Kubatov Antal (Kaposvár)

Ptolemaios-tétele, Casey-tétel, feladatok

Ptolemaios-tétel:
Ha egy konvex négyszög szemközti oldalai a és c, ill. b és d; átlói e és f, akkor $a \cdot c + b \cdot d \geq e \cdot f$. Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha a négyszög húrnégyszög.

Ptolemaios Klaudios (Kr.u 100-169)
Fő műve: Almageszt
Geocentrikus világnézet „kitart” Kopernikuszig.

Nagyon pontosan kiszámolta a szabályos 720 oldalú sokszög egy oldalának a hosszát. $\pi \approx \frac{327}{120} = 3{,}141\dot{6}$

Dr. Lévárdi László – Sain Márton : Matematika – történeti feladatok
Tihanyi Miklós: Ptolemaios tétele a húrötszögben / KöMaL 1934. márc. 15 /
Mihalovics Sándor: Ptolemaios tételéhez kapcsolódó megjegyzések
Sklarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott feladatok és tételek 2/1
Reiman István: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994
Eric Weisstein Matematikai enciklopédiájában az ide vonatkozó tételek:
http://mathworld.wolfram.com/CaseysTheorem.html
http://mathworld.wolfram.com/FuhrmannsTheorem.html
http://mathworld.wolfram.com/PursersTheorem.html

Feladatok

P.0. Bizonyítsuk be a Ptolemaios-tételt.

P.1. Bizonyítsuk be, hogy ha M az ABC szabályos háromszög köré írt körének (rövidebbik) BC íven lévő pontja, akkor AM=BM+MC.

P.2. Mutassuk meg, hogy ha a P pont az ABCD négyzet köré írható kör rövidebbik CD ívén fekszik, akkor PA(PA+PC)=PB(PB+PD).

P.3. Adott az ABCD paralelogramma és egy az A ponton átmenő olyan kör, mely az AB oldalt P-ben, az AC átlót Q-ban, az AD oldalt pedig R pontban metszi. Mutassuk meg, hogy ekkor $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.

P.4. Az ABC egyenlőszárú háromszögben AC=BC. A háromszög köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyük fel a P pontot. Bizonyítsuk be, hogy ha D a C-ből PB-re bocsátott merőleges talppontja, akkor PA+PB=2PD.

P.5. Jelölje O az ABC háromszögbe írt kör középpontját. Az ABC háromszög köré írt kört az A, B ill. C csúcsból induló szögfelező rendre az F_A, F_B, F_C pontban metszi.
Bizonyítandó, hogy $\frac{AO}{OF_A} + \frac{BO}{OF_B} + \frac{CO}{OF_C} \geq 3$

P.6. Jelölje R ill. r a háromszög köré, ill. a háromszögbe írt kör sugarát, d_A, d_B, d_C pedig a körülírt kör középpontjának a háromszög oldalaitól vett távolságait. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög hegyesszögű, akkor $d_A + d_B + d_C = R + r$. Hogyan módosul az összefüggés, ha a háromszög nem hegyesszögű?

P.7. Bizonyítsuk be, hogy minden hegyesszögű háromszögben AM+BM+CM=2(R+r), ahol M a háromszög magasságpontja, r a beírt, R pedig a körülírt kör sugara.

P.8. Az ABC háromszög A csúcsból induló szögfelezője a háromszög köré írható kört A_1-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög BC oldala felezi az AA_1 szakaszt, akkor $b+c=a\cdot\sqrt{2}$.

P.9. Egy szabályos kilencszög átlói növekvő sorrendben e_1, e_2, e_3. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{1}{e_1}\left(1+\frac{e_2}{e_3}\right)=\frac{1}{e_2}\left(1+\frac{e_3}{e_1}\right)$

P.10. Az ABCDE szabályos ötszög köré írható kör rövidebbik AE ívének egy pontja legyen P. Bizonyítsuk be, hogy ekkor PA+PC+PE=PB+PD.

P.11. Legyen $A_1, A_2, ..., A_n$ egy páratlan oldalszámú szabályos sokszög, M pedig a sokszög köré írható kör A_1A_n ívének egy pontja. Bizonyítsuk be, hogy az M pontot a páratlan sorszámú csúcsokkal összekötő szakaszok együttes hossza egyenlő a páros sorszámú csúcsokkal összekötő szakaszok együttes hosszával.

P.12. Megadható-e a síkon 2004 pont úgy, hogy bármely három ne legyen egy egyenesen, és bármely kettő távolsága racionális szám legyen.

Casey-tétel / John Casey (1820-1891) ír matematikus/:
Ha a k_A, k_B, k_C, k_D körök belülről érintik a k kört olyan A,B,C,D pontokban, melyek egy konvex négyszöget határoznak meg, akkor a két-két kör közös külső érintőszakaszai között fennáll az alábbi összefüggés ($d(k_i, k_j)$ jelölje a k_i és k_j körök közös külső érintő szakaszának a hosszát):

$$d(k_A, k_B) \cdot d(k_C, k_D) + d(k_B, k_C) \cdot d(k_A, k_D) = d(k_A, k_C) \cdot d(k_B, k_D)$$

Megengedjük a nulla sugarú köröket is. Ha mindegyik kör nullkör, akkor a húrnégyszögekre ismert Ptolemaios tételt kapjuk.

Feladatok

C.0. Bizonyítsuk be a Casey-tételt.

C.1. Tekintsük az ABC egyenlőszárú háromszöget és a köré írható kört (AC=BC). Legyen k_1 egy olyan kör, mely érinti a köré írt kört (C-t nem tartalmazó íven) és AB-t. Jelölje t a C-ből a k_1-hez húzott érintőszakasz hosszát. Mutassuk meg, hogy t nem függ a k_1 választásától.

C.2. Két különböző sugarú kör belülről érinti egymást. A nagyobb sugarú körbe szabályos háromszöget írunk. A háromszög csúcsaiból érintőket húzunk a kisebb sugarú körhöz. Mutassuk meg, hogy a leghosszabb érintőszakasz egyenlő a másik kettő összegével.

C.3. Adott egy k kör, annak egy tetszőleges AB húrja, s a rá merőleges CD átmérő. Tekintsünk egy olyan k_1 kört, mely érinti az AB húrt és a k-t a C-t tartalmazó íven, valamint egy k_2 kört, mely a D pontban érinti belülről a k-t. Mutassuk meg, hogy a k_1 és k_2 körök közös külső érintő szakaszának hossza független a k_1 kör választásától adott k és k_2 kör esetén.

C.4. Adott egy k kör és annak AB átmérője. Tekintsük a C belső pontban az AB-re merőleges húrt. Messe ez a k kört az M ill. N pontokban. Határozzuk meg az AC ill. BC átmérőjű körök közös külső érintőinek hosszát!

C.5. Adott egy k kör, valamint három - a k-t belülről érintő - azonos sugarú kör, melyek páronként kívülről érintik egymást. Mutassuk meg, hogy a k kör egy tetszőleges M pontjából a k_1, k_2, k_3 körökhöz húzott érintőszakaszok egyike a másik kettő összegével egyenlő.

C.6. Adott az AB(=2R) átmérőjű k kör, valamint az AB-t és a k-t (belülről) érintő k_1 kör. Az AB-n lévő érintési pontot jelölje M. Határozzuk meg k_1 kör sugarát, ha AM=m.

C.7. Adott az ABC háromszög a köré írható körével együtt. Tekintsük azt a k_1 kört, mely belülről érinti k-t, valamint az AB és BC oldalakat a C_1, ill. A_1 pontokban. Fejezzük ki a BA_1 szakasz hosszát a háromszög oldalainak segítségével. Határozzuk meg a k_1 kör sugarát is a háromszög adataival.

C.8. Adott az AB átmérőjű k kör. Az átmérő harmadoló pontjait jelölje M és N. Legyenek k_1 és k_2 a k-t belülről érintő körök, melyek érintik AB-t az M illetve N pontban, s AB a két kör közös belső érintője. Határozzuk meg a k_1 és k_2 körök közös külső érintő szakaszának hosszát a k kör R sugarának függvényében.

C.9. Adott az ABC egyenlőszárú háromszög (AC=BC) a köré írt körével(k) együtt. Jelölje k_1, k_2, k_3 azokat a köröket, melyek k-t belülről érintik (a harmadik csúcsot nem tartalmazó íven), valamint érintenek egy-egy oldalt a felezőpontjában. Mutassuk meg, hogy a k_1, k_2, k_3 körök páronként vett közös külső érintő szakaszának hossza megegyezik.

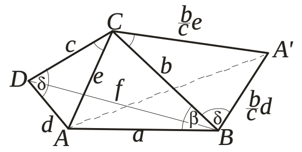
C.10. Adott a síkban az $ACB\triangle$, melynek körülírt körét kívülről érinti a k kör. A k kör érinti egyúttal az AB és AC félegyeneseket is, mégpedig P és Q pontokban. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontja egybeesik az $ACB\triangle$ BC oldalához hozzáírt körének középpontjával. / Kürschák József Emlékverseny 2004/1.feladat /

P. megoldások

P.0. Ptolemaios-tétel

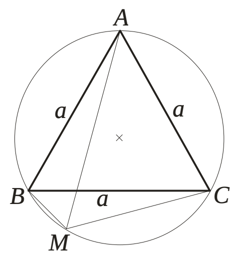
Ha egy konvex négyszög szemközti oldalai a és c, ill. b és d; átlói e és f, akkor $a\cdot c+b\cdot d\ge e\cdot f$. Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha a négyszög húrnégyszög.

Bizonyítás:



Alkalmazzuk a $CDA\triangle$ -re azt a C körüli forgatva nyújtást, mely átviszi a $CBA'\triangle$ -be (aránya b:c). Ekkor $CA'=\frac{b}{c}e$. Vegyük észre, hogy ekkor az $AA'C\triangle \sim DBC$, hiszen $ACA'\angle = DCB\angle$ és $\frac{BC}{CD}=\frac{b}{c};\quad \frac{CA'}{CA}=\frac{b}{c}$, így a hasonlóság aránya: $k=\frac{e}{c}$, így $AA'=\frac{e}{c}f$. Az ABA „háromszögre” a háromszög-egyenlőtlenség: $a+\frac{b}{c}d\ge\frac{e}{c}f$, melyből adódik az $a\cdot c+b\cdot d\ge e\cdot f$ egyenlőtlenség. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $B\in AA'\Leftrightarrow \beta+\delta=180°$, azaz a négyszög húrnégyszög.

P.1. Bizonyítsuk be, hogy ha M az ABC szabályos háromszög köré írt körének (rövidebbik) BC íven lévő pontja, akkor AM=BM+MC.

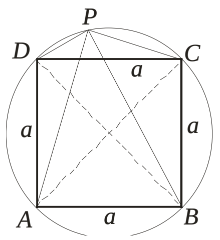


Bizonyítás:

Írjuk fel a Ptolemaios-tételt az ABMC-re:

$$BM\cdot\underbrace{AC}_{a}+CM\cdot\underbrace{AB}_{a}=AM\cdot\underbrace{BC}_{a}\quad /:a$$

$$BM+CM=AM$$



P.2. Mutassuk meg, hogy ha a P pont az ABCD négyzet köré írható kör rövidebbik CD ívén fekszik, akkor PA(PA+PC)=PB(PB+PD).

Bizonyítás:

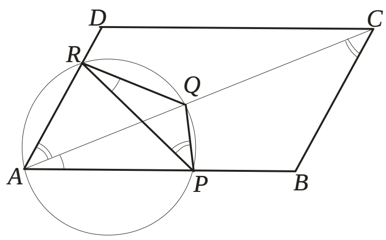
Ptolemaios-tétel a PDAB-re: $PD\cdot a+PB\cdot a=PA\cdot a\sqrt{2}\quad /:a$

Ptolemaios-tétel a PABC-re: $PB\cdot a\sqrt{2}=PA\cdot a+PC\cdot a\quad /:a$

Szorozzuk össze a két egyenletet: PB(PB+PD)=PA(PA+PC)

P.3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben AC=BC. A háromszög köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyük fel a P pontot. Bizonyítsuk be, hogy ha D a C-ből PB-re bocsátott merőleges talppontja, akkor PA+PB=2PD.

Bizonyítás:



Ptolemaios-tétel az APQR-re:

$$AQ\cdot PR=AP\cdot RQ+AR\cdot PQ$$

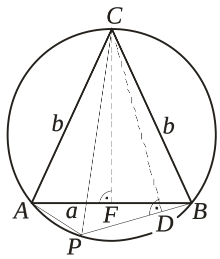
Másrészt: $PQR\triangle\sim ABC \Rightarrow \begin{cases}\frac{PQ}{QR}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow QR=\frac{AB}{BC}\cdot PQ\\ \frac{PQ}{PR}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow PR=\frac{AC}{BC}\cdot PQ\end{cases}$.

Írjuk be ezeket a fenti egyenlőségbe:

$$AQ\cdot\frac{AC}{BC}\cdot PQ=AP\cdot\frac{AB}{BC}\cdot PQ+AR\cdot PQ\quad /\cdot\frac{BC}{PQ}$$

$AQ\cdot AC=AP\cdot AB+AR\cdot BC$. Felhasználva, hogy BC=AD: $AP\cdot AB+AR\cdot AD=AQ\cdot AC$

P.4. Az ABC egyenlőszárú háromszögben AC=BC. A háromszög köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyük fel a P pontot. Bizonyítsuk be, hogy ha D a C-ből PB-re bocsátott merőleges talppontja, akkor PA+PB=2PD.



Bizonyítás:

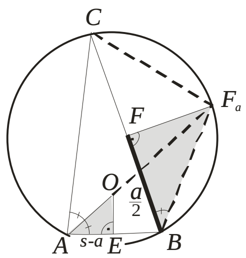
Ptolemaios-tétel APBC-re: $AP\cdot b+BP\cdot b=PC\cdot a$

Másrészt: $PDC\sim AFC\Rightarrow\frac{PD}{PC}=\frac{a}{2b}\Rightarrow a=\frac{PD}{PC}\cdot 2b$, ezt behelyettesítve:

AP+BP=2PD.

P.5. Jelölje O az ABC háromszögbe írt kör középpontját. Az ABC háromszög köré írt kört az A, B ill. C csúcsból induló szögfelező rendre az F_A, F_B, F_C pontban metszi.

Bizonyítandó, hogy $\frac{AO}{OF_A}+\frac{BO}{OF_B}+\frac{CO}{OF_C}\geq 3$



1.bizonyítás:

$AEO\sim BFF_A\Rightarrow\frac{\frac{a}{2}}{BF_A}=\frac{s-a}{AO}$. Másrészt nem triviális, de

$OF_A=CF_A=BF_A$ (*), így átalakítva: $\frac{AO}{OF_A}=\frac{-a+b+c}{a}$. Analóg

módon:

$$\frac{BO}{OF_B}=\frac{a-b+c}{b}$$

$$\frac{CO}{OF_C}=\frac{a+b-c}{c}$$

Így az állítás ekvivalens a következővel:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-3\overset{?}{\geq}3$$

c

$$\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{c}{b}+\frac{b}{c}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}}_{\geq 2}\overset{?}{\geq}6$$

2.bizonyítás:

Ptolemaios-tétel: $\left(AO+OF_A\right)a=OF_A(b+c)$ (felhasználtuk (*)−ot)

$$\frac{AO}{OF_A}+1=\frac{b+c}{a}$$

Így az állítás:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}-3\overset{?}{\geq}3$$

c

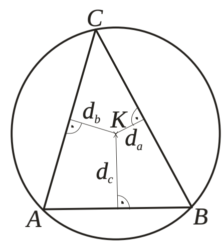
$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\overset{?}{\geq}6$$

c

$$\underbrace{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}\overset{?}{\geq}6$$

P.6. Jelölje R ill. r a háromszög köré, ill. a háromszögbe írt kör sugarát, d_A, d_B, d_C pedig a körülírt kör középpontjának a háromszög oldalaitól vett távolságait. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög hegyesszögű, akkor $d_A+d_B+d_C=R+r$. Hogyan módosul az összefüggés, ha a háromszög nem hegyesszögű?

Bizonyítás:



Ptolemaios-tétel F_ACF_BK-ra: $KC\cdot F_AF_B=F_AC\cdot d_B+F_BC\cdot d_A$.

Tudva, hogy $KC=R;\ F_AF_B=\frac{c}{2};\ F_AC=\frac{a}{2};\ F_BC=\frac{b}{2}$ az előző egyenlet:

$$R\frac{c}{2}=\frac{a}{2}d_B+\frac{b}{2}d_A \quad /\cdot 2$$

$$\begin{cases} R\cdot c=a\cdot d_B+b\cdot d_A. \quad \text{Analóg:} \\ R\cdot a=b\cdot d_C+c\cdot d_B \\ R\cdot b=a\cdot d_C+c\cdot d_A. \quad \text{Írjuk fel } 2T-t \text{ kétféleképp:} \\ a\cdot d_A+b\cdot d_B+c\cdot d_C=r(a+b+c) \end{cases}$$

$$\Sigma:\quad (d_A+d_B+d_C)(a+b+c)=(R+r)(a+b+c) \quad /:(a+b+c)$$

$$d_A+d_B+d_C=R+r$$

Megjegyzés:

Könnyen belátható (cosinus tételek és háromszögterület összefüggésekkel):

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R} \quad /\cdot R$$

$$R\cos\alpha+R\cos\beta+R\cos\gamma=R+r$$

$R\cos\alpha$: előjeles távolság.

$$d_A+d_B+d_C=R+r$$

d_i előjele attól függ, hogy a húr elválasztja a csúcsot és a köré írt kör középpontját, vagy nem.

Ennek alkalmazására egy szép feladat:

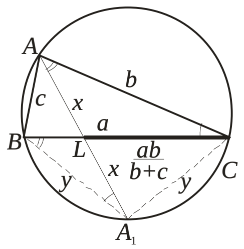
Legyen $A_1, A_2, ..., A_n$ tetszőleges húrsokszög, melyet egymást nem metsző átlói (n-2) db háromszögre bontanak. Igazoljuk, hogy a háromszögekbe beírt körök sugarainak összege nem függ a felbontástól.

P.7. Bizonyítsuk be, hogy minden hegyesszögű háromszögben AM+BM+CM=2(R+r), ahol M a háromszög magasságpontja, r a beírt, R pedig a körülírt kör sugara.

1.Bizonyítás: Ugyanúgy, mint az előző feladatban.
2.Bizonyítás: Az előző feladat „eredményére” alkalmazzunk egy S középpontú (-2)-szeres középpontos hasonlóságot.

P.8. Az ABC háromszög A csúcsból induló szögfelezője a háromszög köré írható kört A_1-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög BC oldala felezi az AA_1 szakaszt, akkor $PA+PC+PE=PB+PD$.

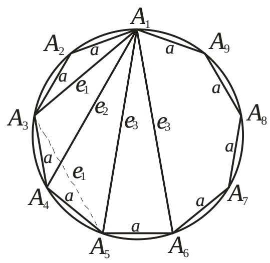
Bizonyítás:
Ptolemaios-tétel ABA_1C-re:



$$\left.\begin{aligned} & b\cdot y+c\cdot y=2x\cdot a \Rightarrow y(b+c)=2x\cdot a \\ & BLA_1 \sim ALC \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\frac{a\cdot b}{b+c}}{b} \Rightarrow x=\frac{a}{b+c}\cdot y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & y(b+c)=\frac{2a^2}{b+c}y \\ & b+c=a\sqrt{2} \end{aligned}$$

P.9. Egy szabályos kilencszög átlói növekvő sorrendben e_1, e_2, e_3. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{1}{e_1}\left(1+\frac{e_2}{e_3}\right)=\frac{1}{e_2}\left(1+\frac{e_3}{e_1}\right)$

Bizonyítás:



$$\frac{1}{e_1}\left(1+\frac{e_2}{e_3}\right)\overset{?}{=}\frac{1}{e_2}\left(1+\frac{e_3}{e_1}\right) \quad /\cdot e_1e_2e_3$$

c

$$e_2(e_2+e_3)\overset{?}{=}e_3(e_1+e_3)$$

Írjunk fel két Ptolemaios-tételt:

$$\left.\begin{aligned} & A_1A_3A_4A_5: ae_1+ae_3=e_1e_2 \\ & A_1A_4A_5A_6: ae_1+ae_3=e_1e_2 \end{aligned}\right\} \text{Vegyük a hányadosukat:}$$

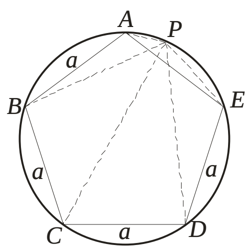
$$\frac{e_1+e_3}{e_2+e_3}=\frac{e_2}{e_3}$$

c

$$e_3(e_1+e_3)=e_2(e_2+e_3)$$

P.10. Az ABCDE szabályos ötszög köré írható kör rövidebbik AE ívének egy pontja legyen P. Bizonyítsuk be, hogy ekkor PA+PC+PE=PB+PD.

Bizonyítás:
Írjunk fel Ptolemaios-tételeket:



$$\left.\begin{aligned} & PABC: a\cdot PA+a\cdot PC=PB\cdot AC \\ & PBCD: PC\cdot BD=a\cdot PB+a\cdot PD \\ & PCDE: a\cdot PC+a\cdot PE=PD\cdot CE \\ & PDEA: AD\cdot PE=a\cdot PA+PD\cdot AE \\ & PABE: PA\cdot BE+a\cdot PE=PB\cdot AE \end{aligned}\right\}$$

$b := BE = AC = BD = CE = AD:$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot PA + a\cdot PC &= PB\cdot b\\ b\cdot BD &= a\cdot PB + a\cdot PD\\ a\cdot PC + a\cdot PE &= PD\cdot b\\ b\cdot PE &= a\cdot PA + PD\cdot AE\\ PA\cdot b + a\cdot PE &= PB\cdot AE \end{aligned}\right\}$$

$\Sigma: (2a+b)(PA+PC+PE) = (2a+b)(PB+PD)$

c

$$PA+PC+PE = PB+PD$$

P.11. Legyen $A_1, A_2, ..., A_n$ egy páratlan oldalszámú szabályos sokszög, M pedig a sokszög köré írható kör A_1A_n ívének egy pontja. Bizonyítsuk be, hogy az M pontot a páratlan sorszámú csúcsokkal összekötő szakaszok együttes hossza egyenlő a páros sorszámú csúcsokkal összekötő szakaszok együttes hosszával.

Bizonyítás:

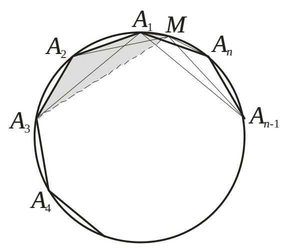
Legyen $MA_1 = d_1, MA_2 = d_2, ..., MA_n = d_n$.

Az oldalak hosszát jelölje a, a legrövidebb átló hosszát pedig jelölje b.

Alkalmazzuk Ptolemaios tételét az

$MA_1A_2A_3, MA_2A_3A_4, ..., MA_{n-1}A_nA_1, MA_nA_1A_2$ húrnégyszögekre (jobbról írjuk a páros számmal jelölt szakaszokat, balról a páratlannal jelölteket):

$$\left.\begin{aligned} a(d_1+d_3) &= bd_2\\ bd_3 &= a(d_2+d_4)\\ a(d_3+d_5) &= bd_4\\ &\ldots\\ bd_n + ad_1 &= ad_{n-1}\\ bd_1 + ad_n &= ad_2 \end{aligned}\right\}$$

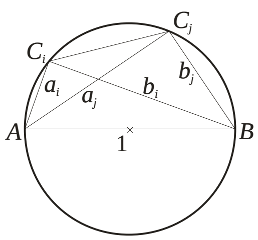


$\Sigma: (2a+b)(d_1+d_3+...+d_n) = (2a+b)(d_2+d_4+...+d_{n-1})$

c

$$d_1+d_3+...+d_n = d_2+d_4+...+d_{n-1}$$

P.12. Megadható-e a síkon 2004 pont úgy, hogy bármely három ne legyen egy egyenesen, és bármely kettő távolsága racionális szám legyen.



Bizonyítás:

Vegyük a relatív prím Pitagoraszi számhármasokat(ezekből végtelen sok van) és osszuk el c-vel. Ekkor $c=1;\ a,b\in$ □ . Minden ilyen számhármas meghatároz egy ABC_i derékszögű háromszöget az AB=1 átmérőjű körben. Ekkor bármely C_iC_j távolság is racionális szám, hiszen a Ptolemaios-tétel szerint

$a_jb_i = a_ib_j + 1\cdot c_ic_j$. Mivel $a_jb_i, a_ib_j \in$ □ $\Rightarrow c_ic_j \in$ □

1.megjegyzés:
A síkon mindig megadható n számú pont úgy, hogy közülük egyik három se legyen egy egyenesen, de közülük bármely kettő távolsága egész szám legyen.

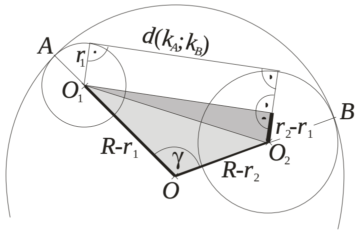
2.megjegyzés:
A síkban nem adható meg végtelen sok pont úgy, hogy ne legyenek egy egyenesen, de bármely kettő távolsága egész legyen.

C. megoldások

C.0. Casey-tétel:

Ha a k_A, k_B, k_C, k_D körök belülről érintik a k kört olyan A,B,C,D pontokban, melyek egy konvex négyszöget határoznak meg, akkor a két-két kör közös külső érintőszakaszai között fennáll az alábbi összefüggés ($d(k_i, k_j)$ jelölje a k_i és k_j körök közös külső érintő szakaszának a hosszát)

$$d(k_A,k_B)\cdot d(k_C,k_D)+d(k_B,k_C)\cdot d(k_A,k_D)=d(k_A,k_C)\cdot d(k_B,k_D)$$



Bizonyítás:

$$O_1O_2=\sqrt{(R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)\cos\gamma}$$

$$AB^2=R^2+R^2-2RR\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma=\frac{2R^2-AB^2}{2R^2}=1-\frac{AB^2}{2R^2}$$

$$d^2(k_A;k_B)=(R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2R^2}\right)-(r_2-r_1)^2=\ldots=(R-r_1)(R-r_2)\frac{AB^2}{2R^2}$$

$$d(k_A;k_B)=\frac{AB}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}$$

Hasonlóan a többi párra is felírhatjuk ezt az összefüggést:

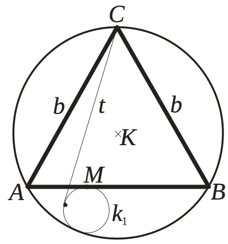
$$\left.\begin{aligned}
d(k_A;k_B)&=\frac{AB}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}\\
d(k_B;k_C)&=\frac{BC}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}\\
d(k_C;k_D)&=\frac{CD}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}\\
d(k_A;k_D)&=\frac{AD}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}\\
d(k_A;k_C)&=\frac{AC}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}\\
d(k_B;k_D)&=\frac{BD}{2R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\begin{gathered}
d(k_A;k_B)\cdot d(k_C;k_D)=\frac{AB\cdot CD}{R^2}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)}\\
d(k_B;k_C)\cdot d(k_A;k_D)=\frac{BC\cdot AD}{R^2}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)}\\
d(k_A;k_C)\cdot d(k_B;k_D)=\frac{AC\cdot BD}{R^2}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)}\\
\Downarrow\\
d(k_A,k_B)\cdot d(k_C,k_D)+d(k_B,k_C)\cdot d(k_A,k_D)=d(k_A,k_C)\cdot d(k_B,k_D)
\end{gathered}$$

Kiegészítés

A tétel érvényben marad akkor is, ha az A,B,C,D pontokban kívülről érintő köröket rajzolunk a k körhöz, s ezek külső érintőit nézzük. Ekkor $d(k_A;k_B)=\frac{AB}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}$.

C.1. Tekintsük az ABC egyenlőszárú háromszöget és a köré írható kört (AC=BC). Legyen k_1 egy olyan kör, mely érinti a köré írt kört (C-t nem tartalmazó íven) és AB-t. Jelölje t a C-ből a k_1-hez húzott érintőszakasz hosszát. Mutassuk meg, hogy t nem függ a k_1 választásától.

Megoldás:

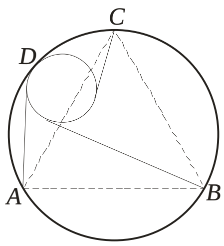


Írjuk fel Casey-tételét az A, k_1, B, C körökre:

$$\underbrace{AC}_{b}\cdot BM+\underbrace{BC}_{b}\cdot AM=t\cdot AB$$

$$b\underbrace{\left(AM+BM\right)}_{AB}=t\cdot AB \quad /:AB(\neq 0)$$

$$t=b$$



C.2. Két különböző sugarú kör belülről érinti egymást. A nagyobb sugarú körbe szabályos háromszöget írunk. A háromszög csúcsaiból érintőket húzunk a kisebb sugarú körhöz. Mutassuk meg, hogy a leghosszabb érintőszakasz egyenlő a másik kettő összegével.

Bizonyítás:

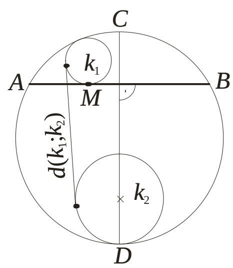
Casey-tétel ABCD-re:

$$d(B;k)\cdot a=a\cdot d(C;k)+d(A;k)\cdot a$$

$$d(B;k)=d(C;k)+d(A;k)$$

C.3. Adott egy k kör, annak egy tetszőleges AB húrja, s a rá merőleges CD átmérő. Tekintsünk egy olyan k_1 kört, mely érinti az AB húrt és a k-t a C-t tartalmazó íven, valamint egy k_2 kört, mely a D pontban érinti belülről a k-t. Mutassuk meg, hogy a k_1 és k_2 körök közös külső érintő szakaszának hossza független a k_1 kör választásától adott k és k_2 kör esetén.

Megoldás:



Casey-tétel a A, k_1, B, k_2 körökre:

$$AM\cdot d(B;k_2)+BM\cdot d(A;k_2)=AB\cdot d(k_1;k_2)\ .$$

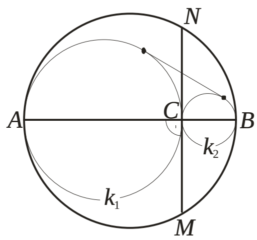
A szimmetria miatt: $d(B;k_2)=d(A;k_2)$:

$$d(A;k_2)\underbrace{\left(AM+BM\right)}_{AB}=AB\cdot d(k_1;k_2)$$

$$d(A;k_2)=d(k_1;k_2)$$

C.4. Adott egy k kör és annak AB átmérője. Tekintsük a C belső pontban az AB-re merőleges húrt. Messe ez a k kört az M ill. N pontokban. Határozzuk meg az AC ill. BC átmérőjű körök közös külső érintőinek hosszát!

1. megoldás:



Casey-tétel a k_1, M, k_2, N körökre:

$$d(k_1;k_2)\cdot MN = \underbrace{NC}_{MC}\cdot MC + MC\cdot \underbrace{NC}_{MC}$$

$$d(k_1;k_2)\cdot \underbrace{MN}_{2MC} = 2MC^2 \qquad .$$

$$d(k_1;k_2) = MC$$

2. megoldás:

A szelőtétel segítségével kifejezhető a körök sugarával is a közös külső érintőszakasz hossza:

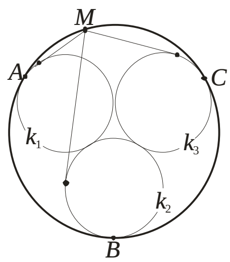
$$\underbrace{AC}_{2R}\cdot\underbrace{CB}_{2r} = \underbrace{NC}_{CM}\cdot CM$$

c

$$CM = d(k_1;k_2) = 2\sqrt{Rr}$$

C.5. Adott egy k kör, valamint három - a k-t belülről érintő - azonos sugarú kör, melyek páronként kívülről érintik egymást. Mutassuk meg, hogy a k kör egy tetszőleges M pontjából a k_1, k_2, k_3 körökhöz húzott érintőszakaszok egyike a másik kettő összegével egyenlő.

Megoldás:



Casey-tétel a k_1, k_2, k_3, M körökre:

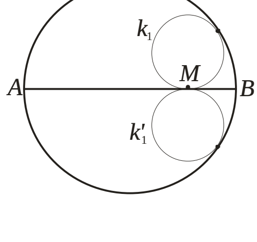
$$e_1\cdot d(k_2;k_3) + e_3\cdot d(k_1;k_2) = e_2\cdot d(k_1;k_3).$$

Felhasználva, hogy $d(k_2;k_3) = d(k_1;k_2) = d(k_1;k_3)$ kapjuk, hogy

$$e_1 + e_3 = e_2$$

C.6. Adott az AB(=2R) átmérőjű k kör, valamint az AB-t és a k-t (belülről) érintő k_1 kör. Az AB-n lévő érintési pontot jelölje M. Határozzuk meg k_1 kör sugarát, ha AM=m.

Megoldás:



Legyen k_1' a k_1 tükörképe AB-re. Ekkor a Casey-tétel az A, k_1, k_1', B körökre:

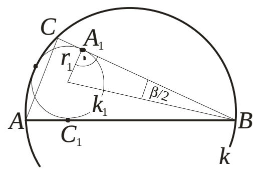
$$\underbrace{AM}_{m}\cdot \underbrace{d(B;k_1')}_{2R-m} + \underbrace{AM}_{m}\cdot \underbrace{d(B;k_1)}_{2R-m} = AB\cdot 2r_1$$

c

$$r_1 = \frac{m(2R-m)}{2R}$$

C.7. Adott az ABC háromszög a köré írható körével együtt. Tekintsük azt a k_1 kört, mely belülről érinti k-t, valamint az AB és BC oldalakat a C_1, ill. A_1 pontokban. Fejezzük ki a BA_1 szakasz hosszát a háromszög oldalainak segítségével. Határozzuk meg a k_1 kör sugarát is a háromszög adataival.

Megoldás:



Casey-tétel az A, B, C, k_1 körökre:

$$AC_1 \cdot BC + e_3 \cdot CA_1 \cdot AB = AC \cdot \underbrace{BC_1}_{BA_1}$$

$$(c - BA_1) \cdot a + (a - BA_1) \cdot c = b \cdot BA_1$$

$$BA_1(a + b + c) = 2ac$$

$$BA_1 = \frac{2ac}{a+b+c} = \frac{a \cdot c}{s}$$

Határozzuk meg a k_1 kör sugarát is a háromszög adataival:

$$r_1 = BA_1 \cdot \operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2} = \frac{ac}{s} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

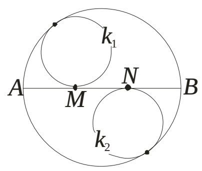
Másrészt $t = \dfrac{ac\sin\beta}{2} \Rightarrow ac = \dfrac{2t}{\sin\beta} = \dfrac{t}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$

Így $r_1 = \dfrac{t}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{r}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$ $\left(\text{Mivel } \dfrac{t}{s} = r\right)$

Végül $r_1 = \dfrac{r}{\cos^2\frac{\beta}{2}} = \dfrac{2r}{1+\cos\beta}$

C.8. Adott az AB átmérőjű k kör. Az átmérő harmadoló pontjait jelölje M és N. Legyenek k_1 és k_2 a k-t belülről érintő körök, melyek érintik AB-t az M illetve N pontban, s AB a két kör közös belső érintője. Határozzuk meg a k_1 és k_2 körök közös külső érintő szakaszának hosszát a k kör R sugarának függvényében.

Megoldás:



Casey-tétel az A, k_1, B, k_2 körökre:

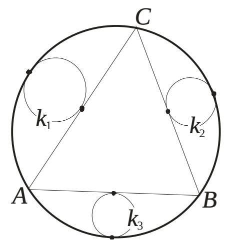
$$\underbrace{AM}_{\frac{2R}{3}} \cdot \underbrace{BN}_{\frac{2R}{3}} + \underbrace{AN}_{\frac{4R}{3}} \cdot \underbrace{BM}_{\frac{4R}{3}} = \underbrace{AB}_{2R} \cdot d(k_1;k_2)$$

c

$$d(k_1;k_2) = \frac{\frac{20}{9}R^2}{2R} = \frac{10}{9}R$$

C.9. Adott az ABC egyenlőszárú háromszög (AC=BC) a köré írt körével(k) együtt. Jelölje k_1, k_2, k_3 azokat a köröket, melyek k-t belülről érintik (a harmadik csúcsot nem tartalmazó íven), valamint érintenek egy-egy oldalt a felezőpontjában. Mutassuk meg, hogy a k_1, k_2, k_3 körök páronként vett közös külső érintő szakaszának hossza megegyezik.

Megoldás:



Jelölje $b := AC = BC$

A szimmetriából $d(k_1;k_2) = d(k_2;k_3)$

Casey-tétel az k_1, k_3, k_2, C körökre:

$$\frac{b}{2}\cdot d(k_2;k_3) + \frac{b}{2}\cdot \underbrace{d(k_1;k_3)}_{d(k_2;k_3)} = \underbrace{d(C;k_3)}_{b\ \text{(1.feladat)}}\cdot d(k_1;k_2)$$

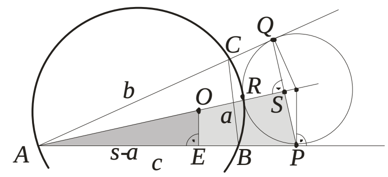
$$\Downarrow$$

$$d(k_2;k_3) = d(k_1;k_2)$$

10. feladat: (Kürschák József Emélkverseny 2004/1.feladat)

Adott a síkban az $ACB\triangle$, melynek körülírt körét kívülről érinti a k kör. A k kör érinti egyúttal az AB és AC félegyeneseket is, mégpedig P és Q pontokban. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontja egybeesik az $ACB\triangle$ BC oldalához hozzáírt körének középpontjával.

Megoldás:



Alkalmazzuk Casey-tételét az A,B,C és a hozzáírt körre:

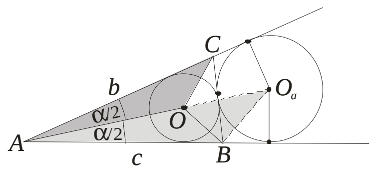
$$a\cdot AP = BP\cdot b + c\cdot CQ$$

$$a\cdot AP = (AP-c)\cdot b + c\cdot(AP-b)$$

$$2bc = AP(b+c-a)$$

$$AP = \frac{2bc}{b+c-a} = \frac{bc}{s-a}$$

$AOE\triangle \sim \triangle ASP \Rightarrow \dfrac{AS}{AP} = \dfrac{s-a}{AO} \Rightarrow AS = AP\cdot\dfrac{s-a}{AO}$ Írjuk be a fent kapott eredményt:



$$AS = \frac{bc}{s-a}\cdot\frac{s-a}{AO} = \frac{b\cdot c}{AO} \quad (\mathrm{I})$$

Másrészt:

$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$; $\quad AOC\angle = 180° - \left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right) = 180° - \left(90° - \dfrac{\beta}{2}\right) = 90° + \dfrac{\beta}{2} = ABO_A\angle$, így:

$$AOC\triangle \sim \triangle ABO_A \Rightarrow \frac{AO}{b} = \frac{c}{AO_A} \Rightarrow AO\cdot AO_A = bc \Rightarrow AO_A = \frac{bc}{AO} \quad (\mathrm{II})$$

(I) és (II)-ből adódik, hogy: $AS = AO_A \Rightarrow S \equiv O_A$