Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó
Komárom, 2005

Azok a csodálatos érintőnégyszögek

Összeállította:
Kubatov Antal
Kaposvár

1. Feladat.

Egy négyszögbe négy kört írtunk oly módon, hogy mindegyik pontosan két másik kört érint kívülről, s mindegyik érinti a négyszög két szomszédos oldalát is. Mutassuk meg, hogy ha a négyszög érintőnégyszög, akkor valamely két szemközti kör sugara megegyezik!

2. Feladat.

Egy trapézt az alapokkal párhuzamos szakaszokkal három trapézra bontottuk úgy, hogy mindegyikbe írható kör. Mekkora a középső trapézba írható kör sugara, ha a két szélsőbe írt kör sugara r ill. R?

3. Feladat.

Igazoljuk, hogy ha az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, akkor az ABC és ADC háromszögekbe írt körök érintik egymást!

4. Feladat.

A P csúcsú szög szárait érintő k körön kijelöltünk két átellenes pontot, A-t és -B-t, melyek különböznek az érintési pontoktól. A k körhöz a B pontban húzott érintő a szög szárait a C és a D, a PA egyenest pedig az E pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BC = DE$!

5. feladat.

Egy háromszög egyik oldala egyenlő a másik két oldal összegének harmadával. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti háromszögbe és a középháromszögbe írt körök érintik egymást!

6. Feladat.

Adott egy nem trapéz húrnégyszög. Szemközti oldalainak meghosszabbításainak metszéspontja legyen P ill. Q. A P-nél és Q-nál lévő szögek szögfelezői messék a húrnégyszög oldalait X, Y ill. Z, V pontokban. Mutassuk meg, hogy $XZYV$ négyszög érintőnégyszög!

7. Feladat.

Bizonyítsuk be, hogy egy konvex n szögből az átlókkal levágott n négyszög közül legfeljebb $\frac{n}{2}$ lehet érintőnégyszög!

8. Feladat.

Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontját jelölje E, s ennek az oldalakra vonatkozó tükörképei legyenek E_1, E_2, E_3 ill. E_4. Mutassuk meg, hogy $E_1E_2E_3E_4$ négyszög érintőnégyszög!

9. Feladat.

Mutassuk meg, hogy ha a satírozott négyszögek érintőnégyszögek, akkor az $ABCD$ négyszög is az! (lásd 14. ábra).

10. Feladat.

Mutassuk meg, hogy ha a satírozott négyszögek érintőnégyszögek (lásd 16. ábra) és $e \parallel f \parallel AB$, akkor $ABPQ$ négyszög is érintőnégyszög!

11. Feladat.

Jelölje az $ABC\triangle$ súlypontját S, két súlyvonalát AA_1 és BB_1. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC\triangle$ egyenlőszárú, ha SA_1CB_1 négyszög érintőnégyszög!

12. Feladat.

Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ (nem trapéz) négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha $EB + BF = ED + DF$! (E az AB és DC meghosszabbításainak metszéspontja, F pedig a másik két oldal meghosszabbításainak metszéspontja.).

13. Feladat.

Egy konvex négyszög szemközti oldalai meghosszabbításainak metszéspontjain keresztül húzzunk egy-egy egyenest, melyek az eredeti négyszöget négy kisebb négyszögre vágják. Bizonyítsuk be, hogy ha kör írható valamely két szemközti kis négyszögbe, akkor az eredeti négyszög is érintőnégyszög.

14. Feladat.

Az $ABCD$ érintő trapéz ($AB \parallel CD$), átlóinak metszéspontja E. Jelölje r_1, r_2, r_3, r_4 ebben a sorrendben az ABE, BCE, CDE és DAE háromszögekbe írt körök sugarát. Mutassuk meg, hogy ekkor $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$!

15. Feladat.

Adott az $ABC\triangle$, s annak AB oldalán két belső pont, K_1 és K_2 (A, K_1, K_2, B). Tekintsük az AK_1C és K_2BC háromszögekbe írt körök közös külső érintőit; ezek metszéspontját jelölje O. Mutassuk meg, hogy az AK_2C és a BK_1C háromszögekbe írt körök – AB oldaltól különböző – külső érintője illeszkedik az O pontra.

16. Feladat.

Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az oldalakat négy pontban érinti, a szomszédos oldalakon levő érintési pontokat összekötjük. Így a négyszög minden csúcsánál keletkezik egy kis háromszög. Megrajzoljuk ezeknek a beírt köreit. Tekintsük a szomszédos csúcsokhoz tartozó kis köröknek az oldalegyenesektől különböző külső érintőit. Tudjuk, hogy ez a négy egyenes egy négyszöget zár közre. Mutassuk meg, hogy a négyszög rombusz!

17. Feladat.

Egy nem trapéz négyszög oldalainak meghosszabbításai messék egymást a P ill. Q pontokban. Mindkét ponton keresztül két-két egyenest húzunk, melyekkel a négyszöget 9 négyszögre bontjuk. Tudjuk, hogy a csúcsok melletti négy négyszög közül három érintőnégyszög. Mutassuk meg, hogy akkor a negyedik is az!