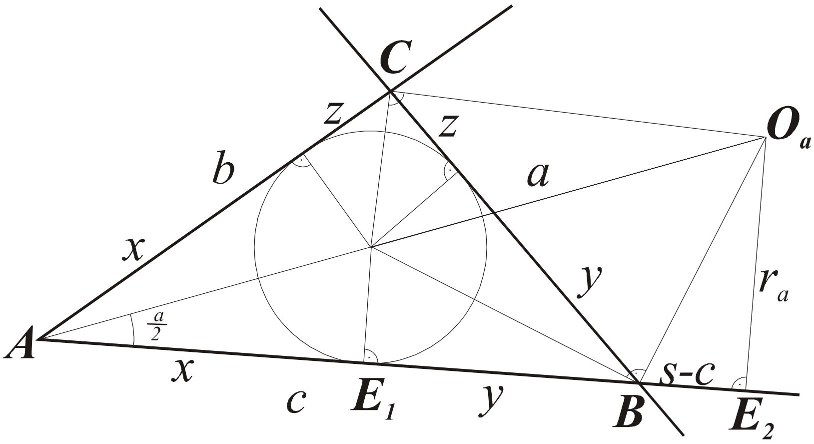
Előzetes tudnivalók

Az összefüggések leírására a következő ábra jelöléseit használjuk:



I. Minden háromszögben érvényes összefüggések:

$t_\Delta = rs$

$t_\Delta = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$

$t_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$t_\Delta = \frac{abc}{4R}$

$x = s-a \qquad y = s-b \qquad z = s-c \qquad AE_2 = s$

$\overline{E_1E_2} = (s-b) + (s-c) = a$

$tg\frac{a}{2} = \frac{r_a}{s} = \frac{r}{s-a}$

II. Minden háromszögben:

$ctg\frac{a}{2} + cgt\frac{b}{2} + cgt\frac{g}{2} = cgt\frac{a}{2}cgt\frac{b}{2}ctg\frac{g}{2}$

$tg\frac{a}{2}tg\frac{b}{2} + tg\frac{b}{2}tg\frac{g}{2} + tg\frac{g}{2}tg\frac{a}{2} = 1$

minden nem derékszögű háromszögben:

$tga + tgb + tgg = tga \cdot tgb \cdot tgg$

III. Hegyesszögű háromszögben a magasságpont és bármely két csúcs köré írt kör sugara ugyanakkora, mégpedig egyenlő a háromszög köré írt körének sugarával.

IV. A magasságpont oldalakra illetve oldalközéppontokra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írható körén vannak.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggések helyességét minden háromszögre!

a.) $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$

b.) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$

c.) $r_a + r_b + r_c - r = 4R$

d.) $\sin a + \sin b + \sin g = \frac{s}{R}$

e.) $r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r = t^2$

f.) $a^2 b^2 c^2 = 16R^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$

g.) $t = r^2 \cdot ctg\frac{a}{2} \cdot ctg\frac{b}{2} \cdot ctg\frac{g}{2}$

h.) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = s^2$

i.) $\left(\frac{r_a}{m_a}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{m_b}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{m_c}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2}{2r^2}$

2. A következő feladatok derékszögű háromszögekre vonatkoznak (**c** az átfogó).

a.) $r = 14 \quad r_c = 99 \qquad a;\ b;\ c = ?$

b.) $c = 73 \quad r = 15 \qquad a;\ b = ?$

c.) $r = 10 \quad a = 28 \qquad b;\ c = ?$

d.) $r = 3 \quad k = 40 \qquad a;\ b;\ c = ?$

3. Egy háromszög hozzáírt köreinek sugarai 3; 10 és 15 egység. Mekkora a háromszög kerülete?

4. Szerkesztendő az ***ABC*** háromszög ha adott az AB oldal, a beírt kör sugara, továbbá az ***AB*** oldalhoz hozzáírt kör sugara.

5. Adott egy konvex szögtartomány és rajta kívül egy ***P*** pont. Szerkesszük a ***P*** ponton keresztül olyan egyenest, mely a szögtartományból adott kerületű háromszöget vág le!

6. Adott az ***ABC*** háromszög és a köré írt egységnyi sugarú kör. Van egy olyan körzőnk, mellyel csak egységnyi sugarú köröket tudunk szerkeszteni. Szerkesszük meg a háromszög magasságpontját csak ennek a körzőnek a segítségével!

7. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a c oldal, a hozzátartozó m_c magasság, és a másik két oldal összege: d (= a + b)!

8. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik szöge, az ezt felező egyenes háromszögbe eső szakasza és a háromszög kerülete!

9. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt körének, valamint két hozzáírt körének középpontja!

10. Tekintsük az ***ABC*** háromszöget oldalait érintő négy kör közül az a kettőt, amely az ***AB*** oldalt érinti. Bizonyítsuk be, hogy e két kör sugarának mértani közepe nem lehet nagyobb az ***AB*** oldal felénél!

11. Mutassuk meg, hogy az ***ABC*** háromszöget érintő körök közül bármelyik három középpontján átmenő kör sugara az ***ABC*** háromszög köré írható körének átmérőjével egyenlő!

12. Az ***ABC*** háromszögbe írt kör a ***BC*** oldalt ***D*** pontban, a körnek *BC*-vel párhuzamos érintője ***E*** pontban érinti. Az ***AE*** egyenes a ***BC*** oldalt az ***M*** pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy ***BM*** = ***CD***!

13. Az ***ABC*** háromszög oldalait a beírt kör K_1, K_2 és K_3 pontokban érinti. A hozzáírt körök középpontjai O_1, O_2 és O_3. Bizonyítsuk be, hogy az ***ABC*** háromszög területe mértani közepe $K_1K_2K_3$ és $O_1O_2O_3$ háromszögek területeinek!

14. Egy háromszög egyik oldala egyenlő a másik két oldal összegének harmadával. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti háromszögbe és a középháromszögbe írt körök érintik egymást!

15. Az ***ABC*** háromszögbe írt kör középpontja ***O***, a hozzáírt köröké O_1, O_2, O_3. Bizonyítsuk be, hogy a négy pont közül bármelyik három ponton átmenő kör sugara ugyanakkora!

16. Egy háromszög hozzáírt köreinek középpontjából állítsunk merőlegeseket a háromszög érintett oldalaira. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy pontban metszi egymást!

17. Kössük össze a háromszög egyik csúcsát a beírt kör és a szemközti oldalhoz tartozó hozzáírt kör középpontjával. Bizonyítsuk be, hogy a két távolság szorzata egyenlő a választott csúcs és a másik két hozzáírt kör középpontja közti távolságok szorzatával!

18. A háromszög oldalait belülről érintő körhöz az ***a***, ***b***, ***c*** oldalakkal párhuzamosan húzott érintőknek a háromszög belsejében lévő szakaszai legyenek $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{c_1}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1\,!$$

19. A 18. feladatban leírt módon keletkezett „kis háromszögekbe” is rajzoljuk meg a beírható köröket. Határozzuk meg a négy kör területének összegét az eredeti háromszög oldalainak segítségével!

20. Egy háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő négy kör sugara egy mértani sorozat egymást követő négy eleme. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

21. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög területe egyenlő a köré írt kör sugarának és a talpponti háromszög félkerületének szorzatával!

22. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben $\cos a + \cos b + \cos g = 1 + \frac{r}{R}$!

$$\cos a + \cos b + \cos g \le \frac{3}{2}$$

(Sugáregyenlőtlenség: $\cos a \cos b \cos g \le \frac{1}{8}$)

$$R\cos a + R\cos b + R\cos g = R + r$$

23. Legyen $A_1,\ A_2,\ \mathbf{L}\ A_n$ tetszőleges **n** oldalú húrsokszög, melyet egymást nem metsző átlói (**n-2**) darab háromszögre bontanak. Igazoljuk, hogy a háromszögekbe beírt körök sugarainak összege nem függ a felbontástól!

24. Egy háromszög oldalai egész számok, beírt körének sugara egységnyi. Határozzuk meg a háromszög oldalait!

25. Egy háromszög oldalainak, valamint beírt köre r és hozzáírt körei r_a, r_b, r_c sugarainak mérték-számai egész számok, a sugarakéi párosak. Határozzuk meg a háromszög oldalait, ha

$$r\cdot r_a\cdot r_b + r\cdot r_b\cdot r_c + r\cdot r_c\cdot r_c + r_a\cdot r_b\cdot r_c = r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c\ !$$

26. Valamely háromszögről a következőt tudjuk: $r = 1$; $r_a, r_b, r_c \in Z^+$; $t \in Z^+$. Határozzuk meg a háromszög a háromszög oldalait!

27. Egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai egészek, melyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. Az átfogóhoz hozzáírt kör sugara 420. Határozzuk meg az oldalak mértékszámát!

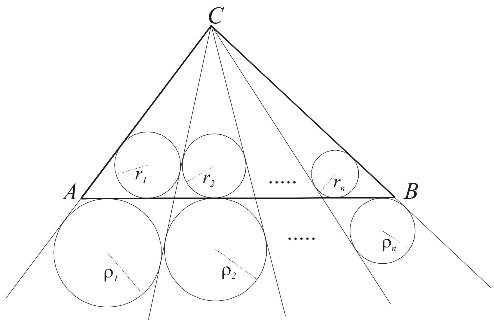
28. Az ***ABC*** hegyesszögű háromszög magasságpontja ***M***, oldalai ***a***, ***b***, ***c***. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} = \frac{a}{MA} \cdot \frac{b}{MB} \cdot \frac{c}{MC}\,!$$

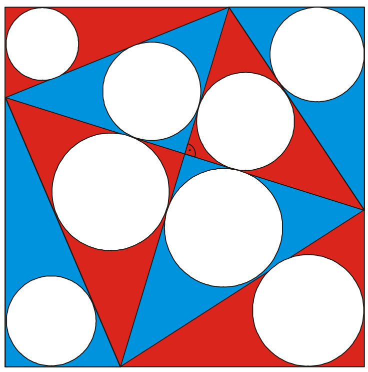
29. Állapítsuk meg az $\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{s^2}$ tört minimumát!

30. Bizonyítandó: $\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$

(A felosztó egyenesek tetszőlegesek; r az ABC háromszögbe írt kör sugara; ρ az ABC háromszöghöz hozzáírt kör sugara)



31. Egy négyzetbe írjunk egy olyan általános négyszöget, melynek átlói merőlegesek egymásra. A beírt négyszög oldalai és az átlói a négyzetet nyolc háromszögre bontja, melyekbe megrajzoljuk a beírt köröket és az egyes háromszögeket az ábra szerint pirosra és kékre színezzük. Igazoljuk, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak az összege megegyezik a kék háromszögbe írt körök sugarainak az összegével!



32. Jelölje ***P*** egy szabályos háromszög tetszőleges belső pontját. ***P***-ből az oldalakra állított merőlegesek talppontjai A_1, B_1 és C_1. A keletkezett hat kis háromszöget kiszínezzük pirossal és kékkel felváltva valamelyik körüljárást követve, majd megrajzoljuk mindegyik kis háromszög beírható körét. Bizonyítsuk be, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak az összege megegyezik a kék háromszögekbe írt körök sugarainak az összegével!

33. Az ***ABCD*** érintőtrapézt átlói négy háromszögre bontják. A két-két szemközti háromszöget színezzük pirosra és kékre, majd megrajzoljuk mindegyik kis háromszögbe írható kört. Bizonyítsuk be, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszege megegyezik a kék háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszegével!

34. Egy tetszőleges háromszögben megrajzoljuk a súlyvonalakat, majd a keletkezett kis háromszögeket valamelyik körüljárást követve felváltva pirosra és kékre színezzük és megrajzoljuk mindegyik beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszege megegyezik a kék háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszegével!

35. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög derékszögű, akkor az oldalegyeneseket érintő körök sugarai közül az egyik egyenlő a másik három érintő kör sugarának összegével!

Megoldások

Feladat 1.

Bizonyítsuk be az alábbi összefüggések helyességét minden háromszögre!

a.)

$$\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}$$

Induljunk ki a háromszög területét kifejező összefüggésekből:

$$t=\frac{am_a}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{m_a}=\frac{a}{2t}$$

$$t=rs \qquad \Rightarrow \qquad \frac{s}{t}=\frac{1}{r}$$

A többi oldalra is felírva, majd összeadva őket:

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{a}{2t}+\frac{b}{2t}+\frac{c}{2t}=\frac{a+b+c}{2t}=\frac{2s}{2t}=\frac{s}{t}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{1}{r} \quad \square$$

b.)

$$\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$$

Induljunk ki a háromszög területét kifejező összefüggésekből:

$$t=r_a(s-a) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r_a}=\frac{s-a}{t}$$

$$t=rs \qquad \Rightarrow \qquad \frac{s}{t}=\frac{1}{r}$$

A többi oldalra is felírva, majd összeadva őket:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{s-a}{t}+\frac{s-b}{t}+\frac{s-c}{t}=\frac{3s-(a+b+c)}{t}=\frac{s}{t}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r} \quad \square$$

c.)

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

Induljunk ki a háromszög területét kifejező összefüggésekből:

$$t = r_a(s-a) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_a} = \frac{s-a}{t}$$

$$t = rs \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{t} = \frac{1}{r}$$

$$R = \frac{abc}{4t} \quad \Rightarrow \quad \frac{abc}{t} = 4R$$

A többi oldalra is felírva, majd összeadva őket:

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{t}{s-a} + \frac{t}{s-b} + \frac{t}{s-c} - \frac{t}{s} =$$

$$= \frac{t[s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c)]}{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{t[s(s-c)(s-b+s-a) + (s-a)(s-b)(s-s+c)]}{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{t \cdot c(s^2 - c \cdot s + s^2 - a \cdot s - b \cdot s + a \cdot b)}{t^2} =$$

$$= \frac{c\left(2s^2 - (a+b+c)s + ab\right)}{t} = \frac{c\left(2s^2 - 2s^2 + ab\right)}{t} = \frac{abc}{t} = 4R$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \ \square$$

d.)

$$\sin a + \sin b + \sin g = \frac{s}{R}$$

Induljunk ki a színusztételből:

$$\sin a = \frac{a}{2R}$$

A többi oldalra is felírva, majd összeadva őket:

$$\sin a + \sin b + \sin g = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{s}{R}$$

$$\sin a + \sin b + \sin g = \frac{s}{R} \ \square$$

e.)

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r = t^2$$

Használjuk a következő összefüggéseket:

$$R = \frac{abc}{4t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{abc}{4R} \qquad \Rightarrow \qquad t^2 = \left(\frac{abc}{4R}\right)^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16R^2}$$

$$t^2 = \frac{t^4}{t^2} = \frac{t^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s-a} \cdot \frac{t}{s-b} \cdot \frac{t}{s-c} = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \quad \square$$

f.)

$$a^2b^2c^2 = 16R^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

Használjuk fel az e.) részben kapott összefüggéseket:

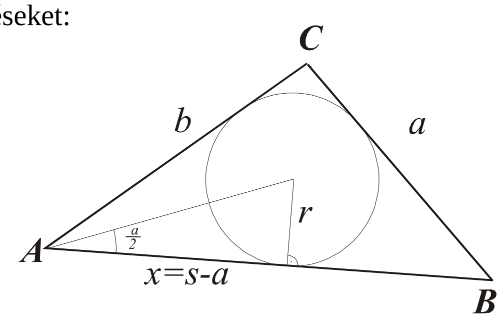
$$t^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16R^2} = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$a^2b^2c^2 = 16R^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \quad \square$$

g.)

$$t = r^2 \cdot ctg\frac{a}{2} \cdot ctg\frac{b}{2} \cdot ctg\frac{g}{2}$$

Használjuk fel az ábráról is leolvasható ismert összefüggéseket:



$$ctg\frac{a}{2} = \frac{s-a}{r}$$

$$t = rs$$

A többi oldalra is felírva, majd alakítva:

$$t = \frac{t^2}{t} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{r \cdot s} =$$

$$= r^2 \cdot \frac{s-a}{r} \cdot \frac{s-b}{r} \cdot \frac{s-c}{r} = r^2 ctg\frac{a}{2} ctg\frac{b}{2} ctg\frac{g}{2}$$

$$t = r^2 ctg\frac{a}{2} ctg\frac{b}{2} ctg\frac{g}{2} \quad \square$$

Ha továbblépünk, és másképpen is felírjuk a területet

$$t = rs = r(3s - 2s) = r((s-a)+(s-b)+(s-c)) =$$

$$= r\left(rctg\frac{a}{2} + rctg\frac{b}{2} + rctg\frac{g}{2} \right) = r^2\left(ctg\frac{a}{2} + ctg\frac{b}{2} + ctg\frac{g}{2} \right)$$

$$t = r^2\left(ctg\frac{a}{2} + ctg\frac{b}{2} + ctg\frac{g}{2} \right)$$

Ez az állítás is minden háromszögre teljesül.

Összevetve az előbb kapott azonossággal kapjuk:

$$t = r^2 ctg\frac{a}{2} ctg\frac{b}{2} ctg\frac{g}{2} = r^2\left(ctg\frac{a}{2} + ctg\frac{b}{2} + ctg\frac{g}{2} \right)$$

$$ctg\frac{a}{2} ctg\frac{b}{2} ctg\frac{g}{2} = ctg\frac{a}{2} + ctg\frac{b}{2} + ctg\frac{g}{2}$$

ami minden háromszögre érvényes.

(Teljesen hasonló módon megkaphatjuk a minden nem derékszögű háromszögre érvényes

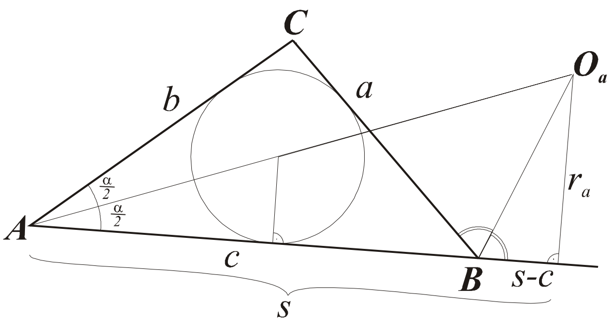
$$tga + tgb + tgg = tga\, tgb\, tgg$$

összefüggést.)

h.)

$$\boxed{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = s^2}$$

Használjuk a következő összefüggéseket:



$$r_a = \frac{t}{s-a}$$

$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$s(s-a) = \frac{t^2}{(s-b)(s-c)}$$

Ezt a többi oldalra is felírva és felhasználva:

$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c =$$

$$= \frac{t}{s-b}\cdot\frac{t}{s-c} + \frac{t}{s-a}\cdot\frac{t}{s-c} + \frac{t}{s-a}\cdot\frac{t}{s-b} =$$

$$= \frac{t^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{t^2}{(s-a)(s-c)} + \frac{t^2}{(s-a)(s-b)} = s(s-a) + s(s-b) + s(s-c) =$$

$$= s\big((s-a)+(s-b)+(s-c)\big) = s(3s-2s) = s^2$$

$$s^2 = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c \quad \square$$

Ha a bizonyított állításunkat tovább rendezzük:

$$s^2 = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c$$

$$1 = \frac{r_a}{s}\cdot\frac{r_b}{s} + \frac{r_a}{s}\cdot\frac{r_c}{s} + \frac{r_b}{s}\cdot\frac{r_c}{s}$$

$$1 = tg\frac{a}{2}tg\frac{b}{2} + tg\frac{a}{2}tg\frac{g}{2} + tg\frac{b}{2}tg\frac{g}{2}$$

összefüggéshez jutunk.

i.)

$$\boxed{\left(\frac{r_a}{m_a}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{m_b}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{m_c}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2}{2r^2}}$$

Használjuk a következő összefüggéseket:

$$t = \frac{am_a}{2} = r_a(s-a) = rs$$

$$\frac{r_a}{m} = \frac{a}{2(s-a)} = \frac{s-(s-a)}{2(s-a)} = \frac{s}{2(s-a)} - \frac{1}{2} = \frac{r_a}{2r} - \frac{1}{2} = \frac{r_a - r}{2r}$$

Ezt a többi oldalra is felírva és felhasználva:

$$\left(\frac{r_a}{m_a}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{m_b}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{m_c}\right)^2 = \left(\frac{r_a - r}{2r}\right)^2 + \left(\frac{r_b - r}{2r}\right)^2 + \left(\frac{r_c - r}{2r}\right)^2 =$$

$$= \frac{3r^2 - 2r(r_a + r_b + r_c) + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{4r^2} =$$

felhasználva a c.) és a h.) feladat eredményeit

$$= \frac{(r_a + r_b + r_c - r)^2 - 2(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c) + 2r^2}{4r^2} =$$

$$= \frac{16R^2 - 2s^2 + 2r^2}{4r^2} = \frac{8R^2 + r^2 - s^2}{2r^2}$$

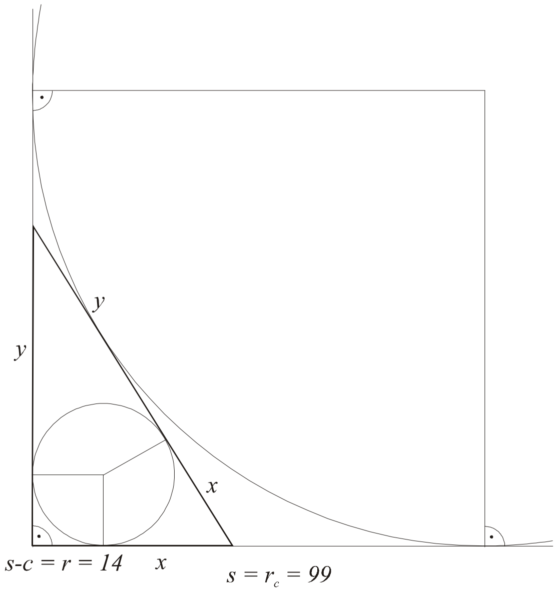
$$\left(\frac{r_a}{m_a}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{m_b}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{m_c}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2 - s^2}{2r^2} \quad \square$$

Feladat 2.

A következő feladatok derékszögű háromszögekre vonatkoznak (c az átfogó).

a.)

$r = 14 \quad r_c = 99 \qquad a;\ b;\ c = ?$



Írjunk fel összefüggéseket az ismeretlenekre!

$$c = s - (s - c) = 99 - 14 = 85$$

Tehát

$$x + y = 85$$

A Pitagorasz-tételét felírva:

$$(x+14)^2 + (y+14)^2 = 85^2 = (x+y)^2$$

$$xy = 1386$$

Ugyanezt megkaptuk volna, ha a területet írjuk fel kétféle módon

$$t = rs = \frac{(x+14)(y+14)}{2}$$

A kapott egyenlterendszert megoldva

$$\begin{cases} x_1 = 63 \\ y_1 = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 22 \\ y_2 = 63 \end{cases}$$

Tehát a háromszög befogói 77 illetve 36 egységnyiek. □

b.)

$c = 73 \quad r = 15 \qquad a;\ b = ?$

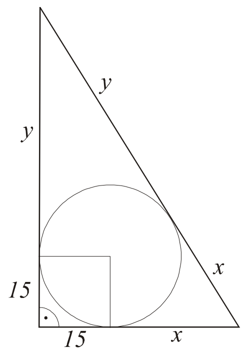
Számítsunk ki adatokat:

$$c = 73 = x + y$$

$$s = \frac{(x+15)+(y+15)+(x+y)}{2} = x + y + 15 = 88$$

Írjuk fel a területet kétféle módon

$$t = rs = \frac{(x+15)(y+15)}{2}$$



$$15\cdot 88=\frac{(x+15)(y+15)}{2}$$

$$xy=1320$$

A kapott egyenlterendszert megoldva

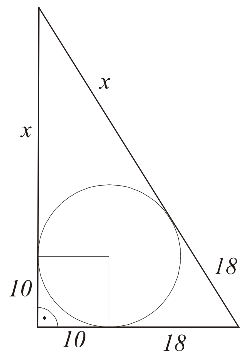
$$\begin{cases}x_1=33\\y_1=40\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=40\\y_2=33\end{cases}$$

Tehát a háromszög befogói 55 illetve 48 egységnyiek. □

c.)

$r=10$ $a=28$	$b; c=?$

Írjuk fel a pitagorasz-tételt



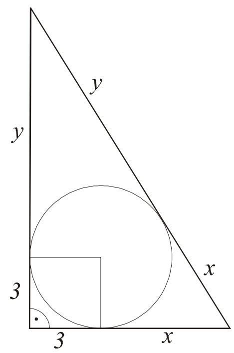
$$(x+10)^2+28^2=(x+18)^2$$
$$20x+100+784=36x+324$$
$$x=35$$

Tehát a keresett oldalak: $b=45$ és $c=53$. □

d.)

$r=3$ $k=40$	$a; b; c=?$

Számítsunk ki adatokat:



$$s=20=\frac{2x+2y+6}{2}=x+y+3$$

$$x+y=17$$

Írjuk fel a területet kétféle módon

$$t=rs=\frac{(x+3)(y+3)}{2}$$

$$3\cdot 20=\frac{(x+3)(y+3)}{2}\qquad\Rightarrow\qquad xy=60$$

A kapott egyenlterendszert megoldva

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=5\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=5\\y_2=2\end{cases}$$

Tehát a háromszög befogói 8 illetve 15 egységnyiek. □

Feladat 3.

Egy háromszög hozzáírt köreinek sugarai 3; 10 és 15 egység. Mekkora a háromszög kerülete?

Az 1/h. feladat alapján

$$3 \cdot 10 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 15 = s^2$$

$$s = 15 \qquad \Rightarrow \qquad k = 30 \quad \square$$

Feladat 4.

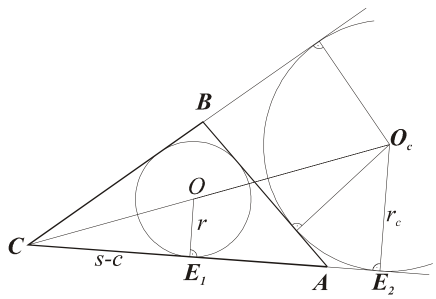
Szerkesztendő az ***ABC*** *háromszög ha adott az* ***AB*** *oldal, a beírt kör sugara, továbbá az* ***AB*** *oldalhoz hozzáírt kör sugara.*

Az ábra alapján:

$$E_1E_2 = E_1A + AE_2 = s - a + s - b = c$$

$$E_1E_2 = c$$

$E_1E_2O_cO$ szerkeszthető, tehát a háromszög is szerkeszthető. □



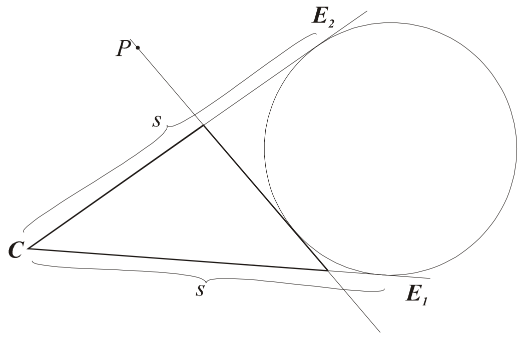
Feladat 5.

Adott egy konvex szögtartomány és rajta kívül egy ***P*** *pont. Szerkesszük a* ***P*** *ponton keresztül olyan egyenest, mely a szögtartományból adott kerületű háromszöget vág le!*

Az ábra alapján:

A ***c*** oldalhoz hozzáírt kör könnyen szerkeszthető, hiszen E_1 és E_2 is s távolságra van a ***C***-től. Ezután ***P***-ből érintőt szerkesztünk ***k***-hoz.

(Nincs megoldás, ha nem szerkeszthető érintő.) □



Feladat 6.

Adott az ***ABC*** *háromszög és a köré írt egységnyi sugarú kör. Van egy olyan körzőnk, mellyel csak egységnyi sugarú köröket tudunk szerkeszteni. Szerkesszük meg a háromszög magasságpontját csak ennek a körzőnek a segítségével!*

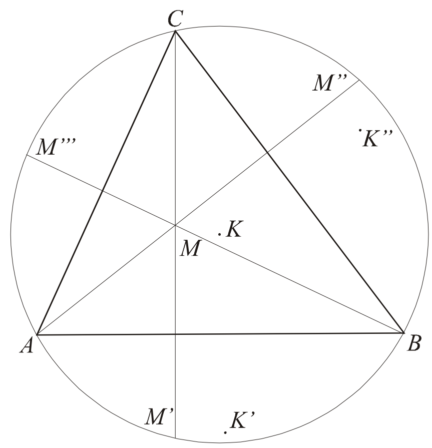
Az ábra alapján:

Tudjuk, hogy ***M*** oldalakra vonatkozó tükörképe ***k***-n van.

Ezért $KM' = KM'' = KM''' = 1$.

Így, ha az oldalakra tükrözzük pl. KM'-t, akkor a tükörkép is egységnyi.

Tehát ***K***-t tükrözzük két oldalra (***K'***;***K''***), majd ***K'*** és ***K''*** körüli egységnyi sugarú körök metszéspontjaként megkapjuk ***M***-et. □



Feladat 7.

*Szerkesszünk háromszöget, ha adott a **c** oldal, a hozzátartozó **m** magasság, és a másik két oldal összege: **d** (= **a** + **b**)!*

Az ábra alapján:

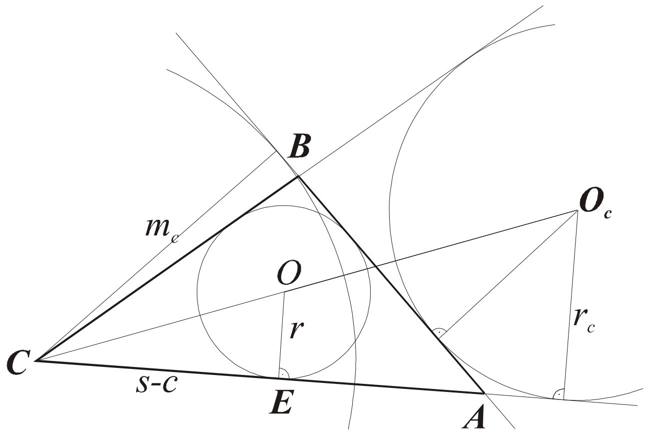
$$s = \frac{c+d}{2} \text{ szerkeszthető}$$

$$c \cdot m_c = r \cdot s \quad \Rightarrow \quad \frac{m_c}{r} = \frac{s}{c}$$

azaz r szerkeszthető (negyedik arányos szerkesztése).

Így a szerkesztés menete például:

$CEO\Delta$ szerkesztése,ebből a beírható kör szerkesztése,majd ***C*** középpontú, m_c sugarú kör felvétele.A két kör közös külső érintője a ***c*** oldal. □

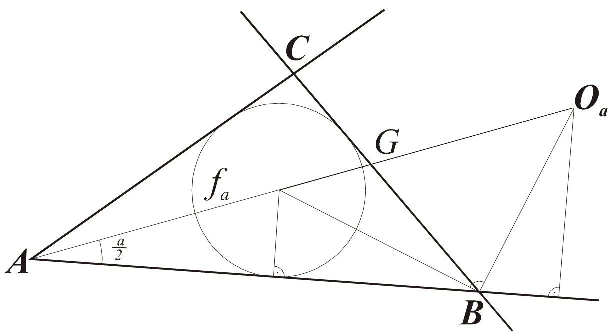


Feladat 8.

Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik szöge, az ezt felező egyenes háromszögbe eső szakasza és a háromszög kerülete!

Az ábra alapján:

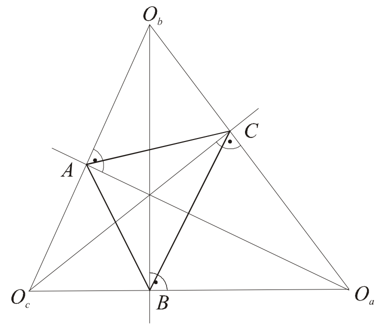
G szerkesztése;az a oldalhoz hozzáírt kör szerkesztése; ***G***-ből érintő szerkesztése a körhöz. □



Feladat 9.

Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt körének, valamint két hozzáírt körének középpontja!

Az ábra alapján:



O_b -ből merőleges szerkeztése O_aO -ra, O_a -ból merőleges szerkesztése O_bO -ra. Az így kapott egyenesek metszéspontja O_c .ABC az $O_aO_bO_c$ talpponti háromszöge. □

Feladat 10.

*Tekintsük az **ABC** háromszöget oldalait érintő négy kör közül az a kettőt, amely az **AB** oldalt érinti. Bizonyítsuk be, hogy e két kör sugarának mértani közepe nem lehet nagyobb az **AB** oldal felénél!*

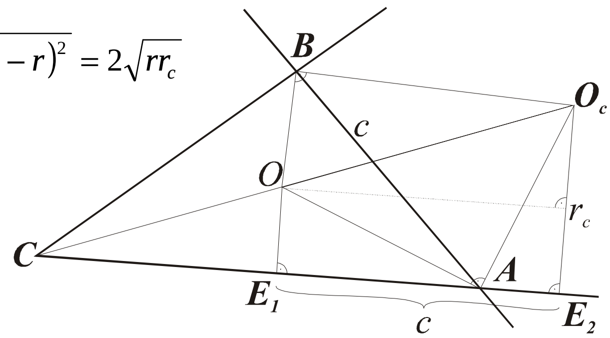
Az ábra alapján:

$$c=\sqrt{OO_c^2.-(r_c-r)^2}\geq\sqrt{(r+r_c)^2-(r_c-r)^2}=2\sqrt{rr_c}$$

$$c\geq 2\sqrt{rr_c}$$

$$\frac{c}{2}\geq\sqrt{rr_c}\quad\square$$

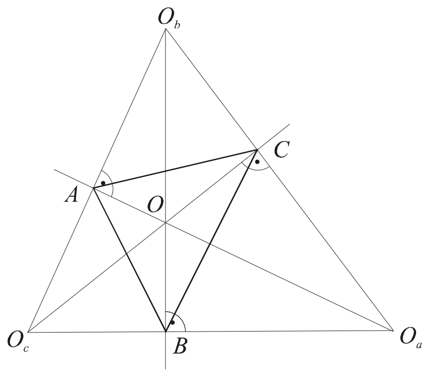
És ezt kellett bizonyítanunk!



Feladat 11.

*Mutassuk meg, hogy az **ABC** háromszöget érintő körök közül bármelyik három középpontján átmenő kör sugara az **ABC** háromszög köré írható körének átmérőjével egyenlő!*

Az ábra alapján:

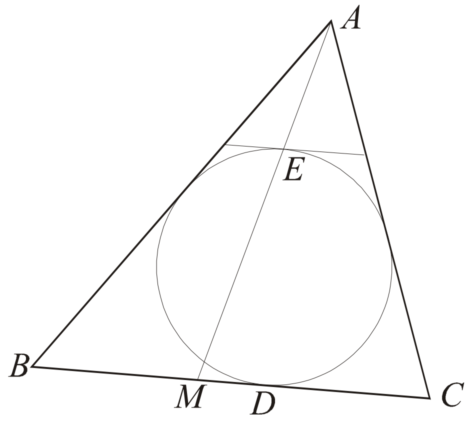


Triviális, hogy az $O_aO_bO_c$ háromszög mindig hegyesszögű melynek O a magasságpontja.Az $O;O_a;O_b;O_c$ pontok közül bármely három köré írható kör sugara megegyezik(lásd Geometriai feladatok gyüjteménye I., 1082.feladat). Másrészt az ***ABC*** háromszög köré írt kör az $O_aO_bO_c$ háromszög Feuerbach köre, s így sugara fele az $O_aO_bO_c$ háromszög köré írt sugarának. □

Feladat 12.

*Az **ABC** háromszögbe írt kör a **BC** oldalt **D** pontban, a körnek **BC**-vel párhuzamos érintője **E** pontban érinti. Az **AE** egyenes a **BC** oldalt az **M** pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy **BM = CD**!*

Az ábra alapján:



Ha megmutatjuk, hogy ***M*** a hozzá írt kör érintési pontja akkor készen vagyunk, hiszen a beírt kör érintési pontja olyan messze van az egyik csúcstól, mint a hozzáírt kör érintési pontja a másiktól.

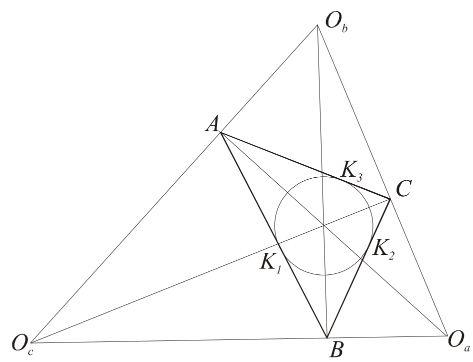
A beírt kör a felső kis háromszögnek hozzá írt köre.

Tekintsük azt a középpontos hasonlóságot (középpont: ***A***), mely a kis háromszöget a nagy háromszögbe viszi. Ez a hozzá írt kör ***E*** érintési pontját is átviszi az ***M***-be, a nagy háromszög hozzáírt körének érintési pontjába. □

Feladat 13.

*Az **ABC** háromszög oldalait a beírt kör **K₁**, **K₂** és **K₃** pontokban érinti. A hozzáírt körök középpontjai **O₁**, **O₂** és **O₃**. Bizonyítsuk be, hogy az **ABC** háromszög területe mértani közepe **K₁K₂K₃** és **O₁O₂O₃** háromszögek területeinek!*

Használjuk a következő jelöléseket:



$$t_{o_a o_b o_c} = T$$

$$t_{ABC} = t$$

$$t_{K_1 K_2 K_3} = t$$

Ekkor felírhatjuk a következőket

$$t = t - \left(\frac{(s-a)^2 \cdot \sin a}{2} + \frac{(s-b)^2 \cdot \sin b}{2} + \frac{(s-c)^2 \cdot \sin g}{2} \right)$$

$$t = \frac{a \cdot b \cdot \sin g}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin g = \frac{2 \cdot t}{a \cdot b}$$

$$t = t - t \cdot \left(\frac{(s-a)^2}{bc} + \frac{(s-b)^2}{ac} + \frac{(s-c)^2}{ab} \right) =$$

$$= t \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot c - a \cdot (s-a)^2 - b \cdot (s-b)^2 - c \cdot (s-c)^2}{a \cdot b \cdot c} \right) =$$

$$=t\cdot\left(\frac{a\cdot b\cdot c-a\cdot s^2+2\cdot a^2\cdot s-a^3-b\cdot s^2+2\cdot b^2\cdot s-b^3-c\cdot s^2+2\cdot c^2\cdot s-c^3}{a\cdot b\cdot c}\right)=$$

$$=t\cdot\left(\frac{-(a+b+c)\cdot s^2+2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot s-\left(a^3+b^3+c^3\right)+a\cdot b\cdot c}{a\cdot b\cdot c}\right)=$$

$$=\frac{2\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{a\cdot b\cdot c}$$

Tudjuk, hogy

$$r_a(s-a)=t \quad\Rightarrow\quad r_a=\frac{t}{s-a}$$

$$T=\frac{a\cdot r_a}{2}+\frac{b\cdot r_b}{2}+\frac{c\cdot r_c}{2}+t=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}+2\right)\cdot t=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot t}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$T\cdot t=t^2$$ □

Feladat 14.

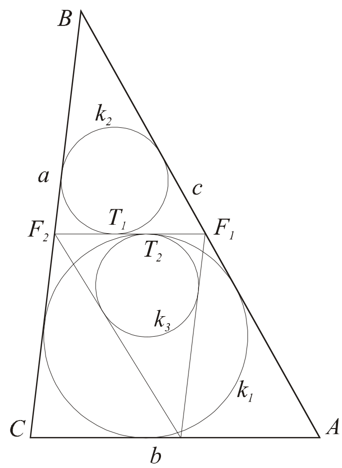
Egy háromszög egyik oldala egyenlő a másik két oldal összegének harmadával. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti háromszögbe és a középháromszögbe írt körök érintik egymást!

Az ábra alapján:

$$b=\frac{a+c}{3} \quad\Rightarrow\quad CAF_1F_2 \text{ érintőnégyszög,}$$

tehát F_1F_2 érinti a beírható kört.

$T_1F_2=F_1T_2$ (a beírt illetve a hozzáírt kör érintési pontjainak csúcsoktól való távolsága alapján). Jelölje k_2 az F_1BF_2 háromszög beírt körét. A k_2 kör tükörképe F_1F_2 felezőpontjára k_3. F_1F_2 a k_1 és k_3 közös érintője T_2-ben. Tehát k_1 és k_3 T_2-ben érinti egymást. □



Feladat 15.

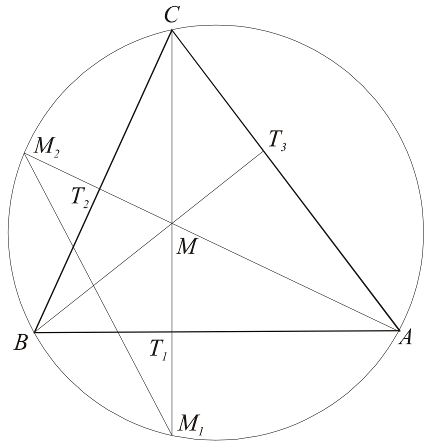
*Az **ABC** háromszögbe írt kör középpontja **O**, a hozzáírt köröké **O₁, O₂, O₃**. Bizonyítsuk be, hogy a négy pont közül bármelyik három ponton átmenő kör sugara ugyanakkora!*

Az $O_1O_2O_3$ háromszög mindig hegyesszögű valamint lásd a *Geometriai feladatok gyűjteménye I. 1082. feladat*ának megoldását! □

Feladat 16.

Egy háromszög hozzáírt köreinek középpontjából állítsunk merőlegeseket a háromszög érintett oldalaira. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy pontban metszi egymást!

Az ábra alapján:



A hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszögben az eredeti háromszög talpponti háromszög. Ha megmutatjuk, hogy a háromszög csúcsaiból a talpponti háromszög oldalaira emelt merőlegesek egy pontban metszik egymást, akkor készen vagyunk. Megmutatjuk, hogy ezek az egyenesek átmennek a háromszög köré írható kör középpontján.

Legyen M_1 illetve M_2 az M tükörképe AB -re illetve BC -re (rajta vannak k -n).

$MB = M_1B = M_2B$ így M_1BM_2 egyenlőszárú, tehát a B -ből induló M_1M_2 -re merőleges egyenes felezi az M_1M_2 húrt, s így átmegy k középpontján is. $M_1M_2 \| T_1T_2$ (hisz M középpontú ½-szeres középpontos hasonlóság adja), így az M_1M_2 felező merőlegese merőleges T_1T_2 -re, azaz a csúcsokból a talpponti háromszög oldalaira bocsátott egyenesek átmennek a kör középpontján. □

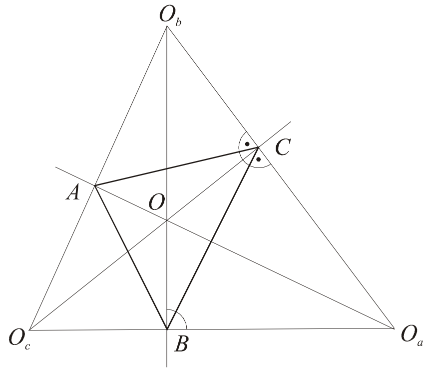
Feladat 17.

Kössük össze a háromszög egyik csúcsát a beírt kör és a szemközti oldalhoz tartozó hozzáírt kör középpontjával. Bizonyítsuk be, hogy a két távolság szorzata egyenlő a választott csúcs és a másik két hozzáírt kör középpontja közti távolságok szorzatával!

Az állítás így is írható:

$$\frac{\overline{CO_b}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO_c}}{\overline{CO_a}}$$

Az ábra alapján:



$$O_bOC_\Delta \sim CO_cO_{a\Delta}$$

$$O_bCO\angle = O_aCO_c\angle = 90^o$$

$$CO_bO\angle = CO_cO_a\angle$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\overline{CO_b}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO_c}}{\overline{CO_a}} \quad \square$$

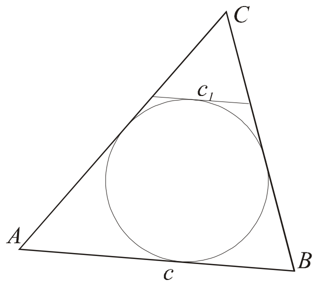
Feladat 18.

A háromszög oldalait belülről érintő körhöz az ***a, b, c*** *oldalakkal párhuzamosan húzott érintőknek a háromszög belsejében lévő szakaszai legyenek* a_1*,* b_1*,* c_1*. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1$$

!

Az ábra alapján:



A kis háromszög hasonló az ***ABC*** háromszöghöz, a hasonlóságuk aránya a hozzáírt körök érintési pontjait a távolabbi csúcsokkal összekötő szakaszok aránya.

$$\frac{c_1}{c}=\frac{s-c}{s}$$

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=\frac{3s-(a+b+c)}{s}=1 \quad \square$$

Feladat 19.

A 18. feladatban leírt módon keletkezett „kis háromszögekbe” is rajzoljuk meg a beírható köröket. Határozzuk meg a négy kör területének összegét az eredeti háromszög oldalainak segítségével!

Az előző észrevételt felhasználva:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{s-a}{s} \qquad \frac{r_2}{r}=\frac{s-b}{s} \qquad \frac{r_3}{r}=\frac{s-c}{s}$$

Így

$$r_1^2 p+r_2^2 p+r_3^2 p+r^2 p=r^2 p\left(\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2}{s^2}\right)=$$

Héron képlet

$$=ps(s-a)(s-b)(s-c)\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2}{s^4} \quad \square$$

Feladat 20.

Egy háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő négy kör sugara egy mértani sorozat egymást követő négy eleme. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

Tegyük fel, hogy

$$r \le r_a \le r_b \le r_c$$

Ekkor

$$\frac{r_a}{r} = \frac{r_c}{r_b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{t}{s-a}}{\frac{t}{s}} = \frac{\frac{t}{s-c}}{\frac{t}{s-b}}$$

$$\frac{s}{s-a} = \frac{s-b}{s-c}$$

$$s^2 - s \cdot c = s^2 - a \cdot s - b \cdot s + a \cdot b$$

$$s \cdot (a+b-c) = a \cdot b$$

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{2} = a \cdot b$$

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - c^2 = 2 \cdot a \cdot b$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

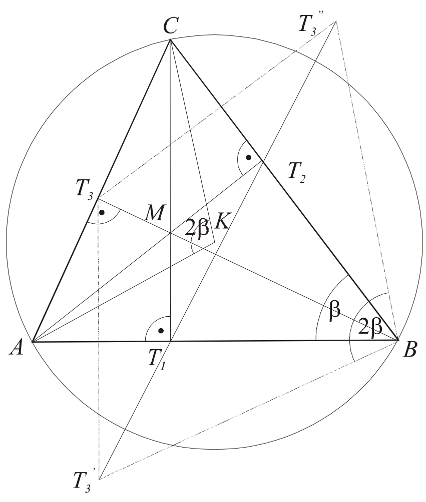
Tehát a háromszög legnagyobb szöge 90°.□

Feladat 21.

Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög területe egyenlő a köré írt kör sugarának és a talpponti háromszög félkerületének szorzatával!

I. megoldás:

Az ábra alapján:



A megoldás hasonló ahhoz, ahogyan a legkisebb kerületű beírható háromszöget szerkesztjük.

$$T_3' B T_3'' \Delta \sim AKC\Delta$$

$$T_3' B = T_3'' B = T_3 B = m_b \qquad T_3' T_3'' = k$$

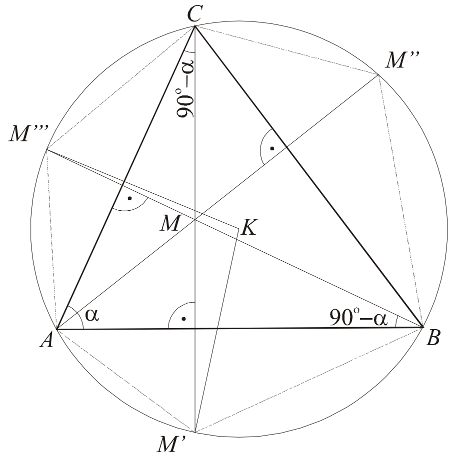
$$\frac{k}{m_b} = \frac{b}{R} \Rightarrow b \cdot m_b = k \cdot R$$

$$t = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{k \cdot R}{2}$$

K a köréírt kör középpontja

k a talpponti háromszög kerülete. □

II. megoldás:



Azt használjuk fel, hogy a magasságpontnak az oldalra vonatkozó tükörképei a köréírt körön vannak. Az AM' BM'' CM''' hatszög területe kétszerese az ABC háromszög területének (a tükrözés miatt). Ez 3 deltoidból rakható össze.(PL. KM' AM''' deltoidból mert KM'''= KM'=R és AM' és AM''' ugyanakkora kerületi szögekhez tartozó húrok.)

Így a hatszög területe:

$$R\cdot\frac{M'M''}{2}+R\cdot\frac{M'M'''}{2}+R\cdot\frac{M''M'''}{2}=$$

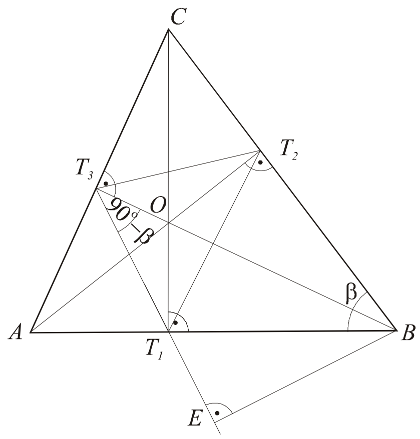
$$=\frac{R}{2}\cdot\left(M'M''+M'M'''+M''M'''\right)$$

Másrészt az M'M''M''' háromszög a talpponti háromszög 2-szeres nagyítása M-ből. Így kerülete is 2-szerese annak. Tehát a hatszög területe:

$$\frac{R}{2}\cdot 2\cdot k\Rightarrow t_{ABC}=\frac{R\cdot k}{2}\quad\square$$

III. megoldás:

Tudjuk, hogy az eredeti ABC magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői. Ez azt is jelenti, hogy pl. AB külső szögfelező, hiszen merőleges a belső (T_1C) szögfelezőre. Ebből következik, hogy B a talpponti háromszög T_1T_2 oldalához írt kör középpontja.



$$T_3E=\frac{k}{2}\qquad\Rightarrow\qquad\cos\left(90^{0}-b\right)=\frac{\frac{k}{2}}{m_b}$$

$$\sin b=\frac{b}{2\cdot R}$$

azaz

$$\frac{k}{2\cdot m_b}=\frac{b}{2\cdot R}$$

$$t_{ABC}=\frac{R\cdot k}{2}\quad\square$$

Feladat 22.

Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben: $\cos a+\cos b+\cos g=1+\frac{r}{R}!$

$$\cos a + \cos b + \cos g = 1 + \frac{r}{R} \qquad [1]$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} =$$

$$1 + \frac{\frac{t}{s}}{\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot T}} = 1 + \frac{4\cdot t^2}{s\cdot a\cdot b\cdot c} = 1 + \frac{4\cdot s\cdot (s-a)(s-b)(s-c)}{s\cdot a\cdot b\cdot c}$$

Már könnyen belátható.

$$\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$$

(sugáregyenlőtlenség) az egyenlőség akkor teljesül, ha a háromszög szabályos. A sugáregyenlőtlenségből következik, hogy a háromszög Feuerbach-féle körének sugara(R/2) nem lehet kisebb a beírt kör sugaránál(r). A fentiekből következik:

$$\cos a + \cos b + \cos g \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \ge \frac{\cos a + \cos b + \cos g}{3} \ge \sqrt[3]{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos g}$$

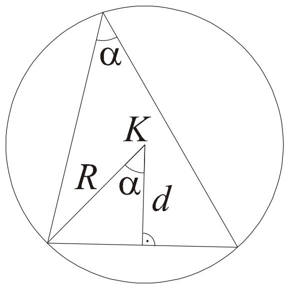
$$\frac{1}{8} \ge \cos a \cdot \cos b \cdot \cos g$$

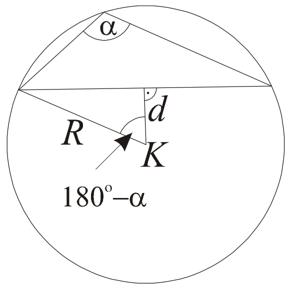
$[1]$-et rendezve:

$$R\cdot \cos a + R\cdot \cos b + R\cdot \cos l = r + R$$

$R\cos a$: K oldaltól való előjeles távolsága

ha $a < 90°$	ha $a = 90°$	ha $a > 90°$
	$\cos a = 0$	$\cos(180° - a) = -\cos a$



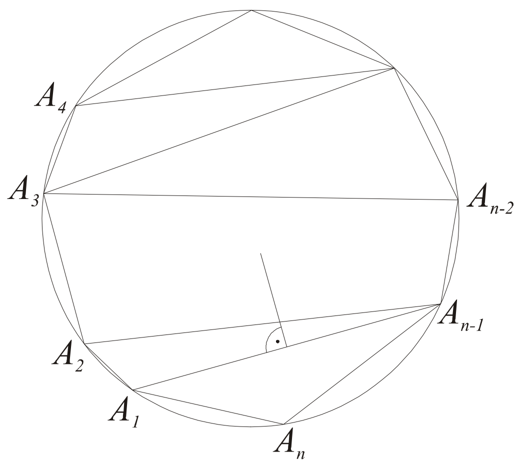


Vagyis az állítás megfogalmazható így is: $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$ ahol d_k a köréírható kör közzépontjának előjeles távolsága a megfelelő oldaltól. □

Feladat 23.

*Legyen $A_1, A_2, \ldots A_n$ tetszőleges **n** oldalú húrsokszög, melyet egymást nem metsző átlói (**n**-2) darab háromszögre bontanak. Igazoljuk, hogy a háromszögekbe beírt körök sugarainak összege nem függ a felbontástól!*

Alkalmazzuk az előző észrevételt minden háromszögre! Minden – átlóhoz tartozó – szakasz pontosan két háromszögben szerepel, egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel, így ha összegezzük minden háromszögre, akkor



$$\sum_{i=1}^{n-2}(R+r_i) = d_1^{'} + d_2^{'} + \ldots + d_n^{'}$$

Ahol $d_1^{'}$ a sokszög oldalainak távolsága a középponttól, és az adott sokszög esetén állandó. Így a fenti egyenletből:

$$\sum_{i=1}^{n-2} r_i = \sum_{i=1}^{n} d_i^{'} - (n-2)R \text{ állandó} \quad \square$$

Feladat 24.

Egy háromszög oldalai egész számok, beírt körének sugara egységnyi. Határozzuk meg a háromszög oldalait!

A következők jelöléseket használjuk:

$$x = s-a; \quad y = s-b; \quad z = s-c$$

$$r = 1$$

$$t_\Delta = r\cdot s = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

$$x+y+z = x\cdot y\cdot z$$

Mivel a, b, c pozitív egészek x, y, z vagy egészek vagy $k+\frac{1}{2}$ alakúak.

a.) x, y, z $\quad k+\frac{1}{2}$ alakúak

2x, 2y, 2z páratlanok

$$\underbrace{4\cdot(2x+2y+2z)}_{\textit{páros}} = \underbrace{2x\cdot 2y\cdot 2z}_{\textit{páratlan}}$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát:

b.) x, y, z egész

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x \geq y \geq x$.

Ekkor

$$3x \geq x + y + 1 = x \cdot y \cdot z$$

$3 \geq y \cdot z$ *(y,z pozitív egészek)*

x	y	z
2	1	3
3	1	2
-	1	1

Tehát a háromszög oldalai 3,4 és 5 egységnyire. □

Feladat 25.

*Egy háromszög oldalainak, valamint beírt köre **r** és hozzáírt körei $\boldsymbol{r_a}$, $\boldsymbol{r_b}$, $\boldsymbol{r_c}$ sugarainak mértékszámai egész számok, a sugarakéi párosak. Határozzuk meg a háromszög oldalait, ha*

$$r \cdot r_a \cdot r_b + r \cdot r_b \cdot r_c + r \cdot r_c \cdot r_c + r_a \cdot r_b \cdot r_c = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \;!$$

$$r \cdot r_a \cdot r_b + r \cdot r_a \cdot r_c + r \cdot r_b \cdot r_c + r_a \cdot r_b \cdot r_c = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$\frac{1}{r} + \underbrace{\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}}_{\frac{1}{r}} = 1 \qquad \frac{2}{r} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2$$

Tehát $t = r \cdot s$ egész $\Rightarrow$ $r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$ négyzetszám

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{2}$$

ha $r_a = r_b = r_c = 6$, akkor $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ nem négyzetszám $\Rightarrow$ ellentmondás!

Az általánosság megszorítása nélkük feltehetjük, hogy $r_a \leq r_b \leq r_c$

$$\frac{3}{r_a} \geq \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r_a \leq 6 \quad \text{(az r=6 esetet már vizsgáltuk)}$$

$r_a = 4$ (hiszen páros és $r_a > r = 2$)

$$\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot r_b + 4 \cdot r_c = r_b \cdot r_c \quad \Rightarrow \quad r_b = \frac{4 \cdot r_c}{r_c - 4} = 4 + \frac{16}{r_c - 4}$$

$r_c - 4$	r_c	r_b	
16	20	5	r_b páros és $r_c \geq r_b$
8	12	6	
4	8	8	
2	6	12	r_b páros és $r_c \geq r_b$
-2	2	-	
-4	0	-	
-8	-4	-	
-16	-12	-	

Ha $r_c = 12$ és $r_b = 6$, akkor $r_a = 4$ és $r = 2$, ekkor

$$t_\Delta^2 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 \qquad \Rightarrow \qquad t_\Delta = 24$$

és

$$s = \frac{24}{2} = 12$$

$$s - a = \frac{24}{4} = 6; \quad s - b = \frac{24}{6} = 4; \quad s - c = \frac{24}{12} = 2$$

$$a = 6; \; b = 8; \; c = 10$$

Ha $r_c = 8$ és $r_b = 8$, akkor $r_a = 4$ és $r = 2$, de ekkor a szorzatuk nem négyzetszám

Tehát a háromszög oldalai 6, 8, és 10 egységnyiek. □

Feladat 26.

Valamely háromszögről a következőt tudjuk: $r = 1$; $r_a, \; r_b, \; r_c \in Z^+$; $t \in Z^+$. Határozzuk meg a háromszög a háromszög oldalait!

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

$$t_\Delta^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = 1$$

ha

$$r_a = r_b = r_c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad t_\Delta = \sqrt{27} \qquad \notin Z^+$$

ha nem mindegyik sugár 3, akkor kell, hogy legyen egy, amely 2 (kisebb nem lehet, hiszen r=1).

Például $r_a = 2$

$$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2r_b+2r_c=r_b r_c \quad \Rightarrow \quad r_b=\frac{2r_c}{r_c-2}=2+\frac{4}{r_c-2}$$

Ebből :

r_c-2	r_c	r_b	
4	6	3	
2	4	4	Szorzatuk gyöke (t) nem egész!
1	3	6	Szorzatuk gyöke (t) nem egész!
-1	-	-	
-2	-	-	
-4	-	-	

Tehát

$$r_c=6\,;\;\; r_b=3;\;\; r_a=2\,;\;\; r=1$$

és ekkor

$$t=\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6}=6$$

valamint

$$s=\frac{t}{3}=6$$

$$s-a=\frac{t}{r_a}\,;\;\; s-b=\frac{t}{r_b}\,;\;\; s-c=\frac{t}{r_c}$$

Tehát a háromszög oldalai 3, 4, és 5 egységnyiek. □

Feladat 27.

Egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai egészek, melyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. Az átfogóhoz hozzáírt kör sugara 420. Határozzuk meg az oldalak mértékszámát!

Az oldalak relatív prímek $\Rightarrow$ pithagoras-i alaphármas:

$$m^2-n^2;2\cdot m\cdot n;m^2+n^2 \quad \text{(m,n külömbözö paritású)}$$

$$r_c=s=m\cdot n+m^2=m\cdot(n+m)$$

$$m\cdot\underbrace{(n+m)}_{\textit{páratlan}}=420 \qquad 420=4\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \qquad \Rightarrow \qquad 4\,|\,m$$

$$m+n>m \qquad \Rightarrow \qquad m+n>\sqrt{420}$$

$$m<\sqrt{420} \qquad \Rightarrow \qquad m\le 20$$

$$m + n \geq 21$$

Másrészt:

$$m + n < 2 \cdot m$$

$$m \cdot 2 \cdot m > 420$$

$$m > \sqrt{210} \qquad \Rightarrow \qquad m \geq 15$$

Tehát $m = 16;20$

Mivel 420 nem osztható 16-tal $m = 20$ $\qquad \Rightarrow \qquad n = 1$

Tehát a=399, b=40, c=401 □

Feladat 28.

*Az **ABC** hegyesszögű háromszög magasságpontja **M**, oldalai **a**, **b**, **c**. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} = \frac{a}{MA} \cdot \frac{b}{MB} \cdot \frac{c}{MC}\,!$$

I. Megoldás

Szíznusztétel felhasználva:

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \frac{a}{2 \cdot R} \qquad (ABC\Delta) \\ \sin\left(90^\circ - a\right) &= \frac{AM}{2R} \qquad \left(ABM\Delta\right) \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad tga = \frac{a}{MA}$$

A többi oldalra felírva kapjuk, hogy

$$tgb = \frac{b}{MB} \qquad tgg = \frac{c}{MC}$$

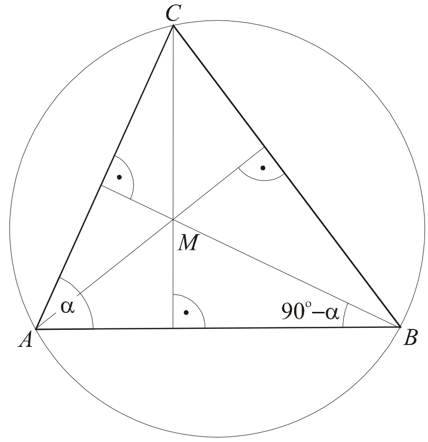
Használjuk fel az ismert összefüggést

$$tga + tgb + tgc = tga \cdot tgb \cdot tgc$$

$$\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} = \frac{a}{MA} \cdot \frac{b}{MB} \cdot \frac{c}{MC} \quad □$$

II. Megoldás

Megint felhasználjuk a Geo. I. 1082. feladatát!



$$t_\Delta = t_{ABM} + t_{BCM} + t_{ACM}$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{c \cdot MA \cdot MB}{4R} + \frac{a \cdot MB \cdot MC}{4R} + \frac{b \cdot MA \cdot MC}{4R}$$

$$\frac{a}{MA} \cdot \frac{b}{MB} \cdot \frac{c}{MC} = \frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} \quad □$$

Feladat 29.

Állapítsuk meg az $\dfrac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{s^2}$ *tört minimumát!*

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{s^2} = \left(\frac{r_a}{s}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{s}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{s}\right)^2 =$$

Használjuk a következő triviális egyenlőtlenséget:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \qquad \Leftrightarrow \qquad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$$

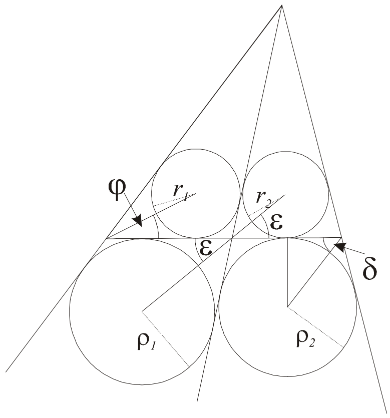
valamint az 1.h feladatot

$$= tg^2\frac{a}{2} + tg^2\frac{b}{2} + tg^2\frac{g}{2} \geq tg\frac{a}{2}\cdot tg\frac{b}{2} + tg\frac{a}{2}\cdot tg\frac{g}{2} + tg\frac{b}{2}\cdot tg\frac{g}{2} = 1$$

Minimális a tört, ha az egyenlőség teljesül, vagyis ha a háromszög szabályos. □

Feladat 30.

Bizonyítandó: $\dfrac{r_1}{\rho_1}\cdot\dfrac{r_2}{\rho_2}\cdot \ldots\ldots \cdot\dfrac{r_n}{\rho_n} = \dfrac{r}{\rho}$

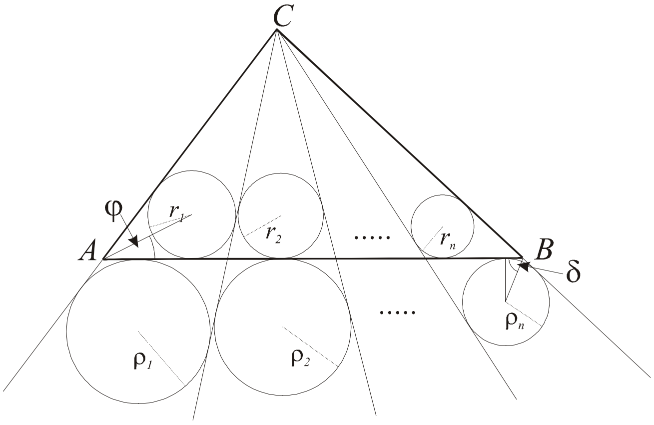


A beírt kör érintési pontja olyan messze van az egyik csúcstól, mint a hozzáírt kör érintési pontja a másiktól

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= (s-a_1)tg\,j \\ \rho_1 &= (s-a_1)tge \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{r_1}{\rho_1} = \frac{tg\,j}{tge}$$

analóg módon

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{tge}{tgd}$$



felhasználva az összefüggéseket

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{tg\,j}{tge}\cdot\frac{tge}{tgd} = \frac{tg\,j}{tgd}$$

Ezt folytatva egymás után a többire is kapjuk

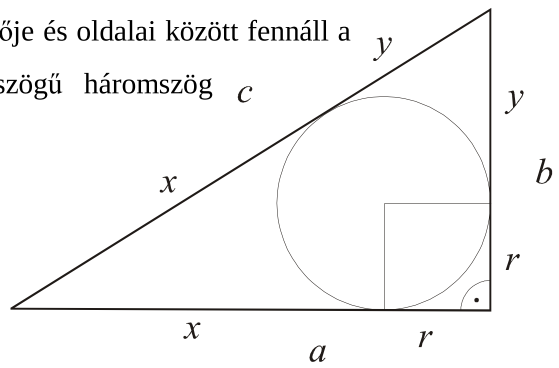
$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{\rho_n} = \frac{tg\,j}{tgd} = \frac{r}{\rho} \quad □$$

Feladat 31.

Egy négyzetbe írjunk egy olyan általános négyszöget, melynek átlói merőlegesek egymásra. A beírt négyszög oldalai és az átlói a négyzetet nyolc háromszögre bontja, melyekbe megrajzoljuk a beírt köröket és az egyes háromszögeket az ábra szerint pirosra és kékre színezzük. Igazoljuk, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak az összege megegyezik a kék háromszögbe írt körök sugarainak az összegével!

A feladat megoldásához két segédtételt használunk fel:

1. segédtétel: A derékszögű háromszögbe írt kör átmérője és oldalai között fennáll a $2r = a + b - c$ összefüggés, ahol c jelöli a derékszögű háromszög átfogóját, a és b pedig a befogóit.

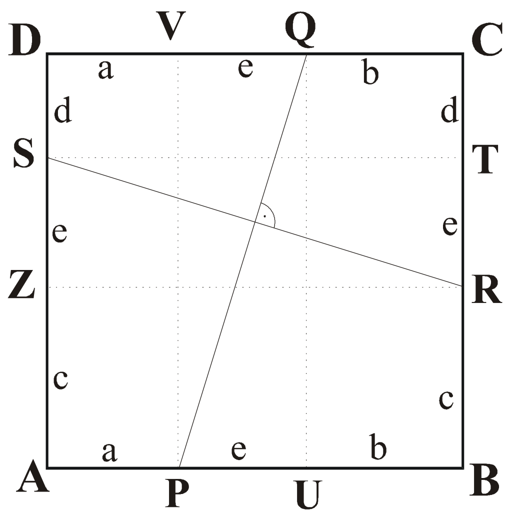


Igazolás:

Az alábbi ábráról ez könnyen leolvasható

2. segédtétel: Egy négyzetbe rajzolt egymásra merőleges szakaszok által a szemközti csúcsoknál keletkező szakaszok összege egyenlő, azaz

DQ + *DS* +*PB* + *BR* = *CQ* + *CR* + *AP* + *AS.*



Igazolás:

Az alábbi ábrát használva:

DQ + *DS* +*PB* + *BR* =*a*+*e*+*d*+*e*+*b*+*c*=

=*b*+*d*+*e*+*a*+*c*+*e*= *CQ* + *CR* + *AP* + *AS*

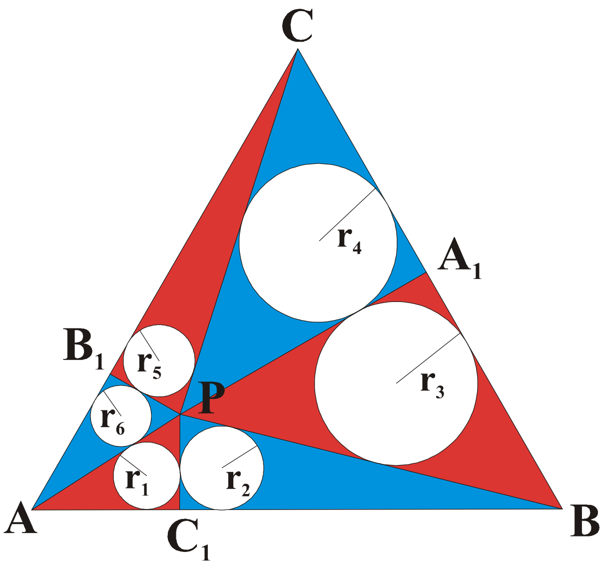
Az ismert, hogy PQ = RS (Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. 34. oldal 475. feladat.)

Az állítás igazolása ezek után a rajzról közvetlenül leolvasható. □

Feladat 32.

*Jelölje **P** egy szabályos háromszög tetszőleges belső pontját. **P**-ből az oldalakra állított merőlegesek talppontjai A_1, B_1 és C_1. A keletkezett hat kis háromszöget kiszínezzük pirossal és kékkel felváltva valamelyik körüljárást követve, majd megrajzoljuk mindegyik kis háromszög beírható körét. Bizonyítsuk be, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak az összege megegyezik a kék háromszögekbe írt körök sugarainak az összegével!*

A megoldás során ismét felhasználjuk a 31.feladat első segédtételét!



Számoljuk ki először a piros háromszögekbe írt körök sugarainak a kétszeresének az összegét:

$$2(r_1+r_3+r_5)=AC_1+PC_1-PA+$$
$$+BA_1+PA_1-PB+CB_1+PB_1-PC$$

Hasonlóan járunk el a kékek összegénél:

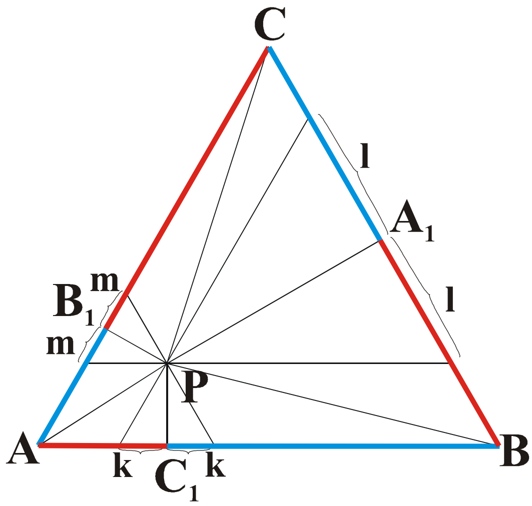
$$2(r_2+r_4+r_6)=BC_1+PC_1-PB+$$
$$+CA_1+PA_1-PC+AB_1+PB_1-PA$$

Az egyenlőség belátásához elegendő belátni, hogy a háromszög oldalain keletkező „piros" és „kék" szakaszok hosszának az összege egyenlő, azaz

$$AC_1+BA_1+CB_1=BC_1+CA_1+AB_1$$

(Egyébként ez egy ismert feladat, az elemi megoldás rámutat a feladat hátterére is.)

Tekintsük a következő ábrát, amely az előzőből úgy állt elő, hogy a ***P*** ponton át párhuzamosokat húztunk a szabályos háromszög oldalaival.



Az egyenlőség trivialitása már leolvasható, hiszen a keletkező szimmetrikus trapézok szárai egyenlők és más-más színűek, ugyanígy a párhuzamosság miatt a ***P*** körül keletkező három kisháromszög is szabályos, és a merőleges felezi a megfelelő oldalt, amelyek szintén különböző színűek. Ezzel az állítást beláttuk. □

Megjegyzés: Máshogy is igazolható ez az állítás, ha felírjuk csak „piros" és csak „kék" szakaszokkal a $PA^2+PB^2+PC^2$ összeget a Pithagorasz-tétel segítségével, és ezeket egyenlővé tesszük, és ha a háromszög oldalát a-val jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$AC_1+BA_1+CB_1=\frac{3a}{2}=BC_1+CA_1+AB_1$$

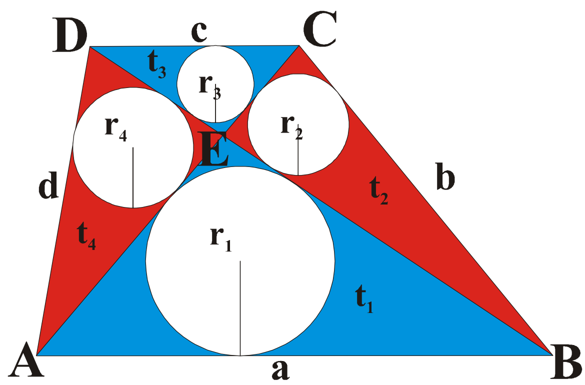
Feladat 33.

*Az **ABCD** érintőtrapézt átlói négy háromszögre bontják. A két-két szemközti háromszöget színezzük pirosra és kékre, majd megrajzoljuk mindegyik kis háromszögbe írható kört. Bizonyítsuk be, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszege megegyezik a kék háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszegével!*

Felhasználjuk a háromszögbe írt kör sugarára az ismert

(1) $$\frac{1}{r}=\frac{s}{t}$$

összefüggést, továbbá az $ABC\Delta \approx CDE\Delta$ hasonlóságából adódó



(2) $$\frac{t_3}{t_1}=\frac{c^2}{a^2}$$

(3) $$\frac{r_1}{r_3}=\frac{c}{a},$$

valamint a

(4) $$\frac{t_2}{t_3}=\frac{BE}{ED}=\frac{a}{c}$$

összefüggéseket. Továbbá felhasználjuk a triviális

(5) $$t_2=t_4$$

egyenlőséget.

Az ábra jelöléseit felhasználva az z állítás: $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

Tekintettel arra, hogy az adott trapéz érintőtrapéz, ezért $a+c=b+d$. Ha ennek az egyenlőségnek mindkét oldalához hozzáadjuk az AE; BE; CE; DE szakaszokat, továbbá a t_i területű kis három-szögek félkerületét s_i -vel jelöljük, ahol i = 1;2;3;4, akkor azt kapjuk, hogy $s_1+s_3=s_2+s_4$

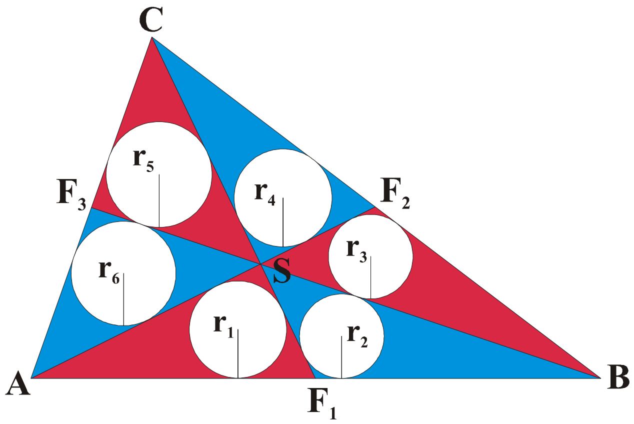
Induljunk ki az állítás jobb oldalából:

$$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{s_2}{t_2}+\frac{s_4}{t_4}=\frac{s_2+s_4}{t_2}=\frac{s_1+s_3}{t_2}=\frac{s_1+s_3}{\frac{a}{c}t_3}=\frac{s_1}{\frac{a}{c}t_3}+\frac{s_3}{\frac{a}{c}t_3}=$$

$$=\frac{s_1}{\frac{a}{c}\cdot\frac{c^2}{a^2}t_1}+\frac{c}{a}\cdot\frac{s_3}{t_3}=\frac{a}{c}\cdot\frac{1}{r_1}+\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{r_3}=\frac{r_1}{r_3}\cdot\frac{1}{r_1}+\frac{r_3}{r_1}\cdot\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\quad\square$$

Feladat 34.

Egy tetszőleges háromszögben megrajzoljuk a súlyvonalakat, majd a keletkezett kis háromszögeket valamelyik körüljárást követve felváltva pirosra és kékre színezzük és megrajzoljuk mindegyik beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy a piros háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszege megegyezik a kék háromszögekbe írt körök sugarainak a reciprokösszegével!



Használjuk fel az előző feladat (33.) összefüggését, továbbá hogy a súlyvonalak által létrejött hat háromszög területe egyenlő.

Használjuk az ábra jelöléseit:

Jelölje továbbá az r_i sugarú beírt körrel rendelkező kis háromszögek félkerületét s_i, kerületét k_i, területét t_i, ahol i = 1;2;3;4;5;6.

Ekkor az igazolandó, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}$ állítás a területekre tett megjegyzés felhasználásával az $s_1+s_3+s_5=s_2+s_4+s_6$ összefüggésbe megy át, ami ekvivalens a $k_1+k_3+k_5=k_2+k_4+k_6$ összefüggéssel. Utóbbit fogjuk belátni.

$$k_1+k_3+k_5=AF_1+\frac{1}{3}CF_1+\frac{2}{3}AF_2+BF_2+\frac{1}{3}AF_2+\frac{2}{3}BF_3+CF_3+\frac{1}{3}BF_3+\frac{2}{3}CF_1=$$

$$=AF_1+BF_2+CF_3+AF_2+BF_3+CF_1=AF_3+BF_1+CF_2+AF_2+BF_3+CF_1=$$

$$=k_2+k_4+k_6$$

Feladat 35.

Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög derékszögű, akkor az oldalegyeneseket érintő körök sugarai közül az egyik egyenlő a másik három érintő kör sugarának összegével!

Használjuk a szokásos jelöléseket.

Tegyük fel, hogy az $r_c=\frac{t}{s-c}$ sugár a legnagyobb.

Ekkor azt kell belátni, hogy

$$\frac{t}{s-c}=\frac{t}{s}+\frac{t}{s-a}+\frac{t}{s-b}$$

azaz

$$\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}=0$$

A bal oldalt rendezve

$$\frac{s-s+c}{s(s-c)}-\frac{s-b+s-a}{(s-b)(s-a)}=\frac{c}{s(s-c)}-\frac{c}{(s-a)(s-b)}$$

Utóbbi akkor és csak akkor nulla, ha

$$s(s-c)-(s-a)(s-b)=0$$

$$s(a+b-c)-ab=0$$

$$(a+b+c)(a+b-c)-2ab=0$$

$$(a+b)^2-c^2-2ab=0$$

$$a^2+b^2-c^2=0$$

Utóbbi egyenlőség a feltétel miatt egy igaz állítás. Ebből kiindulva, visszafelé, ekvivalens átalakításokkal eljuthatunk a bizonyítandó állításhoz, ezért az is igaz.

Felhasznált irodalom

- KÖMAL
- Reimann I.: A geometria és határterületei
- KVANT
- Molnár E.: OKTV feladatok
- Skljarszkij, Csencov, Jaglom: Válogatott feladatok…

Tartalom

Előzetes tudnivalók **1**
Feladatok **2**
Megoldások **7**
Feladat 1. .... *7*
Feladat 2. .... *12*
Feladat 4. .... *14*
Feladat 6. .... *14*
Feladat 7. .... *15*
Feladat 8. .... *15*
Feladat 9. .... *16*
Feladat 10. .... *16*
Feladat 11. .... *16*
Feladat 12. .... *17*
Feladat 13. .... *17*
Feladat 15. .... *18*
Feladat 16. .... *19*
Feladat 17. .... *19*
Feladat 18. .... *20*
Feladat 19. .... *20*
Feladat 20. .... *20*
Feladat 21. .... *21*
Feladat 22. .... *22*
Feladat 23. .... *24*
Feladat 24. .... *24*
Feladat 25. .... *25*
Feladat 26. .... *26*
Feladat 27. .... *27*
Feladat 28. .... *28*
Feladat 29. .... *29*
Feladat 30. .... *29*
Feladat 31. .... *30*
Feladat 32. .... *30*
Feladat 33. .... *32*
Feladat 34. .... *33*
Feladat 35. .... *33*
Felhasznált irodalom **35**