Surányi János

VALÓS SZÁMOK MEGKÖZELÍTÉSE TÖRTEKKEL

FAREY-TÖRTEK

1. Egy a valós számot racionális számokkal, azaz törtekkel akarunk megközelíteni. A törteket az alábbiakban mindig pozitív nevezővel írjuk, ez nem jelent megszorítást. Ha a-t például tizedes törtekkel, mondjuk 10 vagy 100 vagy 10^k (k pozitív egész), vagy általában adott n pozitív egész nevezőjű törttel akarjuk megközelíteni, akkor megkeressük az a-t közrefogó két, n nevezőjű törtet, tehát azt az u-t, amelyre $\frac{u}{n} \le a < \frac{u+1}{n}$. Ekkor az a-hoz legközelebbi ($a = \frac{u+1}{2n}$ esetén valamelyik) végpontot $\frac{h}{n}$-nel jelölve a közelítés mértékére annyit mondhatunk, hogy:

$$\left| a - \frac{h}{n} \right| \le \frac{1}{2n},$$

hiszen a lehet akár a számköz felezőpontja is. Eszerint a $\sqrt{3} = 1{,}73210...$ számtól pl. az $1{,}73 = \frac{173}{100}$ kevesebbel tér el, mint $\frac{1}{200}$.

Vegyük viszont észre, hogy a $\frac{26}{15} = 1{,}7333...$ tört, amelyiknek a nevezője sokkal kisebb, már $0{,}0022 = \frac{11}{5000}-$ nél is kevesebbel tér el, és a 100-nál még mindig lényegesen kisebb nevezőjű $\frac{97}{56} = 1{,}73214...$ eltérése $0{,}00004 = \frac{1}{25000} -$ nél kisebb.

2. Általában lényegesen jobb közelítést remélhetünk, ha a jó közelítő törteket az *összes* n-nél nem nagyobb nevezőjű tört között keressük. Érdemes tehát ezen törtek sorozatát közelebbről megismerni. Ezek a törtek bármely két szomszédos egész szám között azonos módon helyezkednek el, ezért elég a 0 és 1 köztiekre szorítkozni.

> A 0 és 1 közti, n-nél nem nagyobb nevezőjű, nem egyszerűsíthető törtek növekvő sorozatát - hozzávéve a 0-át és 1-et is $\frac{0}{1}$ ill. $\frac{1}{1}$ alakban, n-edik Farey-sorozatnak nevezzük és Φ_n-nel jelöljük.

Így pl.:

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{1} \right\}, \quad \Phi_2 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1} \right\}, \quad \Phi_3 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1} \right\}.$$

I. megjegyzés

Az elnevezéssel kapcsolatban *Hardy-Wright* [3] 36-37. oldalán a következőt írja: A *Farey* sorozatok története igen különös. Úgy látszik, hogy a 28. és 29. tételt [az alábbi 1. tételt] először *Haros* bizonyította 1802-ben. Lásd *Dickson* [2] I. 156. old. *Farey* semmit nem közölt a kérdésről 1816-ig, ekkor kimondta a 29. tételt [a) állítást] egy, a *Philosophical Magazine*-ban közölt megjegyzésében. Bizonyítást nem adott rá, és valószínűtlen az is, hogy ilyent talált volna, mert legfeljebb ha közömbös volt a matematika iránt.

Cauchy viszont látta *Farey* állítását, és be is bizonyította (*Exercises de mathematique*, I. 114-116. old.). A matematikusok többnyire, *Cauchy* példáját követve, *Farey*nek tulajdonítják az eredményt, és alig lehet kétséges, hogy ezek a sorozatok ezután is az ő nevét fogják viselni.

*Farey*ről húszsornyi megjegyzés van a *Dictionary of natural biography*-ben [Természettudományi életrajzok tára], ahol mint geológusról emlékeznek meg róla. Mint geológust őt teljesen elfelejtették, viszont életének egyetlen mozzanatát, ami túlélte őt, nem említi meg életrajzírója.

Ajánló: John Fareyről

a St. Andrews Egyetem Mc.Tutor történeti archívumában:

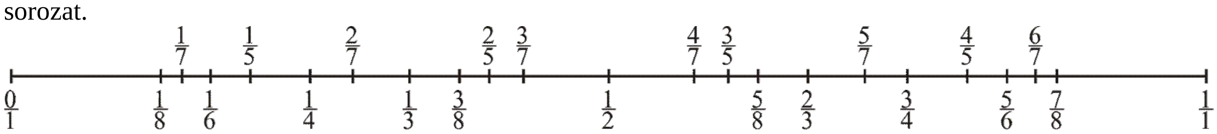
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Farey.html

a Wikipédia szabad lexikonban: http://en.wikipedia.org/wiki/John_Farey%2C_Sr.

Miután a továbbiakban sok szó lesz róluk, ezért

a nem egyszerűsíthető törteket rövidebben *egyszerű*nek fogjuk nevezni.

3. Az 1. ábra Φ_8-at mutatja. Ez elég szabálytalanul sűrűsödő-ritkuló sorozatnak tűnik, mégis észrevehető a Φ_n elemei közt néhány szabályosság. Az például nyilvánvaló, hogy az $\frac{1}{2}$-re szimmetrikus a sorozat.



1. ábra

Ajánló: A Farey-sorozat egy ábrázolása a http://math.usask.ca/~taylor/Demo/farey.html weboldalon.

További lényeges tulajdonságok a számköz felezőpontja helyett a törtek közt értelmezett következő művelet segítségével fogalmazhatók meg:

A $\frac{h}{k}$ és $\frac{h'}{k'}$ törtek *mediáns*ának nevezzük a $\frac{h+h'}{k+k'}$ törtet.

A mediánsnak a nevezőre tett feltevés mellett mindig van értelme.

II. megjegyzés

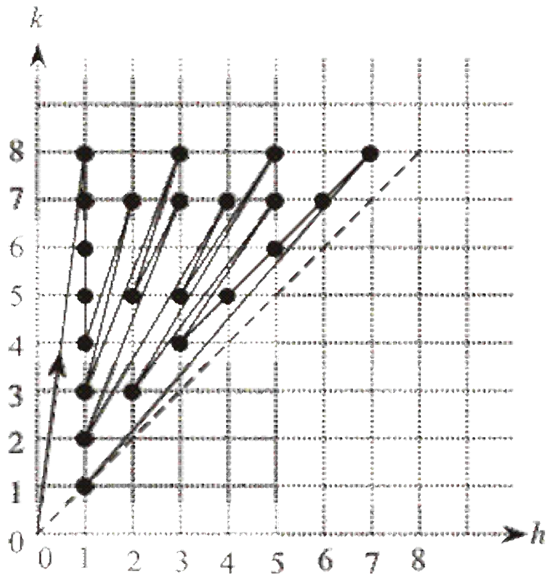
Jegyezzük meg, hogy a mediáns értéke nem csak a törtek értékétől függ, hanem az alakjuktól is. Pl. $\frac{1}{3}$ és $\frac{3}{4}$ mediánsa $\frac{4}{7}$, míg a velük egyenlő $\frac{3}{9}$ és $\frac{6}{8}$-é $\frac{9}{17}$. Mi a következőkben csak egyszerű törtek mediánsával foglalkozunk.

A mediáns számlálója és nevezője a síkbeli vektorösszeg koordinátáira emlékeztet, és valóban, ha az egyenes helyett a sík (pontosabban az első síknegyed) egész pontjaival ábrázoljuk a Farey törteket, a $\frac{h}{k}$ törtnek pl.

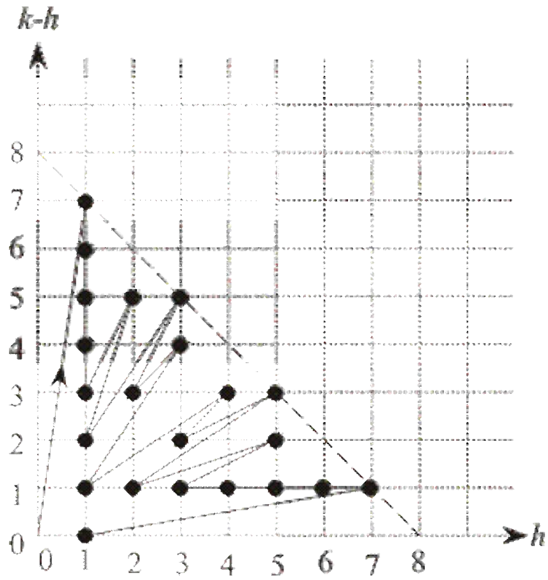
a) a (h; k) pontot, vagy

b) a (h; k-h) pontot

feleltetjük meg, akkor áttekinthetőbb képet kapunk a sorozatokról.
A 2. a) és 2. b) ábrán Φ_8-at tüntettük fel az a) illetőleg a b) módon.



2. a) ábra



2. b) ábra

- Az egész koordinátájú pontokat **rácspont**oknak fogjuk nevezni.
- Ezek egy **pontrács**ot (négyzetrácsot) alkotnak, ugyanis a tengelyektől egész távolságra lévő egyenesek létrehozta négyzetek csúcsai alkotják a pontrácsot.
- Ezeket az egyeneseket a négyzetrács **hálóvonal**ainak nevezzük.

Mindkét ábrázolásmód esetében az egyenlő törteket ábrázoló pontok egy origón áthaladó egyenesen sorakoznak. Közülük az origóhoz legközelebbiket „az origóból látható” vagy rövidebben „látható” pontoknak nevezzük.

A Φ_8 elemei egy H_8 8 befogójú, egyenlőszárú, derékszögű háromszög belsejében és határán helyezkednek el. Ennek csúcsai az első ábrázolás esetén a (0;0), (0;8), (8;8) pontok, a másodiknál a (0;8), (0;0), (8;0) pontok. Általában a Φ_n elemeit a (0;0), (0;n), (n;n), illetőleg a (0;n), (0;0), (n;0) csúcsú, zárt H_n háromszög látható rácspontjai ábrázolják.

A 2. b) ábra világosan mutatja, hogy Φ_8 és hasonlóan minden Farey-sorozat az $\frac{1}{2}$ – re szimmetrikus, amit már a definíció kapcsán is említettünk.

4. A továbbiakat meg fogja könnyíteni néhány elnevezés bevezetése.

- Az olyan vektor, amelyiknek végpontjai rácspontok, **rácsvektor**;
- két rácsponton átmenő egyenes **rácsegyenes** (ilyenek például a hálóvonalak, de pl. a rácsnégyzetek átlóira illeszkedő egyenesek is);
- egy olyan sokszög, amelyiknek a csúcsai rácspontok: **rácssokszög** (a H_n háromszögek pl. rácsháromszögek);
- végül egy olyan rácssokszöget, amelyik a csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot sem a belsejében sem a határán, **üres**nek nevezzük.

A Farey törteket ábrázoló pontokat fogjuk **Farey-pontok**nak is nevezni, és azonosítjuk a törtekkel, így pl. a mediánsukat ábrázoló pontot a pontok mediánsának is mondjuk, és ezen a mediáns értékét is értjük.

Az ábrázolt törtek értékét az origóból a képükhöz húzott egyenesnek az x-tengellyel bezárt szöge jellemzi. Kisebb törtet meredekebb egyenes ábrázol. Föntebb Φ_8 elemeit növekvő sorrendben összekötöttük.

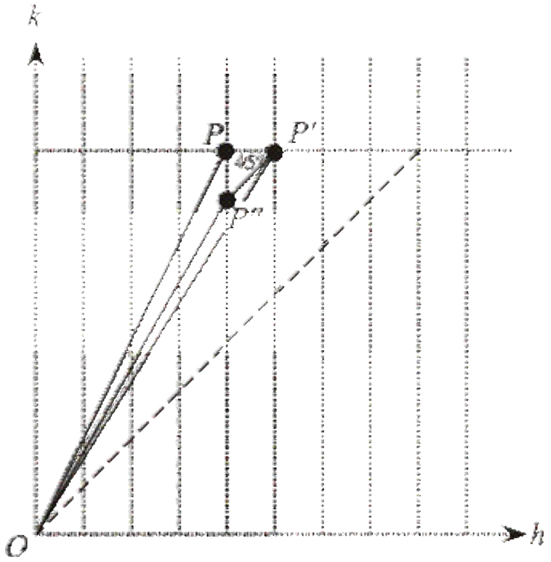
Ha P és P', Φ_n két szomszédos elemét ábrázolja, akkor az OPP' háromszög üres. Visszatérve az ábrázolást bevezető megjegyzéshez a P és P' mediánsát a Q pont ábrázolja, amelyre $OPQP'$ paralelogramma. A mediáns tehát az ábrázolt két tört közé esik. A Q pont látható is, mert különben Φ_n -beli törtet ábrázolna ellentétben azzal, hogy P és P' közt nincs Φ_n-beli elem. Ezzel a következőt nyertük:

1. tulajdonság:
Φ_n két szomszédos eleme nevezőjének az összege n-nél nagyobb, és a mediánsuk egyszerű tört.

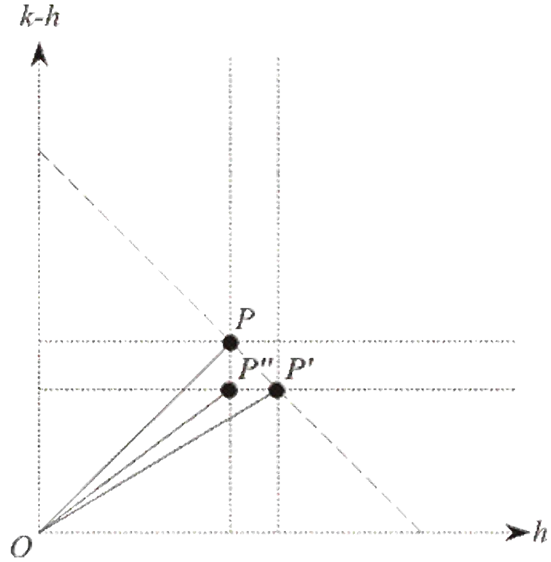
5. Ezek után már nem nehéz belátni, hogy

2. tulajdonság:
Ha n>1, akkor Φ_n két szomszédos elemének nevezője különböző.

Vizsgáljuk a Φ_n-beli $\frac{h}{k}$ törtet. Ha $\frac{h+1}{k}$ nem egyszerű, akkor igaz az állítás, mert ez a tört nagyobb az előbbinél, így az azzal szomszédos nagyobb elem sem lehet k nevezőjű. Ha $\frac{h+1}{k}$ egyszerű, akkor van Φ_n-nek közéjük eső eleme. Tudjuk ugyanis, hogy $1 < k \le n$ (k=1 esetén az állítás triviális). 3. a) és 3. b) ábra P és P' pontja a fenti két törtet ábrázolja az a) illetőleg a b) ábrázolási mód szerint. A Farey sorozatról lévén szó a második tört sem nagyobb 1-nél, sőt 1 sem lehet, mert k>1 miatt nem lehet $\frac{1}{1}$ alakú. A belőle O-ba mutató egyenes tehát 45°-nál kisebb szöget zár be a függőlegessel.



3. a) ábra



3. b) ábra

Ekkor világos, hogy a $\frac{h}{k-1}$ tört (vagy a vele egyenlő egyszerű tört) a két tört között van. Valóban, a 3. b) ábrán ezt a törtet ábrázoló *P*” pontból az origóba mutató egyenes a másik két pontból oda mutató egyenes között van; de a 3. a) ábrán is igaz ez, a fenti megállapítás szerint, mivel a *PP’P”* szög viszont 45^{o}-os. (A 3. b) ábránál a derékszögű háromszög egyenlő szárú volta szóba se jött.)

Érdemes összehasonlításképpen a geometriailag nyert összefüggéseket számolással is igazolni.

6. A Farey-sorozatokban észrevehető szabályosságokat fogalmazza meg a következő tétel.

1. tétel
a) Két szomszédos tört különbsége a nevezők szorzatának reciprok értéke.
b) Három egymás utáni tört közül a középső a két szélső mediánsával egyenlő.

Az **a)** tulajdonságot átfogalmazzuk. Legyen $\frac{h}{k} < \frac{h'}{k'}$ Φ_n két szomszédos eleme. Ekkor:

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{h'k - hk'}{kk'} \geq \frac{1}{kk'}.$$

a) szerint itt egyenlőségnek kell fennállnia, vagyis

a') Ha $\frac{h'}{k'}$ a Φ_n $\frac{h}{k}$ utáni eleme, akkor $h'k\text{-}hk'=1$.

Nyilvánvalóan **a')**-ből következik **a)**.

7. A Farey-sorozatokat azért vezettük be, hogy valós számokhoz azokat jól közelítő törteket keressünk. Ezért, mielőtt a tétel bizonyítására térnénk, bebizonyítjuk segítségével a következőt:

2. tétel:
Egy *a* valós számhoz és tetszőleges pozitív egész *n*-hez található olyan *u*/*v* tört, amelyikre

$$|va - u| \leq \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq v \leq n, \quad (1)$$

s így

$$\left|a - \frac{u}{v}\right| \leq \frac{1}{v(n+1)} < \frac{1}{v^2}. \quad (2)$$

Irracionális *a* esetén a (2) összefüggés végtelen sok *u*/*v* tört esetén teljesül.

III. Megjegyzés
A 2. tétel fényében már nem olyan meglepőek az 1. pontban talált jó közelítő értékek.

A 2. tétel bizonyítása
Bármely két szomszédos egész között, mint említettük, azonos módon helyezkednek el az n-nél nem nagyobb nevezőjű törtek. Legyenek az $[a]$-vel eltolt Φ_n sorozat a-val szomszédos elemei $\frac{h}{k}<\frac{h'}{k'}$. Osszuk ketté az ezek közti intervallumot a törtek mediánsával. Ha a a $\frac{h}{k}$-ból induló részbe esik, akkor távolsága $\frac{h}{k}$-tól nem nagyobb, mint

$$\frac{h+h'}{k+k'}-\frac{h}{k}=\frac{h'k-hk'}{k(k+k')}=\frac{1}{k(k+k')}\leq\frac{1}{k(n+1)}.$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk az 1. tulajdonságot.
Hasonlóan, ha a a $\frac{h'}{k'}$-ben végződő részben van, akkor az eltérés legfeljebb

$$\frac{h'}{k'}-\frac{h+h'}{k+k'}=\frac{h'k-hk'}{k'\left(k+k'\right)}=\frac{1}{k'\left(k+k'\right)}\leq\frac{1}{k'\left(n+1\right)}.$$

Jelöljük $\frac{u}{v}$-vel eredményeink szerint az első esetben $\frac{h}{k}$-t, a másodikban $\frac{h'}{k'}$-t, akkor

$$\left|a-\frac{u}{v}\right|\leq\frac{1}{v(n+1)}<\frac{1}{v^2},$$

vagyis az $\frac{u}{v}$ törtre teljesül a 2. tétel első állítása.

8. Nem mondana sokat a megközelítésre vonatkozóan, ha csak egy vagy néhány ilyen tört léteznék, ezért lényeges a tétel második része.
Ha már találtunk egy n_1 értékhez egy alkalmas $\frac{u_1}{v_1}$ törtet - pl. n_1=1-hez $u_1=[a]$, v_1=1 megfelel - akkor válasszunk egy n_2 értéket úgy, hogy $\frac{1}{n_2+1}<\left|av_1-u_1\right|$ teljesüljön. Ez lehetséges, mert a jobb oldal nem 0, mivel a irracionális. Erre alkalmazva az eljárást találunk egy $\frac{u_2}{v_2}$ törtet, amelyikre

$$\left|av_2-u_2\right|<\frac{1}{n_2+1}<\left|av_1-u_1\right|,\quad\left|a-\frac{u_2}{v_2}\right|<\frac{1}{v_2^2}.$$

Az első egyenlőtlenség szerint $\frac{u_2}{v_2}$ különbözik $\frac{u_1}{v_1}$-től. Az eljárás a irracionális volta folytán minden határon túl folytatható.
A v_1, v_2, ... sorozat különböző pozitív egészek végtelen sorozata, így bármely korlátnál előfordul benne nagyobb v_i érték, és ehhez $\frac{1}{v_i^2}$-nél kisebb hibával közelítő $\frac{u_i}{v_i}$ tört. Ezzel a 2. tétel bizonyítást nyert.

9. A közelítés mértékére vonatkozó becslést tovább finomíthatjuk a tétel **a)** részének felhasználásával.

A 2. tétel kiegészítése

Legyen $\frac{h_1}{k_2}<\frac{h_2}{k_2}$ az n-edik Farey-sorozat a-t közrefogó két szomszédos eleme, ekkor legalább egyikükre fennáll az

$$\left|a-\frac{h_i}{k_i}\right|\leq\frac{1}{2k_i^2}$$

egyenlőtlenség.

IV. Megjegyzés
A közelítés mértékének javítására vonatkozó további eredmények találhatók pl. a [2] alatt idézett műben, különösen a 2. és 3. kiadásban.

A 2. tétel kiegészítésének bizonyítása
Azt bizonyítjuk be, hogy nem állhatnak fenn egyszerre az

$$\left|a-\frac{h_i}{k_i}\right|>\frac{1}{2k_i^2}\quad (i=1,\,2)$$

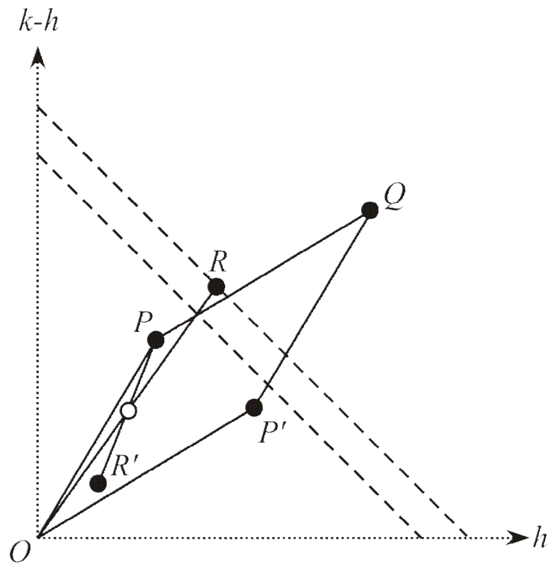
egyenlőtlenségek. Valóban, ekkor fennállna az

$$\frac{1}{k_1k_2}=\left(a-\frac{h_1}{k_1}\right)+\left(\frac{h_2}{k_2}-a\right)>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)^2+\frac{1}{k_1k_2}$$

összefüggés, ami nem lehetséges.

10. Térjünk most már vissza az 1. tételhez. Ebben a **b)** pont állítása egyben lehetőséget is ad a sorozatok egymás utáni előállítására.

Kiindulunk Φ_1-ből, és ha Φ_n már előállt, abból Φ_{n+1}-et úgy kapjuk, hogy sorra vesszük az egyszerű, $\frac{h_i}{n+1}$ törteket, és beírjuk Φ_n -et nagyság szerint közrefogó két eleme közé. Legyenek az ezeket ábrázoló Farey-pontok P és P', a $\frac{h_i}{n+1}$ -t ábrázoló pont pedig R (4. ábra).



4. ábra

Belátjuk, hogy utóbbi a P és a P' mediánsa. Ha nem így volna, akkor a mediánst ábrázoló Q az R-et tartalmazó H_{n+1} háromszögön kívül volna, mert P és P' közt van, és ott a **2.** tulajdonság szerint csak egy új pont léphetne fel. Ha P az OQ-nak az R-rel egyező oldalán lévő pontot jelöli, akkor legyen P-nek az OR szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe R'. Ez nyilvánvalóan az $OPQP'$ paralelogrammában volna, de ez nem lehetséges, mert a paralelogramma üres. R tehát egybeesik Q-val, azaz P és P' mediánsa. Ezzel a következőt nyertük:

3. tulajdonság
Φ_n két szomszédos eleme közt n-et egyenként növelve az első fellépő újabb tört a mediánsuk.

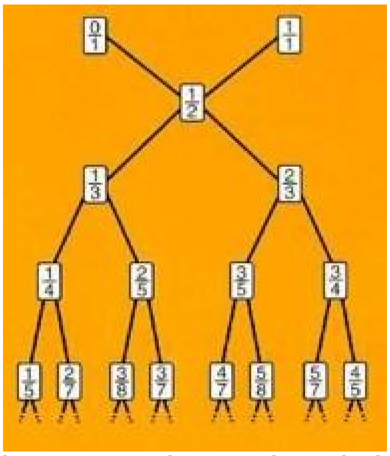
Az említett eljárást tehát egyszerűbben úgy végezhetjük, hogy Φ_n minden olyan elempárja közé, amelyek mediánsának a nevezője n+1, beírjuk ezt a mediánst. Így kapjuk a Farey sorozatokat, pl. Φ_8-ig:

$$\Phi_1=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{1}\right\};\Phi_2=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{1}\right\};\Phi_3=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{1}\right\};\Phi_4=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi_5=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{1}{1}\right\};\Phi_6=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi_7=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{7};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{1}{2};\frac{4}{7};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi_8=\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{8};\frac{1}{7};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{3}{8};\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{1}{2};\frac{4}{7};\frac{3}{5};\frac{5}{8};\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\frac{7}{8};\frac{1}{1}\right\}$$



http://www.uwm.edu/Dept/Math/Farey.html

11. Az **1.** tételre több bizonyítást is mutatunk.

Az 1. b) tétel igazolása

Az éppen bebizonyított **3.** tulajdonság kínál egy teljes indukciós bizonyítást a tétel **b)** részére. Ennek először Φ_2-re van értelme, és arra igaz.

Legyen most n>2, és $\frac{h'}{k'}$ Φ_{n-1}-ben a $\frac{h}{k}$-t követő tört. Ha Φ_n-ben fellép köztük egy $\frac{h_1}{k_1}$ tört, akkor $k_1=n$, és a **2.** tulajdonság szerint csak egy tört léphet fel, a **3.** tulajdonság szerint pedig ez a szomszédos törtek mediánsával egyenlő, vagyis fennáll rá a **b)** tulajdonság. Ezzel a **b)** állítást igazoltuk.

12. A bizonyítás befejezését is szolgáltatja a következő érdekes megjegyzés:

Az 1. a) és 1. b) tételek ekvivalenciájának bizonyítása

Az **a)** és **b)** állítások bármelyikének teljesüléséből következik a másik állítás igaz volta. Más szóval a két állítás ekvivalens.

Tegyük fel, hogy az **a)** állítás igaz. Ekkor Φ_n-nek három egymás utáni $\frac{h}{k}, \frac{h''}{k''}, \frac{h'}{k'}$ törtjére fennállnak a

$$h''k - hk''= 1,\ h'k''- h''k' = 1$$

egyenlőségek. Innen kifejezve h''-t és k''-t:

$$h''\,(\,h'k - hk'\,) = h + h',\ k''\,(\,h'k - hk'\,)=k + k'.$$

$\frac{h''}{k''}$ tehát valóban egyenlő a mediánssal.

Tegyük fel most, hogy a **b)** állítás igaz. Ebből az **a)** állítás igaz voltát n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk minden Φ_n-re, Φ_2 mindkét szomszédos számpárjára teljesül **(1)**. Legyen most már n>2, és tegyük fel, hogy **a)** igaz Φ_{n-1} minden szomszédos számpárjára. Ha $\frac{h''}{k''}$ szerepel Φ_{n-1}-ben is, akkor az indukciós feltétel szerint mindkét szomszédjával teljesíti **(1)**-et. Ha viszont Φ_{n-1}-nek még nem eleme, akkor $k'' = n$, továbbá a **2.**

tulajdonság szerint annak szomszédos $\frac{h}{k}$ és $\frac{h'}{k'}$ törtje közé esik, és egyszerű, így a szomszédos törtek mediánsával egyenlő, vagyis

$$h + h' = \sigma h'',\ k + k' = \sigma k''$$

valamilyen pozitív egész σ-val. Mivel k és k' kisebb n-nél, így $\sigma = 1$, és a kapott két egyenlőségből az adódik, hogy

$$k''h' - k'h'' = kh' - k'h = 1 \text{ és } kh'' - k''h = kh' - k'h = 1.$$

Az **a)** állítás igaz volta Φ_n-re is öröklődik.

13. Újabb geometriai bizonyítás adható a tétel két részére tovább vizsgálva a négyzetrácsok tulajdonságait.

V. megjegyzés

Értelmezhetők a síkban kissé általánosabban *paralelogrammarácsok* és a hozzájuk tartozó pontrácsok. Az itt következő összefüggések megfelelői azokra is érvényesek, és bizonyításuk is hasonlóan történhetik.

Alaptulajdonság
Egy rácsot rácsvektorral eltolva az önmagába megy át.

Az Alaptulajdonság bizonyítása

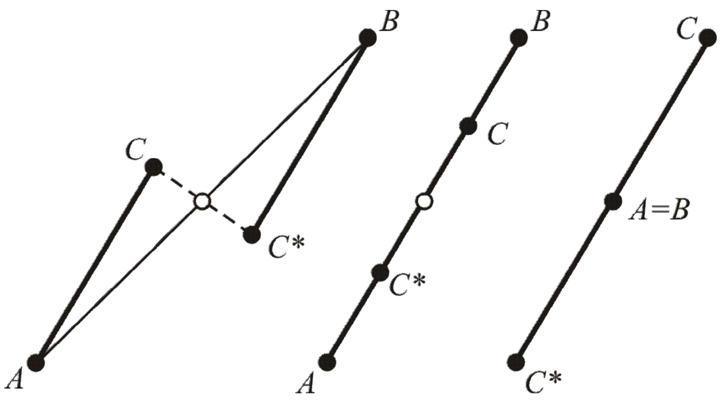
Valóban, egy $\overrightarrow{AB}$ rácsvektorral történő eltolásnál az A-n átmenő hálóvonalak a B-n átmenő megfelelő hálóvonalakba mennek át; mivel pedig mindegyik hálóvonalsereg az egymástól egyenlő (egész) távolságra levő, párhuzamos egyenesekből áll, így mindegyik önmagába megy át, tehát az egész rács is. Ez a pontrácsra azt jelenti, hogy minden rácspont rácspontba megy át, és minden rácspont rácspontnak az eltolt képe.

Ebből következik többek közt, hogy

Rácspontnak rácsszakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe rácspont.

Speciálisan adódik, hogy rácspontnak rácspontra vonatkozó tükörképe is rácspont. (Egy 0 hosszúságú rácsszakasz felezőpontjára tükrözünk.)

Valóban, ha A, B és C rácspont, és C tükörképe AB felezőpontjára C^*, akkor $ACBC^*$ paralelogramma vagy a négy pont egy egyenesen van és AB és CC^* felezőpontja ugyanaz (5. ábra). A $\overrightarrow{CA}$ vektorral történő eltolás mindkét esetben B-t C^*-ba viszi át, és így C^* is rácspont.



5. ábra

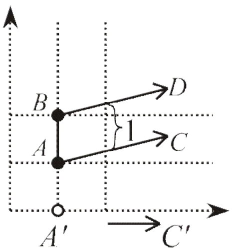
Rácsok egy nevezetes tulajdonsága, hogy

3. tétel Az üres rácsháromszögek területe egyenlő. (Az egységnyi oldalú négyzetek rácsában 1/2.)

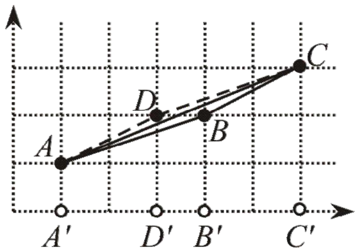
Ezzel egyenértékű állítás, hogy az üres rácsparalelogrammák területe egyenlő. Ha ugyanis az üres *ABC* rácsháromszög területe *t*, és a *D* pontra *ABDC* paralelogramma, akkor *D* az *A* pont tükörképe *BC* felezőpontjára, tehát rácspont. A paralelogramma üres, mert az *ABC* háromszög az, ha pedig *BDC* tartalmazna rácspontot, akkor annak a *BC* felezőpontjára vonatkozó tükörképe az *ABC* háromszöghöz tartozó rácspont volna. A paralelogramma területe 2*t*. Megfordítva nyilvánvaló, hogy, ha *ABDC* üres rácsparalelogramma, akkor *ABC* feleakkora területű, üres háromszög.

14. Rátérünk a **3. tétel** bizonyítására.

Ha az üres *ABC* rácsháromszög egy oldala, – a jelölést alkalmasan választva mondjuk *AB*, – merőleges az *x*-tengelyre, akkor egységnyi hosszúságú (6. a) ábra). Ha a *C* oldal *C'* vetülete az *x*-tengelyen egységnél messzebb volna *A* vetületétől, akkor azon *C* fölötti *D* ponttal, amelyre *ABCD* paralelogramma, ez nem volna üres, mert az *AB*-től egységnyire lévő ***hálóvonal***nak egységnyi szakaszát tartalmazná, és annak a végpontjai vagy a belsejének egy pontja rácspont volna. A háromszög területe tehát 1/2 ebben az esetben.



6. a) ábra



6. b) ábra

Az általános esetben megadunk egy eljárást, amely tetszőleges háromszögből indulva véges számú lépésben erre az esetre vezet (6. b) ábra). Ha az oldalak vetülete az *x*-tengelyen különböző, akkor válasszuk a jelölést úgy, hogy az *A'*, *B'*, *C'* vetületek ebben a sorrendben következzenek. Ekkor *B*-nek *AC* felezőpontjára vonatkozó *D* tükörképére *ABDC* üres rácsparalelogramma, és *D*-nek a *D'* vetülete *A'* és *C'* közé esik. *ABD* tehát *ABC*-vel egyenlő területű, üres rácsháromszög, amelyiknek a vetülete kisebb mint az *ABC*-é. Ezek a vetületek pozitív egész számok, mert a hálóvonalak egész távolságra vannak egymástól, így az eljárásnak véges számú lépésben be kell fejeződnie, ez pedig akkor következik be, ha a háromszög egyik oldala merőleges az *x*-tengelyre. Ezzel beláttuk, hogy minden üres rácsháromszög területe 1/2.

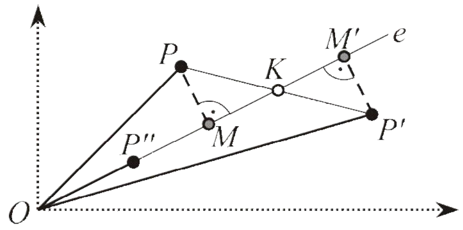
A 3. tételből azonnal kapjuk az 1. tétel a) állítását.

Az 1. tétel a) részének II. bizonyítása

Legyen Φ_n két szomszédos törtje $\frac{h}{k}<\frac{h'}{k'}$, képük *P*(*h*;*k*) és *P'*(*h'*;*k'*). Ekkor *OPP'* üres rácsháromszög, így területét koordinátákkal fejezve ki $\frac{1}{2}(h'k-hk')=\frac{1}{2}$, ami éppen az **a)**-val egyenértékű **a')**-t adja.

Adódik azonban a 3. tételből a b) állítás is.

Az 1. tétel b) részének II. bizonyítása



7. ábra

Ábrázolják a P, P'', P' pontok Φ_n $\frac{h}{k} < \frac{h''}{k''} < \frac{h'}{k'}$ egymás utáni törtjeit (7. ábra). Ekkor OPP'' és $OP''P'$ üres rácsháromszög, így területük egyenlő, tehát egyenlők az OP'' oldalhoz tartozó magasságaik is, a PM illetőleg $P'M'$ szakaszok, ahol M illetőleg M' a P illetőleg P' merőleges vetülete az $\overrightarrow{OP''}$ vektor e egyenesén. K-val jelölve e és a PP' szakasz metszéspontját a PMK és $P'M'K$ háromszögek egybevágók, mert $PM=P'M'$, M-nél és M'-nél derékszög van, és egyenlők a K-nál lévő szögeik. Ekkor $PK=P'K$, vagyis K a PP' szakasz felezőpontja, tehát e a paralelogramma átlójának az egyenese, és így $\frac{h''}{k''}$ egyenlő $\frac{h}{k}$ és $\frac{h'}{k'}$ mediánsával, ami bizonyítandó volt.

15. Az 1. tétel bizonyítható az elsőfokú, kétismeretlenes diofantoszi egyenletek segítségével is. A bizonyítás egyben eljárást is fog adni Φ_n egy $\frac{h}{k}$ (<1) törtjét követő tört meghatározására.

Az 1. tétel III. bizonyítása

Ismeretes, hogy adott h, k egész számok esetén a

$$kx+hy=1$$

egyenletnek akkor és csak akkor van egész x, y megoldása, ha $(h,k)=1$ (azaz h és k relatív prímek). Ha $\frac{h}{k}$ egy Φ_n-beli elem, akkor $(h,k)=1$, s így a

$$kx-hy=1 \qquad (3)$$

egyenletnek van egész x_0, y_0 megoldása. Ha x_1, y_1 is megoldás, akkor

$$k(x_1-x_0)-h(y_1-y_0)=0,$$

tehát $x_1 - x_0 = \frac{h(y_1 - y_0)}{k}$, azaz $k \mid h(y_1 - y_0)$, ami $(h,k)=1$ miatt csak úgy lehet, ha alkalmas r egésszel $y_1-y_0=rk$, és ezt behelyettesítve, és egyszerűsítve $x_1-x_0=rh$.

Válasszuk r-et úgy, hogy y_1 a lehető legnagyobb legyen: ($0\le$) $n-k<y_1\le n$ teljesüljön. Ekkor x_1, y_1 pozitív megoldása a (3) egyenletnek, így $(x_1,y_1)=1$ és $\frac{x_1}{y_1} = \frac{h}{k} + \frac{1}{ky_1}$, vagyis $\frac{x_1}{y_1}$ egy $\frac{h}{k}$ utáni eleme Φ_n-nek.

Belátjuk, hogy $\frac{x_1}{y_1}$ és $\frac{h}{k}$ közé nem eshetik Φ_n-nek további $\frac{h'}{k'}$ eleme. Valóban, ha esnék, akkor

$$\frac{1}{ky_1} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{h}{k} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{h'}{k'} + \frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{x_1k' - h'y_1}{y_1k'} + \frac{h'k - k'h}{kk'} \ge \frac{1}{y_1k'} + \frac{1}{k'k} = \frac{k + y_1}{y_1kk'} > \frac{n}{kk'y_1} \ge \frac{1}{ky_1}$$

volna. Ezzel ellentmondásra jutottunk. Kell tehát hogy $\frac{x_1}{y_1}$ legyen a $\frac{h}{k}$ utáni elem Φ_n-ben.

VI. Megjegyzés

Az elmondottak illusztrálására meghatározzuk Φ_{15}-ben a $\frac{2}{9}$-re következő elemet. $9x-2y=1$, $x_0=1$, $y_0=4$,

$15-9 = 6 < 4+9r \le 15$, innen $r=1$, $x_1=1+2r=3$, $y_1=4+9r=13$, tehát $\frac{3}{13}$ következik a $\frac{2}{9}$ után.

Irodalom

[1] L. E. Dickon: The History of Numbers I. 156. old.
[2] Erdős P., Surányi J.: Válogatott Fejezetek a Számelméletből 1., 2., 3. kiad.
[3] G. H. Hardy, E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers (1971) 4. kiad., 23-29. old.
[4] Surányi J.: Farey Sorozatok és Lánctörtek *Matematikai Lapok* XVI (1965) 228-240. old.

Ajánló

Farey-sorozatok

a Mathworld enciklopédiában:
http://mathworld.wolfram.com/FareySequence.html

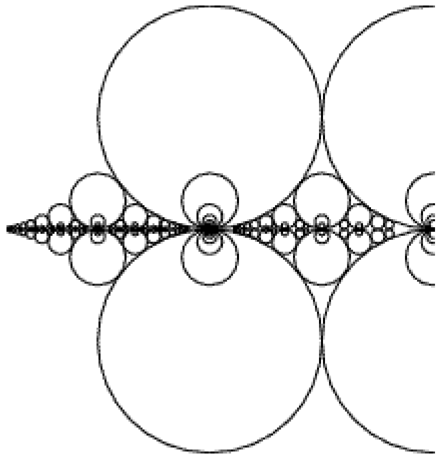
Alexander Bogomolnij Cut-the-knot portálján:
http://www.cut-the-knot.org/ctk/Farey.shtml

J-P. Chabert különleges oldalain:
http://jpm-chabert.club.fr/farey.htm

A Farey-sorozat Ford-féle geometriai interpretációja

Alexander Bogomolnij Cut-the-knot portálján:
http://www.cut-the-knot.org/proofs/fords.shtml

A Valladolid Egyetem honlapján:
http://acm.uva.es/p/v104/10408.html



forrás: http://acm.uva.es/p/v104/10408.html

A Farey-fa (Stern-Brocot tree)

egy ábrázolása, cikkajánlatokkal a Wisconsin Egyetem (Milwaukee) Matematika tanszékétől:
http://www.uwm.edu/Dept/Math/Farey.html

Alexander Bogomolnij Cut-the-knot portálján:
http://www.cut-the-knot.org/ctk/SB_tree.shtml

Farey-sorozatokról haladóknak (pl. Farey sorozatokkal kapcsolatos „egyszerű”, a Riemann hipotézissel ekvivalens kérdés): http://www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/farey.htm

A Farey-fától a Farey-leképezésig. Képek és linkek Linas Vepstas weboldalán:
http://linas.org/art-gallery/farey/farey.html