobb vagy egyenlő, mint 100000. Ezután alkalmazhatjuk a mértani sorozat összegképletét. Eredmény: $n \ge 24{,}97$, vagyis $n = 25$ év.

5. Másodrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris rekurziók

Az $a_n = b\cdot a_{n-1} + c\cdot a_{n-2}$ ($b, c \neq 0$ konstansok) típusú rekurziók általában szerepelnek a középiskolákban. Az $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n \ge 2$, $f_0 = f_1 = 1$) Fibonacci-sorozat explicit alakját és az előállítás módszerét több könyvben, tankönyvben és példatárban megtalálhatjuk. Érthetően kevesebbet foglalkozunk a középiskolában azzal az esettel, amikor a karakterisztikus egyenletnek komplex gyökei vannak vagy amikor a valós gyökök egybeesnek. A teljesség kedvéért mindhárom esetre röviden megoldunk egy-egy feladatot. Azok számára, akiket a téma részletesebben érdekel, ajánlhatjuk pl. az [1], [2], [6], [8] könyveket.

5.1. feladat: Adjuk meg az $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ ($n \ge 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$) rekurzív sorozat explicit alakját!

Megoldás: A sorozat kezdőtagjai 0, 1, 1, 7, 13, 55, 133, ... Az (a) sorozat megoldását - az elsőrendű rekurziókhoz hasonlóan - $a_n = x^n$ alakban keressük; ekkor az $x^n = x^{n-1} + 6x^{n-2}$ átalakítás után $x^{n-2}(x^2 - x - 6) = 0$. Mivel $x \neq 0$, az $x^2 - x - 6 = 0$ ún. karakterisztikus egyenlet gyökei $b = -2$ és $c = 3$. Ez azt jelenti, hogy az $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ összefüggést az $a_n = b^n = (-2)^n$ és az $a_n = c^n = 3^n$ mértani sorozatok is kielégítik. Az általános megoldást b^n és c^n lineáris kombinációjaként kaphatjuk meg; egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a mértani sorozatok lineáris kombinációja valóban megoldása az eredeti rekurziónak.

Az $a_n = ub^n + vc^n$ általános megoldásban az u, v értékeket az $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ kezdeti értékek illesztésével határozhatjuk meg. Az $a_0 = 0$ feltételből $u + v = 0$, az $a_1 = 1$ feltétel miatt $-2u + 3v = 1$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása $u = -\frac{1}{5}$, $v = \frac{1}{5}$; tehát a sorozat explicit alakja $a_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}\cdot 3^n$.

Az n = 0, 1, 2, 3, 4 értékeket behelyettesítve rendre az $a_n = 0, 1, 1, 7, 13$ értékeket kapjuk.

Hasonlóan járhatunk el minden $a_n = b\cdot a_{n-1} + c\cdot a_{n-2}$ rekurzió megoldásakor, ha a karakterisztikus egyenletnek két valós gyöke van. (Sőt akkor is, ha a két gyök komplex, lásd 5.3. feladat.)

Megjegyzés: Miért pont mértani sorozatok lineáris kombinációjaként kerestük a megoldást? Elképzelhető, hogy más úton is eljuthatunk ehhez az eredményhez (gondoljunk csak arra, hogy a sorozatok rekurzív alakja sem egyértelmű), azonban ez a módszer a gyakorlatban mindig célhoz vezet, tehát általánosan alkalmazható.

A következő feladatban a karakterisztikus egyenletnek egy kétszeres gyöke van.

5.2. feladat: Adjuk meg az $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 3$) rekurzív sorozat explicit alakját!

Első megoldás: Az $x^2 - 2x + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei egyenlők: $b = c = 1$. Most az $a_n = ub^n + vc^n = (u + v)b^n = yb^n$ átalakítás miatt csak egy y kezdeti állandónk marad; ezt általában nem lehet úgy megválasztani, hogy $a_0 = -2$ és $a_1 = 3$ egyszerre teljesüljön. Általánosan megmutatható (pl. a Vieta-formulák segítségével), hogy $a_n = n \cdot c^n$ is kielégíti az eredeti rekurzív öszefüggést, ezért b = c miatt a megoldást $a_n = ub^n + vnc^n = (u + vn)b^n$ alakban állíthatjuk elő.

Az $a_0 = -2$ és $a_1 = 3$ kezdőfeltételek alapján $u = -2$ és $u + v = 3$. Innen $v = 5$, így $b = 1$ figyelembe vételével $a_n = (-2 + 5n)b^n = 5n - 2$ adódik ($n \geq 0$).

Második megoldás: A sorozat kezdőtagjai: – 2, 3, 8, 13, 18, ... ; sejthető, hogy ez egy 5 különbségű számtani sorozat. Bizonyíthatunk teljes indukcióval, vagy speciális módszerként észrevehetjük, hogy a rekurzív formula átalakítható: $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$, vagyis az (a) sorozat különbségsorozata állandó.

5.3. feladat: Adjuk meg az $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ ($n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$) rekurzív sorozat explicit alakját!

Megoldás: A sorozat néhány kezdőtagja: 1, 3, 4, 2, – 4, – 12, – 16, – 8, 16, 48, 64 stb. Az $x^2 - 2x + 2 = 0$ karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van: $b = 1 + i$ és $c = 1 - i$. Használjuk fel az $a_n = ub^n + vc^n$ megoldáshoz a kezdőfeltételeket: $a_0 = 1$ miatt $u + v = 1$ és $a_1 = 3$ miatt $u(1 + i) + v(1 - i) = 3$. A második egyenletből $u + v + i(u - v) = 3$ átalakítás után $u - v = \frac{2}{i} = -2i$. Az egyenletrendszer megoldása $u = \frac{1}{2} - i$ és $v = \frac{1}{2} + i$.

Az $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ sorozat explicit alakja $\left(\frac{1}{2} - i\right)(1+i)^n + \left(\frac{1}{2} + i\right)(1-i)^n$, $n \geq 0$. Az $n = 0, 1, 2$ stb. értékeket behelyettesítve meggyőződhetünk a képlet helyességéről.

Másodrendű rekurziók felállítása

Az 5.1. – 5.3. feladatokban tárgyalt megoldási módszerrel tetszőleges $a_n = b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2}$ alakú másodrendű rekurzió explicit alakja megadható. A következő feladatokban ezért a tulajdonképpeni probléma a rekurzív összefüggés felállítása.

(Mindegyik megoldás a Fibonacci-sorozat $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ képlete.)

5.4. feladat: Hányféleképpen lehet 10 forintot 1 és 2 forintosokkal kifizetni, ha az érmék sorrendjét is figyelembe vesszük?

Megoldás: Jelöljük f_n-nel azt a számot, ahányféleképpen ki tudunk fizetni n forintot 1 és 2 forintosokkal, ha az érmék sorrendjére is tekintettel vagyunk. A feladat f_{10} meghatározása.

Ha a kifizetést 1 forintossal kezdjük, akkor a továbbiakban (n – 1) forintot kell kifizetni 1 és 2 forintosokkal; ezt a kifizetést f_{n-1}-féleképpen tudjuk megtenni.

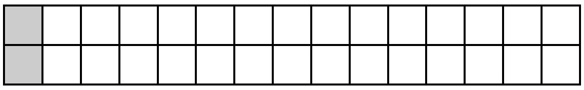
Ha viszont az első kifizetett érme 2 forintos, akkor a továbbiakban (n – 2) forintot kell kifizetni; ezt f_{n-2}-féleképpen tehetjük meg. A kifizetést vagy 1, vagy 2 forintos érmével kezdhetjük, így az $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n \geq 2$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$) összefüggést kapjuk. Ezután meghatározhatjuk a Fibonacci-sorozat explicit alakját, vagy ismételten alkalmazhatjuk a rekurzív hozzárendelést. A sorozat tagjai 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 stb, vagyis $f_{10} = 89$.

5.5. feladat: Hányféleképpen lehet egy 20 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőt léphetünk?

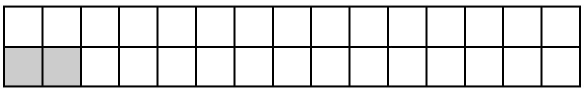
5.6. feladat: Hányféleképpen lehet 2x1-es dominókkal lefedni egy 2x15-ös táblázatot? (A dominók nem fedik egymást és nem lógnak ki a tábláról.)

Útmutatás: Az első dominó elhelyezésére két lehetőségünk van.

Ha az első dominót az ábra szerint állítva helyezzük el, a továbbiakban egy 2x14-es táblát kell lefednünk:



A másik lehetőség, hogy az első dominót fektetve helyezzük el. A másodikat ekkor csak párhuzamosan fölé helyezhetjük, s ezután a maradék 2x13-as táblát kell lefednünk.



5.7. feladat: Piros és kék színű üveggolyókból tíz golyó hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha nem akarjuk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?

5.8. feladat: Hányféleképpen lehet egy n-személyes padra fiúkat és lányokat leültetni úgy, hogy lány lány mellé ne ülhessen?

Inhomogén lineáris másodrendű rekurziók

Az $a_n = b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} + e$ inhomogén rekurzió különbségsorozata mindig homogén másodrendű rekurzió lesz. A különbségsorozat explicit alakja így az 5.1. – 5.3. feladatok megoldása alapján előállítható, innen - az elsőrendű inhomogén rekurziók megoldásához hasonlóan - összegzéssel kapjuk az (a) sorozat explicit alakját. A módszer tetszőleges e konstans esetén alkalmazható.

5.9. feladat: Adjuk meg az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n + 1$ ($n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$) rekurzív sorozat explicit alakját!

Megoldás: A sorozat kezdőtagjai: 0, 1, 2, 9, 22, 77, 210 stb.

Tekintsük az (a) sorozat (d) különbség-sorozatát: $d_i = a_i - a_{i-1}$ ($i \geq 1$). Ekkor a (d) sorozat tagjai 1, 1, 7, 13, 55, 133 stb. Az $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 1 - (a_{n-2} + 6a_{n-3} + 1) = a_{n-1} - a_{n-2} + 6(a_{n-2} - a_{n-3})$ átalakítás miatt $d_n = d_{n-1} + 6d_{n-2}$ ($n \geq 3$), vagyis a (d) sorozat már *homogén* másodrendű rekurzió, a $d_1 = d_2 = 1$ kezdeti feltételekkel. Ennek megoldása az 5.1. feladat alapján $d_n = u(-2)^n + v3^n$ alakú, a kezdeti feltételeket felhasználva $d_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n$, ($n \geq 1$).

Ezután írjuk fel rendre a szomszédos tagok különbségeit:

$a_1 - a_0 = d_1$,
$a_2 - a_1 = d_2$,
$a_3 - a_2 = d_3$,
…
$a_n - a_{n-1} = d_n$.

Az egyenletek összegzéséből $a_n - a_0 = \sum_{i=1}^{n} d_i$, vagyis $a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i$.

A keresett explicit alak $a_n = \frac{3}{10}\left(3^n - 1\right) - \frac{2}{15}\left((-2)^n - 1\right)$, ($n \geq 0$).

Ellenőrzésképp az n = 0, 1, 2, 3, 4 helyettesítéssel rendre a 0, 1, 2, 9, 22 értékeket kapjuk.

6. A másodrendű rekurziók alkalmazása

A másodrendű homogén és inhomogén rekurziók alkalmazásaként a valószínűségszámítás témaköréből vizsgálunk meg egy-egy feladatot, majd Bernoulli és Euler híres problémáját említjük meg.

Lineáris vagy egydimenziós bolyongás alatt azt értjük, amikor a "bolyongó pont" véletlen mozgást végez egy egyenes mentén. Az egyenes lehet pl. a koordinátarendszer x tengelye, vagy a síkbeli négyzetrácsból kiválasztva egy tetszőleges sor; ekkor a bolyongó pont adott valószínűséggel egy-egy egységnyit léphet pozitív vagy negatív irányba (ill. jobbra vagy balra).

Ennek megfelelően vegyünk fel egy h hosszúságú táblát, a mezőket balról jobbra sorszámozzuk 1-től h-ig. Helyezzük el a tábla valamelyik mezőjén a bolyongó pontot; legyen p a balralépés, q a jobbralépés valószínűsége.

A következő két feladatban a bolyongó pont mozgásával kapcsolatban egyrészt azt vizsgáljuk meg, hogy mekkora valószínűséggel hagyja el a pont jobbról, illetve balról a pályát; másrészt meghatározzuk a pálya elhagyásához szükséges átlagos lépésszámot.

Az ábrán a $h = 5$, $p = q = \frac{1}{2}$ esetet tüntettük fel, a pont kezdőhelye a 4. mező.

			o	
1	2	3	4	5

$p = \frac{1}{2}$ $\quad q = \frac{1}{2}$

Ez a modell egy játéknak is tekinthető. A ferdefoci nevű játékban felvehetünk a 0. és 6. fiktív mezőkön egy-egy kaput, s a két játékos, Jobb és Bal közül az veszít, akinek a kapujába kerül a véletlen bolyongást végző "labda".

A fenti helyzet a Bal játékosnak kedvező. A játék szimmetria okok miatt akkor lenne igazságos, ha a labda (a pont) kezdőhelye a 3. mező lenne.

A $p = q = \frac{1}{2}$ speciális valószínűségek esetén az érmedobálási modellt kapjuk meg. Érmedobálások esetén a balralépés megfeleltethető pl. a fej, a jobbralépés pedig az írás dobásának. Ha a pont kezdőhelye a 3. mező, akkor a bolyongási játék átlagos lépésszáma (amely a pálya elhagyásához szükséges) egyúttal megadja azt az átlagos dobásszámot is, amelyet ahhoz kell szabályos érmével végeznünk, hogy a fej és írás dobások eltérése három legyen.

Ez az egyszerű példa is mutatja, hogy a bolyongási modell általános vizsgálata igen hasznos. A feladatok bevezető tárgyalása megtalálható:

6.1. feladat: Legyen a h hosszúgágú pályán a balralépés valószínűsége p, a jobbralépés valószínűsége $q = 1 – p$. Melyik mezőre kell kezdetben helyezni a bolyongó pontot, hogy a játék közelítőleg igazságos legyen?

B							J
0	1	2	3	...		h	h+1
		p			q		

Megoldás: Legyen p_i annak a valószínűsége, hogy az i. mezőn tartózkodó bolyongó pont balról hagyja el a pályát. (Azt is mondhatjuk, hogy ekkora valószínűséggel nyer Jobb.) Az i értékét kell úgy meghatároznunk, hogy $p_i \approx \frac{1}{2}$ legyen.

A bolyongó pont vagy p valószínűséggel balra, vagy q valószínűséggel jobbra lép egy mezőt, és innen a későbbiekben p_{i-1}, illetve p_{i+1} valószínűséggel hagyja el balról a pályát. Ennek megfelelően a $p_i = p \cdot p_{i-1} + q \cdot p_{i+1}$ valószínűségi egyenletet írhatjuk fel. Célszerű a 0. és (h + 1). fiktív mezőket felvenni, ekkor $p_0 = 1$, $p_{h+1} = 0$.

Adott p, q és h értékek esetén megoldhatjuk a h darab egyenletből álló $p_i = p \cdot p_{i-1} + q \cdot p_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots , h$) egyenletrendszert és megkereshetjük, melyik i-re teljesül, hogy $p_i \approx \frac{1}{2}$. (Ha h értéke nagy, használhatunk számítógépet.)

Az általános eset vizsgálatakor a $p_i = p \cdot p_{i-1} + q \cdot p_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots , h$) rekurzió explicit alakját keressük a $p_0 = 1$, $p_{h+1} = 0$ peremfeltételek mellett.

A $qx^2 - x + p = 0$ karakterisztikus egyenlet vizsgálatát két részletben végezzük el.

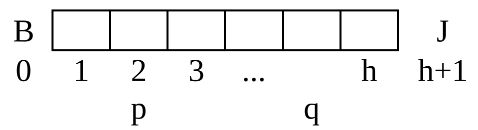
Első eset: Ha $p = q = \frac{1}{2}$, akkor az egyenlet gyökei egybeesnek, $x_{1,2} = 1$, ezért a (p) sorozat $p_i = a + bi$ alakú (lásd 5.2. feladat). A $p_0 = 1$ feltétel miatt $a = 1$, a $p_{h+1} = 0$ feltétel miatt $b = -\frac{1}{h+1}$. A (p) sorozat explicit alakja $p_i = 1 - \frac{i}{h+1} = \frac{h+1-i}{h+1}$.

Második eset: Ha $p \neq q$, akkor legyen pl. $p < q$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke $x_1 = \frac{p}{q}$, $x_2 = 1$. Legyen $c = \frac{p}{q}$, ekkor $p_i = ac^i + b$ alakban írható (lásd 5.1. feladat). A $p_0 = 1$ feltétel miatt $a + b = 1$, a $p_{h+1} = 0$ feltétel miatt $ac^{h+1} + b = 0$. Innen $a = \frac{1}{1-c^{h+1}}$ és $b = -\frac{c^{h+1}}{1-c^{h+1}}$. A (p) sorozat explicit alakja tehát $p_n = \frac{c^n - c^{h+1}}{1-c^{h+1}}$.

A $p_n \approx \frac{1}{2}$ egyenletet kell n-re megoldanunk. Az első esetben $n \approx \frac{h+1}{2}$, ami triviális a $p = q$ szimmetria miatt. A második esetben, amikor $p \neq q$, $n \approx \frac{\ln\left(\frac{1+c^{h+1}}{2}\right)}{\ln c}$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a kapott értékek csak a $\frac{p}{q}$ hányadostól függnek.

6.2. feladat: Legyen a h hosszúgágú pályán a balralépés valószínűsége p, a jobbralépés valószínűsége $q = 1 - p$. Melyik mezőre kell kezdetben helyezni a bolyongó pontot, hogy a játék a lehető legtovább tartson? (A bolyongásnak akkor van vége, ha a pont valamelyik oldalon elhagyja a pályát.)



Megoldás: Jelölje L_i az átlagos lépésszámot, ha a bolyongó pont az i. mezőn van. A feladat L_i maximumhelyének meghatározása.

A várható lépésszámra az $L_i = p(1 + L_{i-1}) + q(1 + L_{i+1})$ egyenletet írhatjuk fel. Az egyenlet első tagja úgy értelmezhető, hogy a pont p valószínűséggel az (i – 1). mezőre kerül, tehát lép egyet, plusz még annyit, amennyi átlagosan az (i – 1). mezőn állva várható, vagyis L_{i-1}-et. Hasonlóan a második tag a jobbralépést írja le. Ha a pont a fiktív mezőkre kerül, a játéknak vége lesz, tehát $L_0 = L_{h+1} = 0$. Az egyenletet átalakítva az $L_i = 1 + pL_{i-1} + qL_{i+1}$ (i = 1, 2, … , h) rekurzív összefüggést írhatjuk fel, $L_0 = L_{h+1} = 0$ a peremfeltételek.

Az egyenlet átrendezésével kapott $qL_{i+1} = L_i - pL_{i-1} - 1$ inhomogén másodrendű rekurzió megoldásához először meg kell oldanunk a különbségsorozat által kapható homogén másodrendű rekurziót (lásd 5.9. feladat). Ezután a peremfeltételeket illesztjük; ez a lépés valamivel bonyolultabb lesz, hiszen most nem a sorozat első két tagja adott.

Definiáljuk az (L) sorozat (d) különbség-sorozatát: $d_i = L_i - L_{i-1}$, (i = 1, 2, …). Ekkor a (d) sorozatra érvényes összefüggés $qd_{i+2} = d_{i+1} - pd_i$. Ha meg tudjuk adni (d) tagjait, akkor a

$d_1 = L_1 - L_0$,
$d_2 = L_2 - L_1$,
$d_3 = L_3 - L_2$,
…
$d_i = L_i - L_{i-1}$,
…
$d_{h+1} = L_{h+1} - L_h$

egyenletrendszer összegzéséből következne $L_{h+1} - L_0 = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$, és mivel $L_0 = 0$, $L_i = \sum_{j=1}^{i} d_j$, pl. $L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$.

A $qx^2 - x + p = 0$ karakterisztikus egyenlet vizsgálatát ismét két részletben végezzük el.

Első eset: Ha $p = q = \frac{1}{2}$, akkor az egyenlet két gyöke $x_{1,2} = 1$, ezért a (d) sorozat $d_i = a + bi$ alakú. Most a (d) sorozat peremfeltételeit nem ismerjük, a két állandó, a és b az (L) sorozat kezdeti feltételeinek felhasználásával határozható meg.

Először is, $L_{h+1} = 0$, és $L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$ miatt $(h+1)a + b\frac{(h+1)(h+2)}{2} = 0$, vagyis $a + b\frac{h+2}{2} = 0$.

Mivel $L_0 = 0$, $L_1 = d_1 = a + b$, $L_2 = L_1 + d_2 = a + b + a + 2b = 2a + 3b$. A másik egyenletet a és b meghatározásához (L) rekurzív alakjának felhasználásával kapjuk. Eszerint $L_2 = \frac{L_1 - pL_0 - 1}{q} = \frac{L_1 - 1}{\frac{1}{2}} = 2L_1 - 2$, így $2a + 3b = 2a + 2b - 2$. Az

$a + b\frac{h+2}{2} = 0$,
$2a + 3b = 2a + 2b - 2$

egyenletrendszer megoldása $b = -2$, $a = h + 2$, tehát $d_i = h + 2 - 2i$, s mivel $L_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, így $L_n = (h+2)n - 2\frac{n(n+1)}{2} = -n^2 + n + nh = n(h + 1 - n)$.

A $-n^2 + nh + n$ kifejezést teljes négyzetté alakítva, a maximumot $n \approx \frac{h+1}{2}$ helyen kapjuk, ami a pálya közepe, s amit a szemléletünk is sugall. Ha $h = 2k - 1$ alakú páratlan szám, akkor $n = k$, és $L_k = k^2$ a maximum.

Megjegyzés: Érdemes kihangsúlyozni, hogy ha $h = 2k - 1$ alakú, és $n = k$ (a pálya közepe), akkor a várható lépésszám minden esetben $L_k = k^2$. Ez a nevezetes eredmény pl. az érmedobálások szempontjából azt jelenti, hogy ahhoz, hogy a fejek és írások számának eltérése (először) k legyen, átlagosan k^2 dobásra van szükség. (És megfordítva: k^2 dobás esetén az eltérés közelítőleg k.)

Második eset: Ha $p \neq q$, akkor legyen pl. $p < q$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke $x_1 = \frac{p}{q}$, $x_2 = 1$. Legyen $c = \frac{p}{q}$, ekkor $d_i = ac^i + b$ alakban írható. Az egyik feltétel ismét az $L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$ összefüggésből adódik: $L_{h+1} = ac\left(\frac{1-c^{h+1}}{1-c}\right) + b(h+1) = 0$. Továbbá mivel $L_0 = 0$, $L_1 = d_1 = ac + b$, $L_2 = L_1 + d_2 = ac + b + ac^2 + b = ac(c+1) + 2b$.

A másik egyenletet (L) rekurzív alakjából kapjuk. Eszerint $L_2 = \frac{L_1 - pL_0 - 1}{q} = \frac{L_1 - 1}{q} = \frac{ac + b - 1}{q}$, tehát $ac(c+1) + 2b = \frac{ac + b - 1}{q}$. Az

$$ac\left(\frac{1-c^{h+1}}{1-c}\right) + b(h+1) = 0,$$

$$qac(c+1) + 2bq = ac + b - 1$$

egyenletrendszer megoldása $b = -\frac{1}{q-p}$, $a = \frac{h+1}{p\left(1-c^{h+1}\right)}$. Mivel $L_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, ezért

$$L_n = nb + ac\frac{1-c^n}{1-c} = -\frac{n}{q-p} + \frac{c(h+1)}{p\left(1-c^{h+1}\right)}\left(\frac{1-c^n}{1-c}\right) = -\frac{n}{q-p} + \frac{h+1}{q-p}\cdot\frac{1-c^n}{1-c^{h+1}}.$$

A kapott eredmény meglehetősen "csúnya", legegyszerűbb - adott h, p, q, c érték esetén - számítógép segítségével meghatározni a kifejezés szélsőértékét.

Konkrét példák:

Pl. $h = 4$ hosszúságú pályán, $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ $\left(c = \frac{1}{2}\right)$ értékeket választva annak valószínűsége, hogy a pont az i. mezőről indulva balról hagyja el a pályát, rendre $p_1 = \frac{15}{31}$, $p_2 = \frac{7}{31}$, $p_3 = \frac{3}{31}$, $p_4 = \frac{1}{31}$. Látható, hogy még az első mezőről indulva is, a játék Bal-nak kedvező. Az "igazságos hely" $n \approx \frac{\ln\left(\frac{1+c^{h+1}}{2}\right)}{\ln c}$ képletébe behelyettesítve $n \approx 0.96$.

A lépésszámok: $L_1 = \frac{147}{31}$, $L_2 = \frac{174}{31}$, $L_3 = \frac{141}{31}$, $L_4 = \frac{78}{31}$. A maximális lépésszámot $n = 2$ esetén kapjuk (a képlettel $n \approx 1{,}84$, $L_n = 5{,}64$).

Az alábbi táblázat az $L_x = L(x) = -\frac{x}{q-p} + \frac{h+1}{q-p}\cdot\frac{1-c^x}{1-c^{h+1}}$ függvény szélsőértékét tartalmazza különböző h értékek mellett. A paraméterek: $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ $\left(c = \frac{1}{2}\right)$.

Pálya hossza (h)	Szélsőértékhely (x)	Felvett szélsőérték (L(x))
2	1,25	2,21
3	1,56	3,78
4	1,84	5,64
5	2,08	7,72
6	2,29	9,97
7	2,48	12,34
8	2,64	14,79
9	2,79	17,32
10	2,93	19,89
20	3,86	47,08
30	4,43	75,40
40	4,83	104,19
50	5,14	133,24
60	5,40	162,47
70	5,62	191,81
80	5,81	221,24
90	5,98	250,73
100	6,13	280,28

Megjegyzés: Érdekes, hogy az "igazságos hely" és a "maximális lépésszámú hely" általában nem egyezik meg.

A bolyongásos feladatnak több általánosítása lehetséges. Megengedhetjük speciális lépésként a helybenmaradást; lehetséges, hogy a bolyongó pont nem egy egységgel mozdul el; felvehetünk gátakat, melyekről a pont visszaverődik; a bolyongás történhet egyenes helyett síkban stb.

6.3. feladat: Hányféleképpen lehet az nxn-es táblára n darab független bástyát úgy felállítani, hogy egyik se legyen a tábla főátlóján? (Két bástya független, ha nem ütik egymást.)

Megoldás: Jelöljük s_n-nel a kérdésre adandó választ, s nézzük meg, milyen rekurziót írhatunk fel s_n-re.

Minden oszlopba pontosan egy bástyát helyezhetünk; vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az első oszlop bástyáját a 2. mezőre tesszük (az első mező tiltott, hiszen a főátlón van). Ekkor a második oszlop bástyáját egyrészt tehetjük az első mezőre; ekkor a maradék (n – 2)x(n – 2)-es résztáblára kell n – 2 bástyát a feltételeknek megfelelő módon elhelyezni. Ezen elhelyezések száma s_{n-2}. Másrészt ha a második bástyát az i. mezőre tesszük ($i \neq 1$), akkor a 2. sor, valamint az első oszlop elhagyásával kapott (n – 1)x(n – 1)-es résztáblára kell n – 1 független bástyát úgy elhelyezni, hogy a főátlóba ne kerüljön bástya; ezen elhelyezések száma s_{n-1}.

Tehát ha az első bástyát a 2. mezőre tesszük, $s_{n-2} + s_{n-1}$ elhelyezés adódik. Mivel az első bástya 3., 4., … , n. mezőre történő elhelyezései egyenértékűek, az összes bástya elhelyezésére $s_n = (n-1)(s_{n-2} + s_{n-1})$ rekurziót kapjuk. (A kezdeti értékek: $s_1 = 0$ és $s_2 = 1$.)

A rekurzió megoldása elég bonyolult. Először átalakítjuk a kifejezést: $s_n - ns_{n-1} = -(s_{n-1} - (n-1)s_{n-2})$, s ezt felírjuk rendre a 3, 4, 5, …, n esetekre:

$s_3 - 3s_2 = -(s_2 - 2s_1)$,
$s_4 - 4s_3 = -(s_3 - 3s_2)$,
…
$s_n - ns_{n-1} = -(s_{n-1} - (n-1)s_{n-2})$.

Az egyenleteket összeszorozva kapjuk: $s_n - ns_{n-1} = (-1)^{n-2}(s_2 - 2s_1) = (-1)^n$, ami már elsőrendű rekurzió, s alkalmazhatjuk a "hagyományos" megoldási módszereket (általános képlet: 4.3. feladat).

Elegáns megoldási lehetőség, ha leosztjuk n!-sal az egyenletet: $\frac{s_n}{n!} - \frac{s_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$, s felírjuk az egyenleteket rendre 2, 3, … , n-re:

$$\frac{s_2}{2!} - \frac{s_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!},$$
$$\frac{s_3}{3!} - \frac{s_2}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!},$$
…
$$\frac{s_n}{n!} - \frac{s_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Az egyenletek összeadása után $\frac{s_n}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$ adódik, tehát az explicit alak: $s_n = n!\left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$.

Megjegyzések: Ezt a híres problémát Nicolaus Bernoulli tárgyalta először, majd Leonhard Euler is foglalkozott vele. A feladat ismertebb az "elcserélt levelek problémája"-ként: "Hányféleképpen tehetünk n darab levelet n megcímzett borítékba úgy, hogy egyik levél sem kerül az eredeti címzetthez?" A megoldást általában a logikai szita módszerével végezzük el (lásd pl. [8]), de a fenti rekurziós megoldás is igen szellemes.

7. Egyéb rekurziók

Ebben a fejezetben foglalkozunk a magasabbrendű, nemlineáris és szimultán rekurziókkal.

Magasabbrendű lineáris rekurziók:

A magasabbrendű lineáris rekurziók a másodrendűekhez hasonlóan oldhatók meg. A számítások bonyolultabbá válnak és gondot okozhat a karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása.

7.1. feladat (Arany Dániel verseny 1985.): "Az A_1, A_2, … sorozatra az $A_{n+1} = A_n - A_{n-1} + A_{n-2}$ képlet érvényes, $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$. Mennyi A_{1985}?

Első megoldás: Felírjuk a sorozat explicit alakját. A karakterisztikus egyenlet $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1) = 0$, ennek gyökei 1, i, – i (ahol $i = \sqrt{-1}$ a képzetes egység). Az $A_n = a\cdot 1^n + bi^n + c(-i)^n$ képletben az a, b, c együtthatókat az $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$ kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Az n = 1, 2, 3 behelyettesítés után kapott egyenletrendszer:

$1 = a + bi - ci,$
$2 = a - b - c,$
$2 = a - bi + ci.$

Az első és harmadik egyenletből $a = \frac{3}{2}$, az első egyenletből $c - b = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$, a másodikból $c + b = -\frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer megoldása $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{i-1}{4}$ és $c = -\frac{i+1}{4}$.

A sorozat explicit alakja $A_n = \frac{3}{2} + \frac{i-1}{4} i^n - \frac{i+1}{4}(-i)^n$. Mivel $i^n = i^{n+4}$, ezért $A_n = A_{n+4}$ rögtön következik; továbbá $i^{1985} = i^1$, s így $A_{1985} = A_1 = 1$.

Második megoldás: Persze a feladat kitűzői nyilván nem erre a “nagyágyút használó” megoldásra gondoltak.

$A_{n+1} = A_n - A_{n-1} + A_{n-2} = (A_{n-1} - A_{n-2} + A_{n-3}) - A_{n-1} + A_{n-2} = A_{n-3}$, tehát a sorozat minden negyedik tagja egyenlő. Mivel $1985 = 496\cdot 4 + 1$, ezért $A_{1985} = A_1 = 1$.

Harmadik megoldás: Az első néhány tag felírása után: 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, ... sejthető, hogy $A_{4k} = A_{4k+1} = 1$ és $A_{4k+2} = A_{4k+3} = 2$. Ezeket az összefüggéseket teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

7.2. feladat: Hányféleképpen mehetünk fel egy 20 szintes lépcső tetejére, ha egyszerre egy, kettő vagy három lépcsőt léphetünk?

Útmutatás: Jelöljük l_n-nel, ahányféleképp egy n hosszú lépcső tetejére fel tudunk menni 1, 2 vagy 3 hosszú lépésekkel. (A kérdés l_{20}.) A feladat az $l_n = l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-3}$ $(n \geq 4)$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 4$ rekurzió megoldására vezethető vissza. Az $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van. A gyökök közelítő eljárással, négy tizedes jegy pontossággal: $x_1 = 1{,}8393$; $x_2 = 0{,}4197 + 0{,}6063i$; $x_3 = 0{,}4197 - 0{,}6063i$.

Az $l_n = u \cdot x_1^n + v \cdot x_2^n + w \cdot x_3^n$ $(n \geq 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 4)$ explicit alak a gyökök közelítő értéke és a kerekítési hibák miatt nem lesz pontos. Ha a diákok - az időigényes számolás ellenére - meghatározzák az u, v, w együtthatókat, érdemes az n = 20 helyettesítéssel, valamint a rekurzív formula ismételt alkalmazásával kapott (tehát pontos) l_{20} értékeket összehasonlítani. Tanulságos az összehasonlítás nagyobb n értékek esetén is. (Minden osztályban van olyan diák, aki egyszerű programot tud írni (l) tagjainak meghatározására.)

Gyakorló feladatok:

7.3. feladat (KöMaL F.1870.): Adjuk meg az alábbi sorozatok explicit alakját ($n \geq 0$):
a) $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
b) $a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$;
c) $a_{n+3} = a_{n+2} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$;

Nemlineáris rekurziók:

A nemlineáris rekurziók matematikai tárgyalása lényegesen nehezebb. Megoldásukra általános eljárás nem ismert, általában az aktuális feladat specialitását igyekszünk kihasználni. Így jártunk el a 2.1. és 2.2. feladatokban is. Két további példa:

7.4. feladat (Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 1992.): Az (a) sorozatra $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$, ha $n \geq 1$. Határozzuk meg az n. tagot.

Megoldás: A rekurzió átírható: $\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{3}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$, majd az $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}$ sejtést indukcióval igazolhatjuk.

7.5. feladat: Hányféleképpen lehet átlókkal háromszögekre bontani egy síkbeli konvex n-szöget?

Útmutatás: A feladatot 1751-ben tűzte ki Euler Christian Goldbach számára. Azóta nagyszámú problémát visszavezettek erre a feladatra, a megoldásként kapott számokat Catalan-számoknak nevezzük. Most csak a rekurzió felállításával foglalkozunk, a téma bőséges tárgyalása megtalálható a szakirodalomban.

Jelöljük a keresett felbontások számát S_n-nel. A sokszög csúcsait az 1, 2, … , n számokkal jelölve ($n \geq 3$) pl. az $\overline{1n}$ oldal mindig egy háromszög alapja lesz. Ha az alappal szemköztes csúcs pl. r, akkor az $\overline{1nr}$ háromszög egyik oldalán egy r-szög, másik oldalán egy $(n + 1 - r)$-szög keletkezik. Ezek felbontása S_r, ill. S_{n+1-r}-féleképpen történhet, innen S_n értékéhez egy $S_r \cdot S_{n+1-r}$ tag adódik. Mivel r rendre 2, 3, … , n – 1 lehet, ezért $S_n = S_2 \cdot S_{n-1} + S_3 \cdot S_{n-2} + \ldots + S_{n-1} \cdot S_2$. (Itt a forma kedvéért felvett $S_2 = 1$.)

A Catalan-rekurzió megoldását lásd pl. a [2], [8] szakirodalmakban.

Szimultán rekurziók:

Szimultán rekurziók esetében több, egymásra kölcsönösen hivatkozó sorozat rekurzív alakja adott. Három példát mutatunk, mindegyiket rövid útmutatással.

7.6. feladat (Fazekas verseny 1982.): Határozzuk meg az (a) és (b) sorozatok n. tagját n függvényében, ha $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 2b_n$; valamint $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n + 2a_n$. ($n \geq 1$.)

Útmutatás: Egy lehetséges megoldási eljárás, hogy kiküszöböljük pl. a (b) sorozat rekurzív alakjából az (a) tagjait. Pl.: a második egyenletből $2a_n = b_{n+1} – b_n$; az első egyenlet kétszeresébe ezt visszaírva $2a_{n+1} = b_{n+1} – 5b_n$; s ezt a másodikba visszahelyettesítve (egy indexeltolással) $b_{n+2} = 2b_{n+1} – 5b_n$. A b_2 kezdőtagot könnyen kiszámolhatjuk, s ekkor ez már egyváltozós homogén lineáris rekurzió, kidolgozott megoldási eljárással.

7.7. feladat: Legyenek $0 < b_1 < a_1$ adott valós számok, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}$, ha $n \geq 1$. Határozzuk meg az (a) és (b) sorozatok határértékét.

Útmutatás: $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség miatt mindig teljesül. (b) monoton növő, (a) monoton csökkenő sorozat, s mivel mindkét sorozat korlátos, van határértékük. Mivel $0 < a_{n+1} – b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} =$ $\frac{a_n - b_n}{2} \cdot \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} < \frac{a_n - b_n}{2}$, ezért $a_n – b_n < \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}$**,** tehát a két sorozat határértéke megegyezik. Utolsó észrevétel: $a_{n+1} \cdot b_{n+1} = a_n \cdot b_n$, ezért a sorozatok határértéke $\sqrt{a_1 b_1}$, a kezdőtagok mértani közepe.

7.8. feladat: Az (a), (b), (c) sorozatokat a következőképpen képezzük: $a_n = b_{n–1} – c_{n–1}$, $b_n = c_{n–1} – a_{n–1}$, $c_n = a_{n–1} – b_{n–1}$, ha $n \geq 2$, s legyen $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$. Adjuk meg az (a), (b), (c) sorozatok explicit alakját!

Útmutatás: A feladat megtalálható pl. a [4] szakirodalomban, más megfogalmazásban általános iskolások számára kitűzött feladatként. A sorozatok néhány tagját felírva szabályszerűséget vehetünk észre, mely továbböröklődik.

Többváltozós rekurziók:

Középiskolában ritkán találkozunk velük; csak a “megemlékezés” szintjén mutatunk két példát a kétváltozós rekurziókra.

7.9. példa: A $C(n, k) = C(n – 1, k – 1) + C(n – 1, k)$ rekurzió – a Pascal-háromszög képzési szabálya alapján – a $C(n, k) = \binom{n}{k}$ értékeket adja, a $C(k, 0) = C(0, k) = 1$ ($k \in$ N) kezdeti feltételek mellett.

7.10. példa: Egy érdekesség: az $f(x, y) = f(x – 1, y + 1) + f(x, y – 1)$ kétváltozós rekurzió $f(n, 0)$ tagja, ha $f(0, y) = 1$ és $f(x, 0) = f(x – 1, 1)$, ($x, y, n \in Z^+$) a korábban említett Catalan-számokat adja.

8. Érdekességek, trükkök és problémák

8.1. feladat: Adjuk meg az (a) sorozat explicit alakját, ha $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, és $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$, ha $n \geq 3$.

Útmutatás: Az egyenlet átalakításával $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ (= állandó), tehát egy $-\frac{2}{3}$ kvóciensű mértani sorozatról van szó.

8.2. feladat: Tekintsük az 1, 11, 111, … sorozatot. A sorozat mely tagjai oszthatók 7-tel?

Útmutatás: Többféle lehetséges megoldás adható. Az alábbinak az az érdekessége, hogy ritkán alkalmazott eljárást használunk: az “explicit” alakból rekurzívra térünk át.

A sorozatot az $a_1 = 1$, $a_n = 10a_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$) rekurzió írja le. A tagok 7-tel való osztási maradékai 1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, … 6-hosszú ismétlődő ciklust alkotnak. Minden 6. tag osztható 7-tel, tehát a 6k darab 1-esből állók ($k \in Z^+$).

A sorozat explicit alakja egyébként $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

8.3. feladat: (Kanada, 2001.) Amikor Mark felmegy a lépcsőházban, lépésenként 1, 2 vagy 3 fokot halad egyszerre.

a) Hányféleképpen tud felmenni a 10-hosszú lépcsőn? (Az utolsó fokon kell befejezni az utat; két út akkor azonos, ha minden lépésben ugyanarra a lépcsőfokra lép.)

b) Hányféleképpen tud felmenni a 10-hosszú lépcsőn, ha a 6. lépcsőfokra nem lép rá? (Korábban már egyszer elesett ott.)

Útmutatás: a) Az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, $n \geq 2$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ rekurzió írja le a folyamatot. Eredmény: $a_{10} = 274$.

b) Jelöljük b_n-nel a 6. lépcsőt kihagyó utak számát. Ekkor $b_n = a_n$, ha $n < 6$; $b_6 = 0$; majd b_7-től kezdve ismét alkalmazhatjuk a $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ rekurziót. Eredmény: $b_{10} = 106$.

8.4. feladat: $a_{20} = 2$, $a_{100} = 5$, $a_{n+1} = -a_n - a_{n-1} + 3$, ha $n \geq 2$. Határozzuk meg a sorozat n. tagját.

Útmutatás: Természetesen vizsgálhatjuk az $x^2 + x + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit, de mivel ez a feladat is általános iskolásoknak szól (más megfogalmazásban), nyilván egyszerűbb megoldást is találhatunk.

Az $a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 3$ átalakításból következik, hogy a sorozat bármely három szomszédos tagjának összege állandó. Írjunk fel néhány kezdőtagot: a, b, 3 – a – b, a, b, 3 – a – b stb., ekkor észrevehetjük a periodicitást.

A rekurzív formulák azonban egyes esetekben nem alkalmazhatók. A következő feladat arra példa, amikor *nem használható* a rekurzív gondolatmenet.

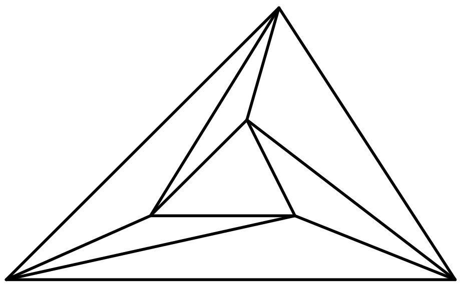
8.5. feladat (Arany Dániel verseny 1980.): "Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhogyan kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül, azok ne essenek egy egyenesre! Igazoljuk, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma csak páratlan szám lehet!"

Első (hibás) megoldás: Tegyük fel, hogy a háromszög belsejében n – 1 pontot felvéve H_{n-1} kis háromszöget kapunk. Az n. pont valamelyik kis háromszög belsejébe kerül. Ha ennek csúcsaival összekötjük a pontot, a felbontást adó háromszögek száma kettővel nő. Így a $H_n = H_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$, $H_1 = 3$) rekurziót kapjuk, melynek megoldása $H_n = 2n + 1$ ($n \geq 1$).

Mi a hiba?

Egyrészt elképzelhető, hogy adott n esetén H_n nem állandó; esetleg a kapott háromszögek száma attól is függ, hogy hogyan kötöttük össze a pontokat egymással.

Másrészt az sem biztos, hogy a rekurziós lépést megengedik a geometriai feltételek. Az ábrán látható elrendezésre a fenti megoldás nem alkalmazható (bár helyes eredményt kapunk).



Ugyanígy hibás a rekurzióval rokon teljes indukció elvén alapuló megoldás is .

Második (ezúttal helyes) megoldás: Tegyük fel, hogy a háromszög belsejében n pontot vettünk fel és h darab háromszöget kaptunk. A háromszögek belső szögösszege $h \cdot 180°$. Ezt a szögösszeget két részből kapjuk meg: egyrészt az n pont körüli teljes szögekből, $n \cdot 360°$, másrészt az eredeti háromszög három szögéből, ami 180°-ot ad. Innen $h \cdot 180° = n \cdot 360° + 180°$, $h = 2n + 1$, vagyis a háromszögek száma valóban páratlan.

A megoldásból az is következik, hogy H_n állandó.

Hasonló megoldást kapunk, ha a szakaszok számát tekintjük ismeretlennek, vagy ha közvetlenül alkalmazzuk az Euler-féle poliéder-tétel síkbeli változatát.

8.6. feladat: Egy kör kerületén felveszünk n pontot. Legfeljebb hány részre osztják a pontokat összekötő szakaszok a körlemezt?

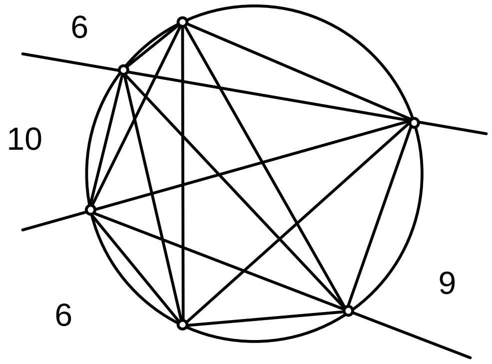
Megoldás: Ez a nevezetes feladat típuspélda arra, hogy mennyire kell vigyázni az általánosításokkal.

Adott pontok esetén a lehető legtöbb tartományt akkor kapjuk, ha semelyik ponton nem megy át kettőnél több összekötő szakasz. A továbbiakban csak ilyen pontelrendezést vizsgálunk. Jelöljük a tartományok számát a (t) sorozattal.

Nézzük meg az alábbi táblázatot:

Pontok száma: n	Tartományok száma: t_n
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Ez a táblázat a tanulók többségét a helytelen $t_n = 2^{n-1}$ sejtésre csábítja. Sajnos $t_6 = 31$ (ábra).



A rekurzív összefüggés felállításához tegyük fel, hogy az (n – 1) pontot összekötő szakaszok maximálisan t_{n-1} részre osztják a körlemezt. Sorszámozzuk be a pontokat 1-től (n – 1)-ig valamelyik körüljárási irány szerint, s vegyük fel az n. pontot pl. az 1. és (n – 1). pont között. Ha most az n. pontból behúzunk egy új szakaszt valamelyik csúcsba, annyi új tartományt kapunk, ahány metszéspontja van az új szakasznak a korábbiakkal, plusz még egyet. Összeszámoljuk a metszéspontokat:

Ha az első ponttal kötjük össze az n. pontot, 0 metszéspontot kapunk. (Tehát egy új tartományt.)

Ha a második ponttal kötjük össze az n. pontot, akkor (n – 3) metszéspont keletkezik, ui. ennyi ponttal kötöttük korábban össze a "levágott" első pontot.

Ha a harmadik ponttal kötjük össze, az összes olyan szakaszt elmetszi az átló, amelyik az első és a második pontot köti össze a kimaradó (n – 4) ponttal; tehát (n – 4)·2 metszéspont keletkezik.

Általában ha az i. ponttal kötjük össze, (n – i – 1)(i – 1) metszéspontot kapunk.

Az (n – 2). ponttal összekötve az 1, 2, ... , (n – 3). pontokhoz egy-egy metszéspont tartozik, így 1·(n – 3) metszéspont lesz.

Végül az (n – 1)., utolsó ponttal összekötve nem kapunk új metszéspontot.

Az összes metszéspont száma $\sum_{i=2}^{n-2}(n-i-1)(i-1)$, ehhez adódik még pontonként egy tartomány, összesen (n – 1). Ebből felírhatjuk a $t_n = t_{n-1} + n - 1 + \sum_{i=2}^{n-2}(n-i-1)(i-1)$ rekurzív összefüggést. Most összegezhetjük a $\sum_{i=1}^{n-2}(ni - n - i^2 + 1)$ kifejezést. (Egy másik szép megoldáshoz jutunk, ha generátorfüggvényeket használunk.)

$\sum_{i=1}^{n-2}(ni - n - i^2 + 1) = \sum_{i=1}^{n-2}1 + n\sum_{i=1}^{n-2}i - \sum_{i=1}^{n-2}n - \sum_{i=1}^{n-2}i^2 = (n-2) + \frac{n(n-2)(n-1)}{2} - n(n-2) - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$. A műveletek elvégzése után $\sum_{i=1}^{n-2}(ni - n - i^2 + 1) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ adódik, a keresett rekurzív kapcsolat $t_n = t_{n-1} + n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$, ahol $n \ge 2$.

Vegyük észre, hogy $n \ge 4$ esetén $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \binom{n-1}{3}$, így felírhatjuk, hogy

$t_1 = 1$,
$t_2 = t_1 + 1$,
$t_3 = t_2 + 2$,
$t_4 = t_3 + 3 + \binom{3}{3}$,
$t_5 = t_4 + 4 + \binom{4}{3}$,
…
$t_n = t_{n-1} + (n-1) + \binom{n-1}{3}$.

Az egyenletek összeadása után $t_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots \binom{n-1}{3}$. A $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots \binom{n-1}{3}$ összeg szép egyszerű alakra hozható a “teleszkopikus” módszerrel: $\binom{3}{3} = \binom{4}{4}$, $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$, $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$ stb., így $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots \binom{n-1}{3} = \binom{n}{4}$.

A forma kedvéért $1 = \binom{n}{0}$ és $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ bevezetésével $t_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$.

Megjegyzés: Ez a példa nemcsak azért került ebbe a fejezetbe, mert a kezdeti szép 1, 2, 4, 8, 16 értékek könnyen csábíthatnak hamis sejtésre; hanem azért is, mert egyfajta elrettentésnek szántuk. Ugyanis több más, egyszerűbb megoldás is létezik erre a feladatra, tehát semmiképpen sem érdemes a rekurzív megoldást használni.

Egy másik megoldási lehetőség pl. az Euler-féle C + L = E + 1 poliédertétel alkalmazása.

Az n-szög esetén $\binom{n}{4}$ metszéspontja lesz az átlóknak, tehát $C = n + \binom{n}{4}$. Az átlók metszéspontjából 4 él indul ki, a sokszög minden csúcsából n + 1, így az élek száma $\frac{1}{2}\left(4 \cdot \binom{n}{4} + n(n+1)\right)$. Visszahelyettesítve az $L = E - C + 1$ egyenletbe, $L = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ adódik.

8.7. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az azonos kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe maximális.

Megoldás: Erre a nevezetes feladatra több geometriai megoldás is közismert; most egy analitikus bizonyítást mutatunk (amely messze nem a legegyszerűbb).

Tegyük fel, hogy a háromszög nem szabályos, pl. AC ≠ BC. Ekkor rögzítjük a háromszög BC oldalát, az A csúcsot pedig úgy mozgatjuk, hogy a kerület állandósága mellett a terület maximális legyen. Az A csúcs egy ellipszisíven mozog, az extremális helyzetben BA’ = A’C.

Második lépésben az A’C oldalt rögzítjük; a maximális területet – állandó kerület mellett – olyan A’B’C háromszög éri el, amelyikben A’B’ = B’C.

Ezután az eljárást elölről folytatjuk. (Természetesen bármikor előfordulhat, hogy nem kapunk új háromszöget. Ekkor azonban 2 – 2 oldal páronként megegyezik, vagyis elértük a szabályos háromszöget; az eljárás befejeződik.)

Ha az eljárás során kapott oldalak hosszának van határértéke, akkor készen is vagyunk: határhelyzetben a maximális területű háromszöget kapjuk.

Legyen tehát a három oldal a, b, k – a – b (ahol a k kerület állandó). Az első lépésben a kapott oldalak hossza a, $\frac{k-a}{2}$, $\frac{k-a}{2}$; a második lépésben $\frac{k+a}{4}$, $\frac{k-a}{2}$, $\frac{k+a}{4}$; a harmadikban $\frac{k+a}{4}$, $\frac{3k-a}{8}$, $\frac{3k-a}{8}$ és így tovább. Az $y_0 = \frac{k-a}{2}$, $y_1 = \frac{k+a}{4}$, $y_{n+2} = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)$, $(n \ge 0)$ rekurzív sorozat tagjai felváltva a háromszög-oldalakat adják. (A páros indexűek az aktuális AC, a páratlan indexűek az aktuális BC oldalt.) Ezt a homogén másodrendű rekurziót a tanult módon oldahatjuk meg.

A $2x^2 - x - 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Az $y_n = u \cdot 1^n + v \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ általános tagot a kezdeti y_0, y_1 értékekből határozhatjuk meg. A felírható egyenletrendszerből $u = \frac{k}{3}$ és $v = \frac{3k-a}{6}$, innen $y_n = \frac{k}{3} + \frac{3k-a}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Ennek a sorozatnak $\frac{k}{3}$ a határértéke (n paritásától függetlenül), vagyis eredményül a szabályos háromszöget kapjuk.

8.8. feladat: Egy számítógéppel a következő sorozatot vizsgáljuk:

Legyen $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, s minden további tagra $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \ge 2)$. A gép a rekurzív összefüggés egymásutáni alkalmazásával rendre kiszámolja a sorozat tagjait. Mit várunk pl. a_{200} értékére?

Útmutatás: Megmutatható, hogy az explicit alak $a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, így a_{200} értékére egy 0-hoz nagyon közeli (pozitív) számot várnánk. *A valóságban azonban teljesen más történik;* egy bizonyos idő után egyre nagyobb abszolút-értékű számokat kapunk. A konkrét futtatási eredmény $a_{186} \approx -1{,}33\cdot 10^{26}$ értéket ad, majd túlcsordulás lép fel, a program futása megszakad.

Mi lehet ennek az oka?

A probléma részletes elemzése megtalálható sok címen. Most csak annyit, hogy a számítógépek alkalmazásával vigyázni kell; a gépi számhalmaz több tulajdonságában eltér a valós számok halmazától. (Ráadásul a tapasztalt hiba *elvi hiba*, tehát nem küszöbölhető ki; ugyanígy megjelenik akkor is, ha pontosabb (nagyobb tartományú) gépi számhalmazzal dolgozunk, legfeljebb nem a 186. tag környékén, hanem később.)

9. Gyakorló feladatok

A cikk korábbi részeiben már mutattunk példákat az érettségi és felsőfokú felvételi feladatok közül. Az alábbiakban néhány, a rekurzív sorozatok témaköréhez kapcsolódó további érettségi, felvételi -és versenyfeladatot sorolunk fel, megoldások nélkül.

Érettségi feladatok:

9.1. feladat: (ZK. 3498.) Határozzuk meg a következő összeget: $1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \ldots + 1\cdot 10 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \ldots + 2\cdot 10 + 3\cdot 4 + \ldots + 8\cdot 9 + 8\cdot 10 + 9\cdot 10$.

9.2. feladat: (ZK. 3531.) Az (a) számtani sorozatot így adjuk meg: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = xa_n + ya_{n-1}$ ($n \geq 2$). Határozza meg az x és y értékét!

9.3. feladat: (ZK. 3615.) Tíz év alatt minden év elején 4000 forintot teszünk a takarékba. Tíz év leteltével 4000 forintot veszünk ki évenként. Mennyi pénzünk lesz a huszadik év végén, ha 5%-os a kamat?

További hasonló kamatszámításos feladatok: ZK. 3616, ZK. 3621.

9.4. feladat: (ZK. 3641.) Egy sorozatra $a_1 = 1$ és $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Bizonyítsa be, hogy $a_n = 2^n - 1$!

Egyetemi felvételi feladatok:

9.5. feladat: (1987. pótfelvételi) Egy számsorozat első eleme 2, második eleme 3, és $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, ha $n \geq 3$. Írja fel a sorozat n-edik elemét n függvényeként! Mivel egyenlő a sorozat első n elemének összege?

9.6. feladat: (1995, KMF nulladik évfolyam) Hányféleképpen lehet egy 7 fokból álló létra tetejére feljutni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőfokot léphetünk?

9.7. feladat: (1996, műszaki): Melyek azok az a_1, a_2, … , a_n, … mértani sorozatok, amelyben $a_1 \neq 0$, és minden n pozitív egész számra az $a_n = \frac{1}{6}(a_{n+2} - a_{n+1})$ egyenlőség érvényes?

9.8. feladat: (1997. május 21. de.) Egy sorozat első n eleme $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, … , $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$.

a) Fejezze ki a_n-et n függvényeként!

b) Legalább hány elemet kell összeszorozni az első elemtől kezdve, hogy a szorzat értéke 50000-nél nagyobb legyen?

9.9. feladat: (pótfelvételi 2001. június 5. du.) Egy sorozat első tagja $a_1 = 1$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot a_n$. Számítsa ki a sorozat n-edik tagját és első n tagjának szorzatát!

9.10. feladat: (2003. május 19. du.)

Adott a d differenciájú (a_n) számtani sorozat. A sorozathoz található olyan p és q valós szám, hogy minden 1-nél nagyobb n természetes szám esetén $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$. Határozza meg p és q lehetséges értékeit, ha (a_n)

a) nem állandó sorozat;

b) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1 \neq 0$;

c) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1 = 0$.

Versenyfeladatok:

9.11. feladat: (Belorusszia, 1995, 11. o.) Az a_n sorozatra $a_0 = a_1 = 1$ és $a_{n+2} = (n + 3)a_{n+1} - (n + 1)a_n$, ha $n \geq 0$. Határozzuk meg a_{1995} értékét.

9.12. feladat: (British Mathematical Olympiad 1998 Round 1) Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következőképpen: $a_1 = 19$, $a_2 = 98$ és ha $n \geq 1$, akkor a_{n+2} legyen $a_n + a_{n+1}$ maradéka 100-zal osztva. Mennyi $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1998}^2$ maradéka 8-cal osztva?

9.13. feladat: (IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, 2000, 12. o.) Az A_1, A_2, A_3, … , A_{100} pontok egy körvonalon helyezkednek el. Hányféleképpen lehet legfeljebb 100 szín felhasználásával kiszínezni a pontokat úgy, hogy a szomszédos pontok különböző színűek legyenek?

További versenyfeladatok találhatók pl. a külföldi országok középiskolai matematikai versenyei közötti válogatásban:, az algebrai és kombinatorikai rekurziók között.

Felhasznált és javasolt irodalom

[1] Berg: Másodrendű differenciaegyenletek (Tankönyvkiadó, Bp, 1982)
[2] Dörrie: A diadalmas matematika (Gondolat Kiadó, Bp,1965)
[3] dr. Gerőcs: A Fibonacci-sorozat általánosítása (Tankönyvkiadó, Bp, 1988)
[4] Imrecze - Reiman - Urbán: Fejtörő feladatok felsősöknek
[5] Középiskolai Matematikai Lapok évfolyamai
[6] Máté: Rekurzív sorozatok (Tankönyvkiadó, Bp, 1980)
[7] Török: A Fibonacci-sorozat (Tankönyvkiadó, Bp, 1984)
[8] Vilenkin: Kombinatorika (Műszaki Könyvkiadó, Bp, 1987)
[9] Válogatás külföldi nemzeti matematikaversenyek feladataiból