A matematikai gondolkodás leírásának történeti áttekintése

Írta:
Dr. Majoros Mária
Lauder Javne Zsidó Közösségi Iskola

Ez az írás egy készülő könyv első fejezetéből tartalmaz részleteket. A könyv címe A matematikai ismeretek felépülésének pszichológiai sajátosságai. A matematika tanításának módszertanát a matematikai felépítés szempontjából kidolgozottnak tekinthetjük. A matematika tanítása során tapasztalható kudarcok (a diákok többsége nehéznek érzi a tárgyat, sok a bukás) a 80-as évektől kezdve az egész világon arra irányították a figyelmet, hogy a matematika tanítása során nem vesszük figyelembe az emberi gondolkodás általános pszichológiai sajátosságait, valamint a gondolkodásnak az egyes életkori szakaszokra jellemző eltéréseit. Ebben az írásban azoknak a szerzőknek az eredményeit emeltem ki, akik véleményem szerint lényegesen hozzájárultak ahhoz, hogy megértsük az emberi ismeretek - ezen belül a matematika - felépülését. A tanulmány végén röviden értékelem, miért van ma nehéz helyzetben a hazai matematikaoktatás.

Bevezetés

A XX. század végén az iskolai oktatásban fontossá vált, hogy ne csak ismereteket adjunk át, hanem a megfelelő gondolkodásformákat is tanítsuk.

Természetesen a matematika oktatása esetén is a különböző tanítási irányzatok célul tűzik ki a matematikai gondolkodás fejlesztését. Minden matematikatanár tapasztalja, hogy a matematikai erdményesség és a gyerekek általános gondolkodásállapota összefüggésben van. Ha sikerül elérnünk, hogy tanítványaink a matematikában eredményesek legyenek, akkor ez általában kihat a racionális gondolkodásukra, sokkal jobban meglátják az összefüggéseket bármi másban is. Ezért szinte közhelynek számít, hogy a matematika tanítása során a gondolkodást fejlesztjük.

Ugyanakkor a matematika tanulásában és tanításában megfigyelhető kudarcok - a tanuláshoz jóindulatúan hozzáálló gyerekek is igen gyakran sikertelenné válnak egy bizonyos idő után - felvetik a kérdést, tudunk-e eleget az emberi gondolkodásról és az ismeretszerzés törvényszerűségeiről.

Úgy gondolom, érdemes röviden áttekinteni az emberi gondolkodás leírásának történetét, mert azt a tapasztalatot nyújtja számunkra, hogy e tudományág nehezen alkotta meg a fogalmait, és hosszú ideig tartott, amíg a kezdeti primitív elképzelésektől előre tudott lépni.

A lelki élet felfogásáról vallott XVIII. századi elképzelésekre jelentős hatást gyakoroltak a kortárs természettudományos eredmények. David Hume-tól származik az az elképzelés, hogy az emberi tudattartalmakat elemi összetevőkre lehet felbontani. Hume elképzelése szerint a lelki élet mozaikszerűen épül fel az érzetekre visszavezethető lelki atomokból. Úgy képzelte, hogy ezeknek a lelki atomoknak a kapcsolódása kisszámú kapcsolódási elv alapján teljesen mechanikusan megy végbe. Tulajdonképpen ezek a kapcsolódási elvek az asszociációk.

Ezt az elképzelést David Hartley (1705-1757) fejlesztette tovább. Szerinte az ingerek az agyban vibrációkat keltenek,amelyek ismétlődés esetén tartósan fennmaradnak, de kisebb intenzitással. Gondoljunk arra, hogy például egy tüzes vas megérintése mennyivel erősebb inger, mint a róla alkotott emlékkép. Az összekapcsolódás természetére vonatkozóan is megpróbált valamilyen elképzelést kialakítani: szerinte az egyidejűleg vagy közvetlenül egymás után előálló vibrációk összekapcsolódnak egymással, és ezért tudják egymást előhívni.

Tulajdonképpen a XIX. század közepéig ugyanezt a gondolatot járják körül a pszichológiával foglalkozó filozófusok. Nem tekinthetjük előrelépésnek azt sem, ami a század második felében történt. John Stuart Mill (1806-1873) egy maga által "mentális kémiának" nevezett elméletet alkotott meg. Ennek lényege, hogy az emberi elme az anyagi világ kémiai törvényeihez hasonló módon működik. Ahogyan az atomok molekulává történő összekapcsolódása folytán új anyagi minőségek jönnek létre, úgy az emberi érzetek is képesek új minőségeket létrehozni: a narancs például három, tőle független minőségnek az összekapcsolódása, nevezetesen a kerekségé, a sárgaságé és egy sajátos ízé. Mill másik jelentős elképzelése a logikára vonatkozott. Az induktív logika elsődlegességét hirdette a deduktív logikával szemben. Azt mondta, olyan logikai rendszert kell létrehozni, amely a természettudományok módszerét követi, és az egyedi tényekből kiindulva halad az általános felé.

Miközben minderről beszélünk, érdemes párhuzamot vonni, és végiggondolni, hol tartott ugyanekkor (XIX. század) a matematika. Nézzünk néhány ismertebb nevet például az analízis területéről: Fourier, Dirichlet, Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Lagrange stb. voltak a fenti pszichológiai elméleteket megalkotó tudósok kortársai. Vehetjük a matematika egy másik területét is, a logikát. George Boole, de Morgan, Hamilton, de tulajdonképpen a fiatal Frege is kortársnak tekinthető.

Láthatjuk, hogy áthidalhatatlannak tűnik a szakadék a szaktudomány eredményei, és ezeket az eredményeket létrehozó gondolkodás leírása között.

Az emberi gondolkodás egy közvetlenül nem megfigyelhető jelenség. Nyilvánvalóan ez a racionális oka annak, hogy ennyire lassan tudta a gondolkodás leírása a tudomány által megalkotott eredmények létrejöttét követni.

A XX. században a pszichológiában robbanásszerű fejlődés történt. Új modellek jelentek meg, amelyek segítségével sokkal árnyaltabban lehetett leírni és értelmezni az emberi pszichikum és ezen belül a racionális gondolkodás jelenségeit. Különböző pszichológiai iskolák jönnek létre: a behaviorista, az alaklélektani, a pszichoanalitikus, W. Stern megalkotja a testi és pszichológiai típusok elméletét. Központi kérdéssé válik az ember tanulása és érzelmi élete. A biológia fejlődéséből adódóan az érzékelés leírása egyre tökéletesebbé válik.

Módszertanilag is óriási fejlődés figyelhető meg. A kísérleti pszichológia fejlődésének következtében egyre jobban lehetett támaszkodni a kisérleti eredményekre. Létrejön a klinikai módszer. Ezt a módszer a francia klinikai hagyományokra vezethető vissza (Binet laboratóriumában alkalmazták először tervszerűen). A század S. Freud mellett legkiválóbb elméletalkotó pszichológusa J.Piaget alakította ki végleges formáját. Piaget gyermeklélektannal foglalkozott: a gyerekek értelmi fejlődésének törvényeit vizsgálta, és írta le, valamint a gyermeki világkép alakulására vonatkozóan tett döntően új megfigyeléseket. A klinikai módszer lényege, hogy amikor a gyerekeket különböző feladatok elé vagy teljesítményhelyzetbe állította, nem csak a megoldás érdekelte, hanem az ahhoz vezető út is. Ezért sugallás nélkül, elfogadó, érdeklődő attitűddel beszélgetett a gyerekekkel, és ennek segítségével próbálta feltárni, milyen rejtett elgondolások állnak az esetleges viselkedés és teljesítmény mögött.

Azért időztünk el ilyen hosszan a klinikai módszer mellett, mert a tanári munkában igen sokszor lenne szükség arra, hogy hasonló szellemben folytassunk beszélgetéseket a tanítványainkkal. Ezek segítségével megérthetjük, hogy milyen téves fogalmak és elképzelések húzódnak meg tanítványaink rossz teljesítménye mögött, tehát javítani tudjuk a gondolkodásukat, és helyes megértéshez segíthetjük őket. Az ilyen beszélgetéseknek van egy másik, a matematika tanulása szempontjából csak közvetett, de nélkülözhetetlen hatása. A gyerekek ezeket a beszélgetéseket úgy élik meg, hogy a tanár elfogadó és nem elutasító, ezért nyitottak maradnak, és hosszú időn keresztül meg tudjuk őrizni az érdeklődésüket és az együttműködésüket. A jelenlegi oktatás erősen teljesítményelvű, a legtöbb iskolában kizárólag írásbeli számonkérés van, mondván, hogy az tükrözi az igazi tudást és teljesítményt. Ez azonban általában nem igaz. Egy-egy szóbeli beszélgetés során kiderülhet, hogy hibátlan írásbeli matematikai teljesítmény mögött zavaros gondolatok húzódnak meg, és nagyon gyenge munka is származhat jól gondolkodó gyerektől.

A pszichológiai elmélet fejlődését jelentősen elősegítették a XX. századi modern nyelvelméletek is. F. Saussure, L. Bloofield és N. Chomsky forradalmian megújították a nyelvi leírás elméletét, ezáltal a nyelvről való elképzelés is jelentősen megváltozott. Az új elméletek hozzájárultak ahhoz, hogy a gondolkodási folyamatokról való elképzeléseket is módosítsák a pszichológusok.

Ennek következtében természetesen a matematikai gondolkodás leírása is óriási fejlődésen ment keresztül a XX. század folyamán.

A matematikai gondolkodás leírásának két szempontja

A matematika tanulásáról és a gondolkodás leírásáról szóló szakirodalom jobb áttekintése és megértése szükségszerűvé teszi két-két új fogalom bevezetését:

A matematikai gondolkodás leírása történhet direkt illetve indirekt megközelítés alapján.

Direkt leírásnak azt fogjuk tekinteni, amikor a gondolkodási mechanizmusok leírásának alapjául helyes feladatmegoldások és helyes fogalomalkotások szolgálnak.
Indirekt gondolkodásleírásról akkor fogunk beszélni, amikor a gondolkodási mechanizmusokat hibás feladatmegoldás, illetve téves fogalomalkotás esetén vizsgáljuk.

Meg fogjuk különböztetni a matematika szempontú és a gondolkodás-szempontú leírásokat.

Matematika szempontúnak fogunk tekinteni egy elemzést akkor, ha a feladatmegoldások vagy a fogalomalkotások során megfigyelt lépéseket azonosítjuk azokkal a matematikai tételekkel, amelyeket felhasználunk. A feladatmegoldások során előfordulhat, hogy nem tudunk ilyen tételre hivatkozni, akkor a matematika-szempontúság azt jelenti, hogy az egyes lépéseket a matematikai tartalomban bekövetkezett változással azonosítjuk.

Gondolkodás szempontúnak fogunk tekinteni egy elemzést akkor, ha megpróbál válaszolni a következő két kérdésre: ***hogyan lehet eljutni a megoldás felismeréséhez***, illetve ***milyen gondolkodási műveleteket alkalmazunk*** a feladat megoldása során.

A következőkben a matematikai gondolkodás leírásának néhány általam fontosnak tartott eredményét fogom ismertetni a fenti szempontok szerint is értékelve azokat.

Pólya György eredményei

A matematika szempontú leírásokat tekinthetjük matematikadidaktikai elemzéseknek. A matematikadidaktikának a pszichológiai gondolkodás-vizsgálatoktól és leírásoktól való megkülönböztetése azért indokolt, mert a matematikadidaktikán belül tetszőleges matematikai probléma megoldását és az ehhez szükséges fogalmak és ismeretek felépülését kísérő eljárások leírásánál kizárólag matematikai eszközökre támaszkodunk. Tehát a matematikadidaktikai elemzések a fenti felosztást alapul véve matematika szempontú elemzések. A feladatmegoldás alternatív lehetőségeit a matematikadidaktika leírja, de nem tudja megválaszolni azt a nagyon fontos kérdést, hogy a különböző megoldások miért tűnnek eltérő nehézségűnek a különböző feladatmegoldók számára.

A matematikai gondolkodási műveletek első rendszerezett leírása Pólya György nevéhez fűződik. Az ő érdeme, hogy a nagy matematikatörténeti felfedezések létrejöttének tanulmányozása, saját és mások problémamegoldási folyamatainak elemzése alapján megalkotta a matematikai gondolkodási műveletek rendszerét.

A matematikai problémák megoldása során szerinte a következő gondolkodási eljárásokat alkalmazzuk:

- analógia keresése

- általánosítás
- specializálás
- feladatok variálása
- analízis-szintézis
- heurisztikus okoskodás
- indukció
- ellenőrzés
- definícióra történő visszavezetés
- bizonyítás
- rokon feladat keresése (analógia, általánosítás és specializálás alkalmazása)
- ekvivalens megoldások keresése
- szimbolikus gondolkodás
- redukció ad abszurdum
- indirekt bizonyítás
- sejtés megfogalmazása
- fordított irányú munka
- kombinatorikus gondolkodásmód

Pólya György eredménye, hogy feltárta a problémamegoldás fázisait:

1. a feladat megértése
2. tervkészítés
3. tervünk végrehajtása
4. a megoldás vizsgálata

Munkássága új fejezetet nyitott a matematika tanításában.

Pólya nagyon pontosan megfogalmazza annak **mikéntjét**, hogyan tud a tanár a diáknak segíteni. "Képzeljük magunkat a diák helyébe, éljük bele magunkat a gondolkodásmódjába, próbáljuk megérteni, mi megy végbe a diák fejében, és mindig igyekezzünk olyan kérdést feltenni, olyan lépést javasolni, amely a *diáknak magának is eszébe juthatott volna.*"

Hogyan tudja a tanár elérni, hogy ezt a gondolkodásmódot kialakítsa magában? "...mindig saját tapasztalataira kell gondolnia, vissza kell emlékeznie arra, milyen nehézségei és eredményei voltak a feladatok megoldásában."

Gondoljuk végig, mi szükséges ahhoz, hogy ezek a tanácsok tényleg működőképesek legyenek:

- A tanárnak meg kell őríznie magában a képzelőerőt, milyen a gyerekek gondolkodása, és gondolkodásállapota. Ez két különböző dolog: hiszen a gyereknek van egy sajátos gondolkodásmódja, ugyanakkor gondolkodásállapot alatt az ismeretek és tapasztalatok adott szintjét értem.
- Ki kell alakulnia benne annak a képességnek, hogy a saját gondolatait visszavetítve a múltba emlékezzen, hogyan néz ki mindez egy gyerek szemszögéből.
- A felnőtt és a gyerek gondolatvilágának összehasonlítása alapján meg kell találni a kommunikációs lehetőségek alapjait.

Ha ezt a teljesítményt tényleg el lehetne várni minden tanártól, akkor az iskolában a matematikaórákon csak boldog és elégedett gyerekek és tanárok lennének.

Néhány nem a matematikából vett példán szeretném megmutatni, hogy ez a teljesítmény nem várható el egy átlagos tanítási szituációban.

- Gondoljunk arra, hogy a századelőn úgy képzelték az emberek, hogy a gyerekek csak a méreteikben különböznek a felnőttektől. Ma sem ritka, hogy egy kisgyereket hazugsággal vádolnak, amikor az álmairól vagy a mesékről úgy beszél, mintha azok az események vele történtek volna meg. Pedig a gyerek világában ez természetes, mert a valóság és képzelet nem válik még élesen külön a gondolkodásukban.
- Jean Piaget, akiről később majd részletesen beszélünk megfigyeléseket végzett többek között az okság fogalmának kialakulására vonatkozóan. Miután a felnőtt gondolkodás erősen racionális, ezért ezen a fogalmon nagyon jól lehet szemléltetni, milyen hosszú utat jár be egy gyerek a gondolkodás fejlődése során, mire a felnőtt állapotot eléri. Az okság fogalmának kialakulásában három nagyobb szakasz figyelhető meg:
    1. Ez a szakasz hat éves korig tart. Ebben az életkorban sorrendben a következő oksági fogalmak figyelhetők meg:
       - *Motivációs* okság: A dolgok okai az isten és az ember.
       - *Finalizmus*: A dolgok és jelenségek okai azok a célok, amelyeket el akarunk érni általuk. Például a vonat azért megy, hogy megérkezzünk egy másik városba.
       - *Participációs* okság: Ilyenkor egy dolog azért lehet oka egy másik dolognak, mert részlegesen hasonlítanak egxmásra.
       - *Mágikus* okság: A dolgok és események okai az emberi kívánságok. Érdemes megjegyezni, hogy a mesékben a tündérek szoktak ilyen tulajdonsággal földi halandókat rövid időre felruházni.
       - *Morális* okság: A dolgok azért történnek adott módon, mert erkölcsileg úgy helyes. Például a csónak azért nem süllyed el, mert a benne ülők nem halhatnak meg.
    2. A második nagy szakasz hattól tíz éves korig tart. Ekkor már kevésbé változatosak az oksági magyarázatok.
       - *Artificiális* okságról akkor beszélünk, amikor a dolgok emberi alkotásra vezethetők vissza, mint okra.
       - Az *animista* okság azt jelenti, hogy a megfigyelhető dolgok és jelenségek mögött egy belső motor van, amely külső utasításokat hajt végre.
       - A *dinamikus* okság szakaszában a gyerekek a dolgokat és jelenségeket egy belső erőre vezetik vissza.
    3. A harmadik szakasz tizenkét éves korig tart. Ekkor már sokkal több természettudományos magyarázat van:
       - A dolgok oka lehet a *körülvevő közeg reakciója*: a szél azért fúj, mert a fák lombjai mozognak.
       - *Mechanikus* okságról beszélünk akkor, ha a dolgokat és jelenségeket mechanikus okokra vezetik vissza a gyerekek. Például a bicikli mozgásának az az oka, hogy a pedálok mozognak.
       - *Keletkezéslánc*ról beszélünk, ha több dolog kapcsolódik össze. Ilyenkor például a Napot azzal magyarázzák, hogy a füstből felhő lett, és a felhő sűrűsödött össze Nappá.
       - *Atomisztikus* okságról akkor beszélünk, amikor a kis dolgok egyesülése hozza létre a nagy dolgokat. Tehát egy nagy kavics úgy jön létre, hogy sok kis kavics egyesül.

Ha mindezeken a fogalmakon végigment egy gyerek, akkor jelenik meg a racionális oksági kapcsolat.

Számos példát lehetne még hozni, de azt hiszem, az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy a gondolkodás fejlesztése és felfedezése nem oldható meg a tanítási szituációkban, és nem a tanár egyéni intuíciójának kérdése. Az értelmi fejlődés szakaszainak és jellegzetességeinek a megismerése meg kell, hogy előzze a tanítást. Természetesen nem oldható meg az értelmi fejlődés törvényszerűségeinek a matematikára történő alkalmazása sem egyénileg a tanár által. Tehát az eredményes tanításhoz szükség van a matematika tanulásának egy gondolkodás-szempontú elemzésére is.

Pólya eredménye, hogy összegyűjtötte azokat a típus-kérdéseket és típus-útmutatásokat, amelyeket a matematika tanítása során a legjobban fel lehet használni. Megfogalmazta azt is, hogy ezek valószínűleg egybeesnek azokkal a típus-gondolatsorokkal, amelyeket a megoldások során alkalmazunk.

Nagyon jól látta azt is, hogy a matematikai ismeretek halott tudást jelentenek a megfelelő gondolkodási módszerek nélkül: "...a diák végül is megtanulja, hogyan kell helyesen alkalmazni ezeket a kérdéseket és útmutatásokat, és ezzel valami olyasmit sajátít el, ami sokkal fontosabb bármilyen matematikai részletkérdés ismereténél."

Arra azonban, hogyan is történik a tanulás, nem tudott igazán használható tanácsot adni "A feladatmegoldás éppen olyan gyakorlati készség, mint mondjuk az úszás. Gyakorlati készségeket utánzással és gyakorlással sajátíthatunk el."

Pólya után tehát nyitott kérdésnek tekinthetjük a következőket:

- Az általa ismertetett gondolkodási műveletek hogyan alakulnak ki.
- Van-e a sorrendnek szerepe, tehát van-e olyan művelet, amelyik a másik kialakulását szükségszerűen megelőzi?
- Az általa megjelölt gondolkodási műveletek általában az emberi gondolkodásra is jellemzők, vagy csak a matematikához kötődnek?

Pólya György életrajza és matematikai munkásságának tárgyalása a skóciai St.Andrews Egyetem MacTutor Matematika-történeti Archívumában:

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Polya.html

Peter Taylor írása Pólya Györgyről az Ausztrál Matematikai Társaság honlapján:

http://www.amt.canberra.edu.au/polya.html

Jean Piaget munkássága

"A gyermekit a mi századunk fedezte fel.
A gyermek mint a nevelés tárgya, mint a mindenkori felnőtt előképe évszázadok, talán évezredek óta foglalkozatatta a gondolkodókat. De a *gyermekit* mint a világ megélésének viszonylag sablonmentes módját a mi korunk kezdte ismerni és becsülni.

A modern művészet, a mélylélektani vizsgálódás, a pedagógiai megújulás vágya együttesen hozták létre a gyermeki élményvilág módszeres feldolgozásának az igényét, s ezzel a *gyermeklélektant* mint ennek az igénynek megfelelő és ma már jól körülhatárolt ismeretanyagot.

Ennek az új ismeretágnak egyik első rendszeralkotója Jean Piaget.

Vizsgálódásai mindenekelőtt a gyermeki gondolkodást tárják fel azzal a (ma már közhelynek látszó, de a húszas években, Piaget fellépésekor eredeti és nehezen elfogadott) feltevéssel, hogy a gyermek gondolkodása, ítéletalkotása minőségileg más, mint a felnőtté, nemcsak ismeretanyagban kevesebb, nemcsak hiányosabb, hanem *más* - más a menete, más a szerkezete, másféle érvényességi igényt képvisel. Ezt a jelenségkört, ennek a minőségrendnek a fejlődését követte nyomon Piaget."

Ezekkel a mondatokkal kezdi Mérei Ferenc Jean Piaget-ről szóló tanulmányát, amely a Freud fényében és árnyékában című tanulmánykötetben jelent meg.

Mielőtt röviden megismerkednénk ennek a zseniális tudósnak a gyermek értelmi fejlődésére vonatkozó elméletével, érdemes röviden beszélni az életútjáról, hogy lássuk, milyen fantasztikus emberrel állunk szemben.

Jean Piaget a múlt század végén született Svájcban. Egészen kicsi korától vonzotta a természettudomány. Már kisiskolás korában foglalkozatta a madárvilág tanulmányozása, a fosszilis leletek később a kagylók és tengeri csigák vizsgálata. Első cikke tízéves korában jelent meg egy természettudományi folyóiratban egy albínó verébfajtáról. Tizenegyéves korában megkérte a neuchateli Természettudományi Múzeum igazgatóját, hogy engedélyezze számára a madártani és fosszilis gyűjtemények tanulmányozását. A múzeum igazgatója örömmel fogadta a gyerek kérését, és négy éven át dolgoztak együtt. A múzeumigazgató halála után az ekkor 15 éves Piaget megírja addigi tapasztalatait. Több cikke jelent meg. A cikkek alapján a genfi Természettudományi Múzeum igazgatója (aki nem tudja, hogy egy gyerekről van szó) az állattani gyűjteménybe muzeológusnak hívja a szerzőt. Doktori értekezését is biológiából írta, majd Bergson hatására pszichológiával kezdett foglalkozni. Párizsban a híres Binet-laboratóriumban sajátítja el a klinikai pszichológiai munka alapjait. Nagy hatással van rá S. Freud is. Kiképző pszichoanalízisben is részt vett.

Már korábban említettük, hogy a beteg emberek esetében alkalmazott klinikai kikérdezési módszert továbbfejlesztette, és ennek segítségével próbálta meg feltárni az általa megfigyelt gyerekek válaszai mögött rejlő gondolkodási mechanizmusokat.

25 éves, amikor meghívják Genfbe Rousseau Intézetbe, amelynek később a vezetője lesz. Pályája töretlenül ívelt felfelé.

Később két fejezetben részletesen kitérünk a matematikai ismeretszerzés és fogalomalkotás szempontjából fontos megfigyeléseire. Most röviden ismertetjük azokat a fontosabb eredményeket, amelyek Piaget nevéhez fűződnek.

Még egyszer foglaljuk össze röviden a ***klinikai módszer*** lényegét: a klinikai kikérdezés egy olyan rugalmasan vezetett beszélgetés, amelynek az a feladata, hogy felkeltse a gyerek magyarázókedvét, és ilyen módon láthatóvá váljanak azok a magyarázóelvek, amelyek segítségével a gyerek tájékozódni kíván a világban.

Piaget megalkotta a ***genetikus ismeretelméletet:*** nagyon kevés vele született tapasztalási módból indul ki egy gyerek a születésekor. Ezek alapján a világot először az érzékelésen és a cselekvésen keresztül tapogatja le, majd képzetszinten ismeri meg, és ezt követi a fogalmi és műveleti megismerés. (Csak zárójelben jegyzem meg, hogy a felfedeztető matematikaoktatás pontosan erre épül. Ugyancsak fontos, hogy itt utaljunk rá, amit később elemezni fogunk, a gyerekek a matematika tanulása során egy-egy matematikai fogalom tartalmát azokra a tapasztalatokra vezetik vissza, amelyeket a fogalommal kapcsolatban megszereztek. Minden más üres verbális tartalom.)

Piaget fedezte fel, hogy a gyermeki beszédnek és gondolkodásnak van egy minőségileg eltérő szakasza, amely az autizmussal mutat rokon vonásokat. Ezt a szakaszt *egocentrikus* szakasznak nevezte el. Az egocentrikus beszéd jellemzője, hogy nem szocializált kifejezéseket tartalmaz, és nem kommunikatív. A logika ebben a szakaszban szemléletes, szubjektív analógiákat tartalmaz, gyakran értékítéletek által vezérelt. Ennek a szakasznak a fő jellemzője, hogy a gyerek csak a saját nézőpontjából látja a világot.

A *decentráció* azt jelenti, hogy a gyerek fokozatosan leküzdi ezt az énközpontú szemléletet, más nézőponttal is tud azonosulni. Ezáltal fokozatosan kialakul a körülvevő világról való tudata, ezáltal az éntudata. Ezekről a lelki folyamatokról „A valóság felépítése” és „Az intelligencia születése” című műveiben olvashatunk. Magántanári tevékenységem során gyakran figyeltem meg, hogy a matematika tanulásában is megfigyelhető hasonló jelenség. Ha a gyerekeknek kellő tapasztalat hiányában kell a matematikai fogalmaikat kialakítani, akkor a meglévő ismereteikben keresnek analógiákat. Egy összefüggéstelennek tűnő matematikatudás mögött gyakran a gondolkodás teljes – ugyanakkor a matematika szempontjából elfogadhatatlan, szubjektív törvényeket tartalmazó – rendszere figyelhető meg. Ezekben a „szubjektív matematikai világokban” felfedezhető igen nagy hasonlóság arra engedett következtetni, hogy a gondolkodás és a matematikai ismeretek fejlődésében való megtorpanás annak a következménye, hogy a matematikai ismeretek tanítása olyan általános, az ismeretek felépülésére vonatkozó törvényszerűséget nem vesz figyelembe, amely az emberek egy jelentős részének gondolkodására jellemző. Erről a jelenségről szól az „Oktassunk vagy buktassunk?” című könyv.

Piaget kidolgozta a *megismerés és intelligencia születésének szintjeit:*

1. Az érzékszervi-mozgásos szint. Ez a szakasz másfél-két éves korig tart. A gyerekek a cselekvéshez kötött tapasztalatok útján felfedezik azokat a lényeges invariáns tulajdonságokat, amelyek lehetővé teszik a tárgyak megnevezését és a beszéd kialakulását. Gondoljunk arra, hogy a gyerekek hosszú ideig a tárgyak tulajdonságának tartják például a tárgy helyét.
2. A művelet előtti gondolkodás első szintje. Ez a szakasz 5-6 éves korig tart. Ekkor történik meg a cselekvések összerendeződése.
3. A művelet előtti gondolkodás második szintje. A cselekvések összerendeződése képzetszinten is megtörténik. Erre vonatkozóan igen sok tapasztalatot szerezhetünk, ha kisiskolás gyerekek matematikai feladatmegoldását figyeljük meg. Hatéves kislánnyal matematikai játékot játszottam. Úgy kellett rendeznie a logikai készlet elemeit, hogy bármely rákövetkező pontosan két tulajdonságban egyezzen meg a megelőzővel. A gyerek először úgy oldotta meg a feladatot, hogy találomra felvett egy elemet, összehasonlította a sorban utolsóval, majd eldöntötte, hogy jó-e. Az eljárást addig folytatta, amíg talált megfelelőt. Egy idő után már nem fogta meg fizikailag a kiválasztott elemet, hanem képzeletben hajtotta végre ezt a műveletet, és csak a jónak ítélt elemet helyezte át.
4. A konkrét műveletek első szintje. Ekkorra kialakul a gyerekek sorbarendező képessége, és egyszerű osztályozásokat is végre tudnak hajtani. Ezzel lehetővé válik a cselevések megfordíthatósága, így az első gondolati megfordítás, a visszafele következtetés kialakul. Ez a szint 6-9 éves korig tart.
5. A konkrét műveletek második szintje. A sorbarendezés és a megfordítás kialakulása az oksági összefüggés jelentős fejlődéséhez vezet. 12 éves korban zárul ez a szakasz.
6. A formális műveletek szintje. A gondolkodásban megjelenik az a képesség, hogy a tárgyakat helyettesítő fogalmakat és szimbólumokat ugyanolyan jól tudják a gyerekek

kezelni. Nem véletlen, hogy például egyenleteket 12 éves korban kezdhetünk el tanítani.

Végül feltétlenül szót kell ejtenünk az *asszimiláció-akkomodáció* törvényéről, mint a pszichikus fejlődésben megfigyelhető alapvető alkalmazkodási törvényről. Minden újat a meglévő ismereteinkhez és tapasztalatainkhoz hasonítunk, tehát a rokon vonásokat keressük benne. Ez az asszimiláció. Miközben a meglévő tapasztalataink szerint működtetjük a dolgokat, felfedezzük eltérő voltukat, és ezáltal kialakul az új tárgyról való reális képzetünk. Ez az akkomodáció. Erre igazán nagyon sok példát lehet mondani: gondoljunk arra, hogy a kisgyerekek például mindent a szájukba vesznek, és ezáltal jönnek rá, hogy a dolgok egy része a látszat ellenére sem ehető. A matematika tanulásának bármely fázisában megfigyelhető, hogy bármely újban a gyerekek először a meglévő tapasztalatokkal rokon vonásokat keresik meg. A matematikusok ennek a jelenségnek a hamis analógia nevet adják. A matematikai tartalom megítélése szempontjából jogos ez az elnevezés. Az emberi ismeretszerzés törvényszerűsége alapján szerencsétlen, mert ha sikerült megértenünk az elmondottakat, akkor a hamis analógia a matematika tanulásának és általában minden tanulásnak szükségszerű első lépése, tehát nem hiba. Hibává akkor válik, ha a tanulás megreked ebben a fázisban.

Nagyon fontos még annak a megértése, hogy Piaget megfigyelése szerint **a gyermek értelmi fejlődésének minden szintje egy önmagában érvényes struktúrának** felel meg. A fejlődés minden szakaszában tehát egy sajátos rendszerrel állunk szemben, és ha eredményesen akarunk tanítani, akkor ennek a rendszernek a belső törvényeihez alkalmazkodnunk kell. Csak onnan indulhatunk, ahol a gyerek van, ha el akarjuk vinni oda, ahol lennie kellene.

Nagyon fontos törvény az *izomorfia törvénye.* Ennek lényege, hogy például az érzékszervi-mozgásos sémákban megfigyelhetjük a későbbi logikai szerkezeteket. Tehát a különböző szinteken megfigyelhető struktúrák az izomorfia viszonyában vannak egymással.

Erre a jelenségre egy kicsit meghökkentő példát fogok hozni. A tanítványaimnak azt szoktam mondani, hogy a matematikai gondolkodás és Salvador Dali művészete mély rokonságot mutat. Nézzünk néhány példát!

Vegyük azt a geometria feladatot, amikor egy kocka minden csúcsánál kivágunk egy kis kockát, és az a kérdés, hogy mennyivel változik a felszín. Megoldhatjuk a feladatot számolással is. Ugyanakkor, ha úgy képzeljük el a kockát, mint egy rugalmas anyagból készült tárgyat, akkor azonnal érzékeljük, hogy a sarkok „kifordíthatók”, tehát a felszín nem változik. Szinte kivétel nélkül ugyanerről a kapcsolatról szólnak a tületátdarabolási feladatok. Ugyanezt a sémát figyelhetjük meg Dali úgynevezett „kettős képein”. Két ilyen képet említeném meg: „Rabszolgapiac Voltaire eltűnő mellszobrával” és a „Hallucinogén torreádor”.

Ezek a képek az interneten is elérhetők a
http://www.dali-gallery.com/html/dali1024.php

galériában: az egyik a
http://dali.karelia.ru/html/galleries/painting14.htm

oldalon alulról a negyedik kép (Invisible Bust of Voltaire, 1941) a másik a
http://dali.karelia.ru/html/galleries/painting23.htm

oldalon alulról a második (Hallucinogenic Toreador, 1968-70)

Az első képen az asztalon egy mellszobor áll, amely Voltaire-t ábrázolja. A kép hátterében romos boltív nyílik, amely alatt emberek forgataga látható. Ebben a nézetben Voltaire mellszobra egyszerűen eltűnik, és átváltozik két XVII. századi ruhát viselő spanyol hölggyé.

A „Hallucinogén torreádor” esetében az egyik nézőpontból perspektivikusan elhelyezkedő Venus-szobrokat látunk. Egy másik nézőpontból ezek a szobrok háttérré válnak, és teljesen eltűnnek, ekkor jelenik meg a torreádor képe.

Piaget művei az egész világon nagy hatással voltak a gyermeklélektan, az ismeretelmélet és a pedagógia fejlődésére. Magyarországon is sok követője volt. Művei kötelező olvasmányok voltak a tanárjelöltek számára.

1950-ben azonban megindult egy olyan neveléspolitikai irányzat, amely célul tűzte ki Piaget bírálatát, és a magyar pedagógiai és pszichológiai kultúrából történő száműzését. Az új pedagógia ugyanis sokkal nagyobb szerepet kívánt tulajdonítani a gyermek fejlődésében az iskolának, így a gyermek értelmi fejlődésének Piaget által megfigyelt és leírt szakaszai ellentmondtak az iskola mindenhatóságába vetett elképzeléseknek, amely azt hirdette, hogy a fejlődés jó iskolai körülmények között felgyorsítható. A támadás másik célpontja a spontán magyarázóelveket érintette.

A 60-as években ugyan változott Piaget megítélése, aki 1963-ban újra ellátogatott Magyarországra, de a pedagógiai kultúránkban máig nem foglalta el azt a helyet, amely megilletné. Ez súlyos veszteség a tanárok számára, akik a gyermeki megismerés és gondolkodás világában tehetnének varázslatos utazásokat Piaget műveinek olvasása közben, még súlyosabb veszteség a gyerekek számára, akik a meg nem értettség miatt, amit naponta kénytelenek elviselni, esetleg egy életre bezárulnak az iskolai oktatás számára.

Jean Piaget rövid életrajza és publikációs listája az interneten:
http://www.piaget.org/biography/biog.html

Linkgyűjtemény a Piaget Társaság honlapján:
http://www.piaget.org/links.html

H. Aebli erdményei

H. Aebli Piaget közvetlen munkatársa volt. Ő már közvetlenül a matematikára alkalmazta a genetikus ismeretelméletet.

A matematikai gondolkodás és ismeretek felépülése szempontjából jelentős eredményei röviden a következők voltak:

A matematikai jelentés fogalma

Aebli definiálta a *matematikai jelentés fogalmát*. Az ő meghatározása szerint a matematikai jelentés nem más mint levezetés, tehát azon elemi lépések összessége, amelyek a matematikai tartalomhoz elvezetnek. Ez az értelmezés egybeesik azzal a megfigyeléssel, hogy a gyerekek számára tetszőleges matematikai objektum tartalma nem más, mint a fogalommal kapcsolatos tapasztalataik összessége.

Pólya is beszél erről, a jelenséget úgy hívja, hogy a "*definicióhoz való visszatérés*". Az általa felhozott példában a paraboláról van szó. Ha azt a feladatot kell megoldanunk, hogy szerkesszük meg egy adott egyenes és egy adott direktrixű és fókuszú parabola metszéspontját, akkor a definicióra való visszatérés segítségével úgy fogalmazhatjuk át a feladatot, hogy szerkesszünk egy adott egyenesen olyan pontot, amely F-től és d-től egyenlő távolságra van, ha a szokásos betűzést alkalmazzuk.

A matematikai jelentés magában foglalja a Pólya szerinti definicióra való visszetérést, de annál többet is. Nézzünk erre egy példát.

**Szerkesztendő háromszög, ha adott egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala.*

Tekintsük a háromszög súlyvonalának definicióját: A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög súlyvonalának nevezzük. A definícióra történő visszatérés nem segíti a feladat megoldását. Ahhoz, hogy lényegesen előrejussunk, arra van szükség, hogy a súlyvonallal kapcsolatos azon tapasztalatunkat mozgósítsuk, amit már egy tétel foglal össze: a súlyvonalak egy pontban metszik egymást, és ez a pont a súlyvonalnak az oldalhoz közelebbi harmadolópontja.

A matematikai jelentés tehát sokkal többet tartalmaz, és ezt kell mozgósítanunk matematikai problémák megoldása során. Visszatérve a kiinduláshoz érezhető, hogy a "definícióra történő visszatérés" egy matematika-szempontú leírás magyarázóelve lehet, a jelentés pedig az általános gondolkodás-szempontú megközelítés, így sokkal általánosabb.

Még egy példán szeretném illusztrálni a jelentés fogalmát. Ezúttal egy algebrai kifejezésen mutatom meg, miről is van pontosan szó. Tanári gyakorlatunkban mindnyájan találkozunk azzal a jelenséggel, hogy a gyerekek igen nehéznek találják a függvények értelmezési tartományának meghatározását. Vegyük a következő képlettel megadott függvényt:

Ha megfigyeljük a gyerekek viselkedését egy ilyen probléma megoldása közben, akkor azt tapasztaljuk, hogy a kifejezés valamelyik részébe belekapszkodva mondanak ötleteket, mi lehet az értelmezési tartomány. Ebben az esetben a legnyilvánvalóbb kapaszkodási pont a logaritmus, tehát igen sok gyerek hajlik arra, hogy azt mondja, az értelmezési tartomány a pozitív számok halmaza.

Az aebli-i jelentésfogalomból kiindulva ennek az algebrai kifejezésnek az értelmezési tartományát azok a műveletek döntik el, amelyek a kifejezést létrehozták. Vegyük sorra őket!

x	azt szimbolizálja, hogy vegyünk egy tetszőleges számot: bármely szám eset értelmes
$x - 1$	egy tetszőleges számból mindig el lehet venni 1-et
	vegyük a kapott szám abszolútértékét, ez is mindig értelmes művelet
	az előbb kapott számmal a 2-t kell hatványozni, itt sincs korlátozás
	2-t bármely számból ki lehet vonni, tehát ez a művelet is mindig végrehajtható
	az előbb kapott szám 6-os alapú logaritmusát kell képezni; ez a művelet csak pozitív számok esetén értelmezett, tehát meg kell oldanunk a egyenlőtlenséget
	itt felhasználhatjuk a 2-es alapú exponenciális függvény monotonitására vonatkozó ismereteinket
	itt az abszolútérték-függvény tulajdonságaiból vagy az abszolútérték definíciójából kapjuk a megoldást:
	vagy

Érdemes észrevenni, hogy az algebrai kifejezések jelentésének meghatározása szempontjából nemcsak a megszokott matematikai műveletek, hanem a függvényértékek képzése is műveletnek számít. A különbség az, hogy a hagyományos matematikai műveletek kétváltozósak, mig a függvényértékképzés egyváltozós művelet.

Rendszerszerű jelentés

H. Aeblinek még egy nagyon fontos eredménye van a jelentés fogalmának definiálásával kapcsolatban. *A matematikai jelentés nem egyszerűen összege azoknak az elemi tapasztalatoknak vagy lépéseknek, amelyek a fogalom tartalmához elvezetnek, hanem ezek kapcsolata, illetve az egészhez való viszonya* ugyanúgy a jelentés részét képezi. A fenti algebrai példa ezt jól mutatja.

Ennek az állításnak igen nagy jelentősége van a matematikai fogalmak felépülése szempontjából. Aebli ugyanis azt állítja, hogy a fogalmak jelentése folyamatosan változik az újabb és újabb ismeretek megszerzésével együtt, hiszen új kapcsolódási pontok jönnek létre, illetve az egészről való elképzelés befolyásolja az egyes fogalmakat is.

Műveleti gondolkodás ↔ szokás-cselekvés

A gyerekek matematikai viselkedésének megfigyelése során nagyjából kétféle viselkedés típust azonosíthatunk. Az egyik fő jellemzői, hogy a gyerek egy új probléma kapcsán tapasztalatokat gyűjt, rendszerez, kipróbál, értelmes összefüggéseket keres. A másik esetben egy részletet ragad meg a gyerek, és ehhez kötődnek a további cselekvések.

Aebli *műveleti gondolkodásról* beszél, ha a művelet nem kapcsolódik semmilyen jelszerű ingerhez, bármikor képes működésbe lépni, tehát általános. Aebli kutatásai azt mutatták, hogy a műveleti gondolkodás fenti kritériumainak akkor felel meg egy eljárás, ha az cselekvések interiorizációjaként jön létre. Ide kívánkozik az, hogy ezek az eredmények adják a felfedeztető matematikaoktatás pszichológiai bizonyítását.

E cikk szempontjából a műveleti gondolkodásnak azért van jelentősége, mert azt a következtetést vonhatjuk le, hogy **tetszőleges matematikai fogalom tartalma azon tapasztalatok összessége, melyet a fogalommal kapcsolatban szereztünk.**

Vegyük a legnagyobb közös osztó fogalmát . Két vagy több szám legnagyobb közös osztója a közös osztók közül a legnagyobb.

Mit jelent ez? Tekintenünk kell minden egyes szám összes osztóját, majd az osztók halmazainak metszetét, és végül ezen számok közül a legnagyobbat.
Milyen tulajdonságokkal fog rendelkezni az így kiválasztott szám? Mindegyik számnak osztója lesz, hiszen a közös osztók halmazának eleme volt.
Hogyan lehet egy ilyen számot megkeresni az itt említettnél rövidebb úton? Induljunk ki abból a tulajdonságából, hogy mindegyik szám osztója. Tehát a prímtényezős felbontása csak olyan prímszámot tartalmazhat, amelyik mindegyik számban előfordul. A közös prímtényezők legkisebb hatványát kell választanunk a közös oszthatóság feltétele miatt.

Ezek után a gyerekek elég gyorsan megtaníthatók a legnagyobb közös osztó megkeresésére. A fogalom kialakítása azonban ezzel nem fejeződik be, mert olyan tapasztalatokhoz kell juttatnunk a gyerekeket, hogy a műveleti gondolkodás kritériumainak is megfeleljen az új fogalom.

A legnagyobb közös osztó a legegyszerűbb esetben három szám között létesít kapcsolatot: $(x, y) = z$.

$(72, 396) = z$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$

A fogalom kialakítása akkor felel meg a műveleti gondolkodás kritériumainak, ha a gyerekek tudnak válaszolni a következő három kérdésre:

$(x, 396) = 36$, $x = ?$

$(72, y) = 36$, $y = ?$

$(72, 396) = z$, $z = ?$

Nagyon fontos megfigyelés, hogy csak az utolsó kérdésre egyértelmű a válasz. Az első két esetben végtelen sok megoldása van az egyenlőségnek.

Csak az érdekesség kedvéért jegyzem meg, hogy a legnagyobb közös osztó ugyanúgy tekinthető műveletnek, mint a függvényértékképzés. Tulajdonképpen egy egységesebb szemléletű tárgyalásban tudnunk kell, hogy itt a kétváltozós függvényre adunk példát a gyerekeknek. Ezt a függvényt definícióval adjuk meg ugyanúgy, ahogyan az abszolútértéket, az egészrészt vagy a törtrészt.

A tanítási gyakorlatban óriási hibát követnénk el, ha ezt ki is mondanánk, de legalább akkora hibát követünk el, ha nem tudjuk, hogy a legnagyobb közös osztóval a kétváltozós függvény fogalmának kialakításához is nyújtunk egy tapasztalatot.

A fenti feladatok megoldásával az egyenlet fogalma is bővülni fog. És példát tudunk nyújtani a tanulás egy korai szakaszában a definícióval történő lebontásra.

Egy pillanatra visszatérve a jelentéshez, a legnagyobb közös osztóról itt elmondottak nagyon jól illusztrálják, mit értsünk azon, hogy a fogalmak jelentéséhez az is hozzájárul, ha a rendszer egészére vonatkoztatjuk őket.

Sajnos, H. Aebli neve, így értelemszerűen a munkássága is ugyanúgy ismeretlen a matematikatanárok számára, mint Piaget-é.

Hans Aebli néhány írása a Lipcsei Egyetem honlapján:
http://www.uni-leipzig.de/~sander/hd/info/Didaktische%20Modelle/Aebli.html

Hans Aebli: A tanítás alapjai – a Göttingeni Egyetem honlapján:
http://www.wipaed.wiso.uni-goettingen.de/~ppreiss/didaktik/AebliGL22.html

R. R. Skemp munkássága

R. R. Skemp matematikus és pszichológus, és mindkét tárgy tanításában jártas szakember.

A matematikai gondolkodás leírásának történetében jelentős lépésnek kell tartanunk, hogy Skemp volt az első, aki éles határt vont a matematika és a matematika tanulása között. Világosan kimutatta, hogy a matematikatanításnak azok a törekvései, amelyek a matematika logikai fejlődésére épülnek, nem visznek közelebb a tanulás természetének a megértéséhez, mert a tanulás és a tanítás problémái **pszichológiai problémák**. Ennek a gondolatnak a kimondását forradalmian újnak kell tekintenünk, mert ha jól meggondoljuk, akkor még ma is sok tanár gondolja úgy, hogy a pszichológiára történő hivatkozás valami tudománytalan álmagyarázat.

Skemp volt az első, aki a matematikai megértés és fogalomalkotás természetét alapos vizsgálat tárgyává tette, és megpróbálta leírni, hogy mi történik velünk, amikor megértünk valamit. Mindnyájan érzékeljük a megértés sajátos tudatállapotát, ugyanakkor, ha számot kell adnunk arról, mi történt közben a fejünkben, nem igazán tudunk beszámolni róla. Pontosan ezért sok matematikatanár gondolja ma is azt, hogy erről a kérdésről azért nincs értelme beszélni, mert nem definiálhatók pontosan azok a tudati mozzanatok, amelyek bizonyos külső hatások következtében szükségszerűen beállnak. Ebből arra a következtetésre jutnak, hogy ez egy nem nyomonkövethető folyamat, tehát nem érdemes a megértésével bajlódni. A megoldás az, hogy "jól kell tanítani a matematikát". Ezeket a tanárokat az egyáltalán nem szokta zavarni, hogy a "jól" legalább annyira szubjektív és definiálatlan kategória, mint amivel ők azokat a bizonyos tudati folyamatokat vádolják.

Ha egy pillanatra visszatekintünk, akkor az emberi gondolkodásnak ez a mechanikus szemlélete, amely a tanulást olyan tudati folyamatnak fogja fel, ahol a külső behatás, és a hatására létrejövő tanulás közvelten ok-okozati kapcsolatban van egymással az első nagyon primitív tanulás-felfogásokra jellemző.

Valóban gyakran találkozunk azzal a jelenséggel, hogy úgy érezzük, az erőfeszítéseink meddőek, az általunk közölt információk és gondolkodási módszerek látszólag nem hagynak nyomot tanítványainkban. Ugyanakkor gyakran figyeljük meg, hogy ez az elveszettnek hitt tudás és képesség hirtelen, amikor már lemondtunk róla, megjelenik. Skemp volt az első, aki ezt a jelenséget megpróbálta körüljárni. Erre tesz kísérletet ez a könyv is a matematikai fogalmak kialakulását illetően.

Mind a mai napig a tanítás gyakorlatában általánosnak tekinthetjük azt, hogy minden olyan esetben, amikor a jószándékú, tanulni akaró tanulók sem értik meg a matematikát, az értelmi képességek körébe utaljuk a jelenséget, nevezetesen "butának" minősítjük a gyerekeket. Skemp volt az első, aki élesen fellépett, és keményen bírálta ezt a tanári magatartást.

"A tanulónak nem kell elfogadnia semmit, ami nem egyeztethető össze saját értelmével, intelligenciájával - ideálisan az a kötelessége, hogy ne fogadjon el semmi ilyesmit. .....

....Például meg kell oldania egy egyenletet úgy, hogy "vigyen át minden x-et az egyik oldalra és minden számot a másik oldalra", és ezt oly módon kell elvégeznie, hogy "amikor átvisz valamit a másik oldalra, akkor változtassa meg az előjelet". Az ilyesfajta utasításokat az értelem sorozatos megsértésének nevezhetjük, minthogy úgy tesznek, mintha az értelmen alapulnának, holott semmi közük hozzá.

A "megsértést kifejezést mind hétköznapi, mind pedig orvosi értelemben használtuk: valamilyen szervezet megsértéséről van szó. .....

Ilyen megvilágításban megérthetjük, miért van az, hogy egyes tanulók nem csupán elvesztik a matematika iránti lelkesedéssüket, de egyben erős visszatetszést is éreznek vele szemben. Sőt ilyen körülmények között nekik van igazuk, ha így éreznek, minthogy egyik legnagyobb adottságukat, fejlődő értelmüket érte káros hatás. Az, hogy a tanár nem akar kárt okozni és csupán tudatlanságból csinálja, amit csinál, a befogadó oldaláról nem befolyásolja a helyzetet."

H. Aebli után R. Skemp volt a második, aki Piaget elméletére támaszkodva próbálta meg leírni a matematikai megismerés tertmészetét. Több fogalom kialakulását részletesen elemezte. Ő volt az első, aki a matematikai szemléltetés kérdését a gyermeki ismeretszerzés szempontjából értékelte: éles határt vont a fizikai megfigyelés és a matematikai modell között, és tisztázta az elsődlegesség kérdését. Például ha felvessszük a nulla szintet függőleges irányban, akkor a fölfele és lefele történő elmozdulások az előjeles számok összeadásával modellezhetők. A megismerés során a mozgást tudja a gyerek megfigyelni. A megfigyelések alapján neki kell megalkotnia azokat a fogalmakat, amelyek segítségével megfigyeléseit matematikailag le tudja írni.

A jelenlegi tanítási gyakorlatban sok olyan példát találunk a szemléltetésre, amelyek a gyermeki ismeretszerzés szempontjából helytelen építkezést követnek. Ha különböző általános iskolai tankönyveket nézünk, akkor nagyon gyakran találkozhatunk olyan szemléltetéssel, amikor nem a tapasztalati megfigyelések általánosítása vezet el a matematikai modellhez, hanem fordítva, egy tanítandó anyaghoz, például az előjeles számokkal végzett műveletekhez keresnek egy izomorf struktúrájú szemléletes, a fizikai valóságból vett példát. Ebben a fizikai példában megadják a matematikai struktúra jellemző tulajdonságait. Ebben az esetben a számfogalmat nem a gyerek alkotja meg a megfigyelései alapján, hanem az egy eleve létező dolog, és a modell csak a "láthatóvá tevés" eszköze. Hogy világos legyen, miről van szó, nézzünk egy példát:

Egy kisautó mozog egy fa és egy ház között. Ahhoz, hogy az előjeles számokkal végzett műveletek megfigyelésére alkalmas legyen a fizikai példa, a tankönyv megadja a következő szabályokat:

- Szemben állni a fával pozitív előjel.
- Háttal állni a fának negatív előjel.
- Előre menni összeadás.
- Tolatni kivonás.

Észre kell vennünk, hogy ebben a tanítási szituációban ugyanúgy szabályokat magoltatunk a gyerekekkel. A fa a számegyenes pozitív iránya, a ház a számegyenes negatív iránya. A házzal szemben állva tolatni tehát egy pozitív irányú elmozdulás, tehát kimondhatjuk azt az előjelszabályt, hogy negatív szám kivonása egy ugyanolyan abszolútértékű pozitív szám hozzáadásával helyettesíthető.

Szakmabeli tisztelők összeállítása a weben:
http://www.skemp.org.uk/

Dienes Zoltán

A matematika szempontú tanuláselméleteknek nem képezi tárgyát a tanulási folyamat elemzése. R. R. Skempnél figyelhetjük meg először, hogy részletesen elemzi a tanulási szituációt a benne résztvevők szempontjából: kitér a tanár személyiségének, a tanóra szerkezetének, a motivációnak, stb. kérdésére.

Dienes Zoltán a következő jelentős matematikadidaktikus, aki a tanulási folyamatot a maga komplex voltában próbálta megérteni. Dienes elképzelései megalkotásában jelentősen támaszkodott Piaget, Bruner és Bartlett eredményeire, jól ismerte Skemp munkásságát.

Nézzük, melyek azok az eredmények, amelyekkel jelentősen továbbfejlesztette a matematika tanulásának elméletét!

- Dienes volt az első, aki nyíltan megfogalmazta, hogy a tanulás terén az **egyes gyerekek között nemcsak fokozati, hanem minőségi különbségek is vannak**. Dienes azt állítja, hogy a különböző matematikai fogalmakhoz az egyes gyerekek lényegesen eltérő módon juthatnak hozzá, ezért a képességek szerinti bontás nem hoz létre homogén tanulócsoportokat. A tanár nehézsége pedig elsősorban abból fakad, hogy az absztrakt fogalmak kialakításának lehetséges módjait nem ismeri.

- Dienes is megfogalmazta, hogy a **matematikatanítás elsődleges célja a személyiség építése**. Ebből a szempontból Dienes elég sötétnek látja a helyzetet. Dienes szavait is szó szerint idézném, mert mélyen elgondolkodtató, amit mond: "Arra a következtetésre juthatunk, hogy gyermekeink matematikatanulása nagyrészt nincs integráló hatással személyiségükre, és addig, amíg a matematikatanítás jelenlegi módszere folytatódik, nem is valószínű, hogy ilyen hatással lesz arra. Azt a következtetést is levonhatjuk, hogy a fegyelem pusztán külső formái és a mesterséges ösztönzések, akár pozitívak (jutalom), akár negatívak (büntetés), semmiképp sem segítik a személyiség integrációját, sőt azzal egyenesen ellentétes irányba hatnak,....."
- Dienes továbbfejlesztette Aebli elméletét az értelmes tanulásról. Kimutatta, hogy a mechanikus tanulás a matematikában miért alkalmazható kevésbé, mint más tantárgyakban. A matematika tanulása során a hangsúly inkább a struktúrán van és kevésbé a tartalmon. Dienes a matematikai gondolkodás lényegét abban látja, hogy ez egy **vég nélküli nyílt gondolkodás.** (Csak zárójelben jegyzem meg, hogy amikor a matematika tanulását leszűkítjük bizonyos problémák jó szintű technikai kezelésére, akkor a matematikai gondolkodás lényegétől fosztjuk meg tanítványainkat.)

Nézzünk két példát!

♦ Az első példa nem a felépítés nyíltságáról szól, hanem arról, hogy a tanulás tetszőleges szakaszában pontosan a folyamat nyílt volta miatt még a legegyszerűbbnek tűnő feladat is sokkal többet rejt, mint amennyit a felszínen megmutat magából.

Ha tekintünk egy természetes számot, akkor például a "három" a tárgyak valamilyen összességére vonatkozik. Ha három alma és három körte láttán azt mondjuk, hogy "ugyanannyi", akkor ez már nem a dolgok összességére vonatkozó állítás, hanem a dolgok számára. 2+3=5 már a számok összegéről állít valamit. A 2+2+2=3·2 állítás pedig a számok összeadása és szorzása közötti kapcsotról állít valamit. Ezek az állítások azonban nem függetlenek a kiindulástól, nevezetesen számokról állítunk valamit, amelyek a dolgok összességére vonatkoznak.

Joggal vetődik fel az olvasóban, hogy a fenti példát nehéz lenne órán alkalmazni. Nem is a szó szerinti magyarázat a fontos, hanem a szemlélet, hogy olyan tapasztalatokat nyújtsunk a gyereknek, olyan tanulási helyzeteket teremtsünk, amelyben tanítványaink átélik, hogy a jó kérdések felvetése és azok megválaszolása új összefüggések felfedezéséhez vezet.

Két példán szeretném bemutatni, hogyan lehet tanítványainkat ehhez a szemlélethez eljuttatni:

Az első tanítási szituáció hatodik osztályban történt, ahol a tanév elején a többjegyű számok írásbeli szorzását ismételtük. A gyerekeknek a következő számolási feladatot kellett megoldaniuk:

346 · 729

A gyerekek helyesen megoldották a feladatot, majd az egyik kislány felírta a táblára a megoldást:

```
 346·729
2422
  692
  3114
252234
```

Megkértem a gyerekeket, magyarázzák el, hogyan számoltak. Elmondták, hogy először 7-tel, utána 2-vel, majd 9-cel szorozták a 346-ot, majd a kapott számokat összeadták. Miközben magyaráztak, felírtuk a táblára, amit mondtak:

$$\begin{array}{l}
346 \cdot 7 = 2422 \\
346 \cdot 2 = 692 \\
346 \cdot 9 = \underline{3114} \\
6228
\end{array}$$

Némi meghökkenés, majd gondolkodás után rájöttek, hogy nem ezeket a számokat adták össze, hanem a 242200-t, a 6920-at és a 3114-et.

Ezek után felírtuk, hogy a fenti írásbeli szorzás igazából egy rövidítés: $346 \cdot 729 = 346 \cdot (700 + 20 + 9) = 346 \cdot 700 + 346 \cdot 20 + 346 \cdot 9 = 242200 + 6920 + 3114 = 252234$.

A fenti szorzás elemzése tehát elvezetett minket a disztributivitáshoz. Ezt az összefüggést értelmesen meg lehetett fogalmaztatni a gyerekekkel. A feladat felvetette a helyiértékes számírás kérdését is. Természetesen adódik a kérdés, csak a tizes számrendszer létezik, vagy el tudunk-e képzelni más számrendszert is. Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolása elvezet minket az alaki érték és a helyi érték fogalmának általánosításához. A más számrendszerekben végzett műveletek pedig az algoritmus fogalmának általánosításához vezetnek el. És természetesen még tovább folytathatnánk a sort.

♦A nyílt gondolkodási folyamatra vonatkozó második példa szintén egy egyszerű matematikafeladathoz kapcsolódik. Hetedik osztályos gyerekeknek azt a feladatot kellett megoldaniuk, hogy két négyzetszám szorzata lehet-e négyzetszám.

1. Dienes gondolkodásmódját követve, itt a négyzetszámokról állítunk valamit. Ugyanakkor a szorzásról is állítunk valamit, nevezetesen azt, hogy a művelet végeredménye ugyanolyan tulajdonságú szám lesz, mint amiből kiindultunk.
2. Egy lépéssel továbblépve feltehetjük a kérdést, hogyan viselkednek a négyzetszámok a többi műveletre nézve.
3. A következőben nem a művelet a vizsgálódás tárgya, hanem a viselkedés, nevezetesen az, hogy bizonyos műveletek végeredményeként ugyanolyan tulajdonságú számot kapunk, míg más műveletek végeredménye nem mindig őrzi meg a tulajdonságot. Amennyiben ezt észrevesszük, a zártság szempontjából összehasonlíthatunk más számhalmazokat is.
4. Ezután vizsgálódás tárgyát képezhetik azok a számok, amelyeket műveletek végeredményeként kapunk, és amelyek nem őrzik meg a kiindulásul választott halmaz tulajdonságait. Például a természetes számok halmazában a kivonás nem minden esetben ad természetes számot eredményül. Ilyen módon eljuthatunk a számfogalom felépülésének egy lehetséges módjához.
5. Egy további kérdés lehet most már a halmaz és az azon értelmezett műveletek, azaz a struktúrák vizsgálata.

Visszatérünk most az 1. ponthoz, és nézzünk meg egy másik nyílt gondolkodási láncot.

1. Az összeadásra nézve nem zárt a négyzetszámok halmaza. Ugyanakkor vannak olyan négyzetszámok, melyeknek az összege is négyzetszám.
2. Az egyik továbbhaladási lehetőségnek választhatjuk azt az utat, hogy megkérdezzük, rendelkeznek-e valamilyen tulajdonsággal azok a számhármasok, amelyek mindegyike négyzetszám. Ilyen módon eljuthatunk a pitagoraszi számhármasokhoz.

3. Egy másik kérdés vonatkozhat az egyenlet megoldhatóságára. Az egyenletnek milyen n-re van megoldása az egész számok körében.

Talán nem is kell mondani, hogy az egyenletek megoldhatóságának kérdései milyen messzire vezetnek. Nem folytatjuk tehát, hiszen a célunk mindössze az volt, hogy illusztráljuk, mit jelent a nyílt végű gondolkodás, és egy-egy hétköznapi problémahelyzetben hogyan tudjuk ezt érzékeltetni tanítványainkkal.

- Dienes megpróbálta összegezni a matematikatanulás alapelveit.

A dinamika elve alatt azt értette, hogy a fogalmak kialakítása során három típusú játékról kell gondoskodnunk: az előkészítő, a strukturált és a gyakorló játékokról.

Miután Dienes meg volt győződve arról, hogy az elemző gondolkodás gyakorlatilag 12 éves kor után jelenik meg, ezért nagyon fontosnak tartotta, hogy a konstrukció előzze meg az elemzést. Vegyünk egy példát!

♦Egy iskolában három kirándulást szerveztek. Az elsőn 56 tanuló vett részt, a másodikon 74, a harmadikon 82. Két kirándulásra 28-an mentek el, közülük 5 tanuló vett részt mindhárom kiránduláson. Hány gyerek nem ment el egyetlen kirándulásra sem, ha tudjuk, hogy 300 gyerek jár az iskolába?

A feladat általános megoldása a halmazok metszetére és uniójára vonatkozó szitaformulához kötődik. Ugyanakkor egy hatodikos vagy hetedikes gyerektől nem kérhetjük, hogy ilyen módon értelmezze és elemezze a feladatot. Ha szeretnénk tudni, hogy megértette-e világosan, miről van szó, akkor arra szoktuk kérni, "mondjon egy hasonló feladatot".

Dienes nagyon fontosnak tartotta a matematikai változatosság elvét. Ez alatt azt éltette, hogy a fogalmak felépítése során fontos, hogy nagyon sokféle példa alapján alakuljon ki a megfelelő képzet.

♦Például a geometriai transzformáció kialakításánál rendkívül fontos, hogy ne csak "szabályos" transzformációkat lássanak a gyerekek. Sokkal mélyebben megértik, hogy miről van szó, ha sokféle transzformáció megadása után kell kikeresniük, milyen tulajdonságok alapján lehet megkülönböztetni őket, és az így definiált tulajdonságok mennyire jellemzőek az egyes transzformációkra.

A perceptív változatosság vagy többszörös konkretizálás elvének az a lényege, hogy egy-egy új fogalom bevezetése során akkor járunk el helyesen, ha többféle szemléltetést alkalmazunk. Dienes úgy vélte, hogy ezzel tudjuk segíteni azt, hogy a korábban említett minőségileg különböző módon gondolkodó gyerekek esetében lehetőség legyen a fogalom lényegének helyes megragadására. (Csak zárójelben jegyzem meg, hogy nem gondolom, hogy ezzel az eljárással pontosan azokon fogunk tudni segíteni, akiknek tényleg nehézségeik vannak. Ugyanis a nehézségek megítélésem szerint nem a szemléletes példák nem megfelelő voltából fakadnak, hanem az absztrakciós folyamat természetének különbözőségéből. Később részletesen beszélünk azokról a tanulási típusokról, amelyeket a matematika tanulása szempontjából célszerű megkülönböztetni.)

- Végül is Dienes a fogalmak kialakulásában hat szakaszt különböztetett meg:

1. Szabad játszás
2. Játékok
3. Közös vonások keresése

4. Ábrázolás
5. Szimbolizálás
6. Formalizálás

Az általa feltárt szakaszok Piaget elméletére támaszkodva jöttek létre.

Dienes sok konkrét esetben be is mutatta, hogy az általa megalkotott tanuláselméleti elképzelések, hogyan valósulnak meg a konkrét tanulási szituációkban.

Az aritmetikai fogalmak, az elemi algebrai fogalmak, a lineáris algebrai fogalmak, a függvények és a geometria tanulmányozásával mutatta be, hogyan jönnek létre a matematikai ismeretek.

„Dienes Zoltán: Egy matematikus mágus visszaemlékezései" – könyvbemutató az interneten:
http://www.zoltandienes.com/biography.html

A magyarországi helyzet

Tulajdonképpen két nagy korszakot kell megkülönböztetnünk: a háború előtti időszakot és a háború utánit.

Az egyik legkiemelkedőbb elméletalkotónak a XX. század elején élt **Beke Manót** kell tekintenünk. E kiváló matematikusnak és pedagógusnak a matematikatanulási folyamat elemzéséről szóló írásait olvasva úgy érezzük, hogy eredményei teljesen korszerűek a mai tanár számára is. Beke Manó azok közé a matematikatanítással foglalkozó szakemberek közé tartozott, akik felismerték, hogy a "tanulói hibáknak" milyen nagy jelentőségük van a matematikatanulási folyamat megértésében és leírásában. Ezzel az indirekt megközelítési móddal tuladonképpen minden alapvetőnek mondható gondolkodási hibát fel is tárt.

Felismerte, hogy időnként értelem nélküli mechanizmusok alakulnak ki. Azt is vizsgálta, hogyan redukálható ezeknek a száma. Tulajdonképpen megfogalmazta azt az igen korszerűnek tekinthető tanítási célt, hogy ezek azáltal küszöbölhetők ki, ha olyan számítási feladatokat adunk a gyerekeknek, amelyek esetében csak értelmes, gondolkodó eljárás vezet eredményre.

Megkülönböztetett egy gondolkodást, amit konkrét gondolkodásnak nevezhetünk, és számos igen szép példát hozott erre a gondolkodásmódra: például ilyen, amikor valaki a kivonást a "kevesebbedés" fogalmával azonosítja. Beke azt is vizsgálta, hogyan küszöbölhető ki ez a hiba. Gyakorlatilag ugyanarra a következtetésre jutott, mint Dienes Zoltán: a változatos szemlélet megakadályozza a hiba létrejöttét.

Logikai jellegű hibának tekintette a hamis analógiát.

Beke Manó eredményei azért figyelemreméltóak, mert a gondolkodáspszichológia egyetlen lényeges eredménye sem állt mögötte, azok mind később jöttek létre.

Bálint Elemér írása Beke Manóról a Nyugat lapjain – most az Országos Széchenyi Könyvtár Elektronikus Periodika Archívumában: http://epa.oszk.hu/00000/00022/00318/09657.htm

Beke Manó neve után **Pólya Györgyöt** kell említenünk, aki magyar származású matematikus volt, de Amerikában élt, jelentősebb művei mind külföldön jelentek meg először.

Dienes Zoltánnal ugyanaz a helyzet.

A háború utáni Magyarországon két élesen elkülönülő irányzat lépett fel.

Egyrészt szűk körben folytatódtak a hagyományok, másrészt megjelent az új pedagógia, amely a szovjet minta eredményeit állította szembe a „polgári" pedagógiával. Miután ez a második elképzelés felelt meg az akkori oktatáspolitikának, így elmondhatjuk, hogy a háború utáni Magyarországon a fejlődésben jelentős megtorpanás következett be. Ez annak tudható be, hogy az új ideológiai elképzelések károsnak minősítették az úgynevezett „polgári" pszichológiát, amely például egyéni különbségekről beszélt, amely a gyermeki világkép minőségileg elétérő voltát hangsúlyozta, stb. Ehelyett statisztikák és mérések tömkelege bizonyította az átlagos gyerek létezését, az iskola családi hátteret és társadalmi különbségeket elmosó hatását. Ez az ideológia oly mértékben egyeduralkodóvá vált, hogy a tanári diplomához vezető sok-sok éves tanulás csak egyetlen kérdésre nem adott választ, nevezetesen arra, mit csináljunk a gyerekkel, ha nem ért valamit, egyáltalán hogyan magyarázzunk.

A matematikai gondolkodás leírására ebben az időben a szigorú matematikaszempontúság volt jellemző, akár a tanítási eljárásokról, a gondolkodás felépítéséről beszéltek, akár a hibákat elemezték.

A matematikai ismeretek és fogalmak felépítése szempontjából a szigorú matematika-szempontúság azt jelentette, hogy a tankönyvek és a hozzájuk tartozó akkor még teljesen egységes tantervek megpróbáltak logikai szempontból egyre pontosabb matematikai felépítést követni. Ennek következtében a reformok és változtatások arra korlátozódtak, hogy logikai szempontból pontosították azt, hogy milyen matematikai ismereteknek kell megelőznie egy-egy új fogalom bevezetését. Egy időben például éles vitát váltott ki a matematikatanárok körében az a probléma, hogy a hasonlóság tanítható-e a párhuzamos szelők tétele nélkül. Ez valóban fontos kérdés egy axiomatikus felépítés esetén, de az emberi ismeretek nem axiomatikusan épülnek fel, gondoljunk csak arra, hogy a számfogalom a történelem folyamán egészen másként alakult, ahogyan azt ma tanítjuk az iskolában.

Korábban említettük, hogy a hibás matematikai feladatmegoldások milyen sokban hozzájárulnak ahhoz, hogy a matematikai ismeretek felépüléséről képet alkothassunk. A hibák elemzésében megjelenő matematikaszempontúság ettől a lehetőségtől teljesen megfosztotta a matematikusokat. Ugyan is a hibák matematika szempontjából történő rendszerezése azt jelentette, hogy a ***hibás feladatmegoldásokat azonosították a hibás gondolkodással, a helyes feladatmegoldásokat pedig helyes gondolkodásnak tekintették.***

Ilyen körülmények között csak arra a következtetésre lehetett jutni, hogy létezik hibás és helyes matematikai gondolkodás. A hibás és helyes matematikai gondolkodás közötti különbségeket a következőkben látták:

Helyes gondolkodás

1. Az analógiákat helyesen alkalmazza.
2. A matematikai formalizmusokat helyesen értelmezi.
3. A megszokás nem befolyásolja a helyes megoldási eljárás kiválasztásában
4. A fogalmai tiszták.
5. Előismeretei nem hiányosak.
6. A matematikai szakifejezéseket helyesen értelmezi és használja.

Helytelen gondolkodás

1. Helytelenül feltételezett analógiákat használ
2. A formalizmusokat tévesen értelmezi.
3. Gyakran vét megszokáson alapuló hibákat.
4. Fogalmai nem tiszták.
5. Előismeretei hiányosak.
6. A matematikai szakkifejezéseket helytelenül használja.

Vegyünk egy egyszerű példát egy 15 éves gyerek esetéből, akinek a következő algebrai átalakítást kell elvégeznie:

Végezzük el a kijelölt műveleteket!

A feladat megoldása során a gyerek megállapítja a helyes közös nevezőt, miután a lehetséges szorzattá alakításokat elvégezte a nevezőben. Utána helyesen bővíti is az egyes törteket, majd **a bővítés végrehajtása után beszoroz a közös nevezővel.**

Hogyan értékelhetjük a hibáját?

1. Nyilvánvalóan elkövetett egy formalizmuson alapuló hibát, mert helytelenül értelmezte az előtte lévő algebrai kifejezést.
2. A hibája ugyanakkor legalább annyira a megszokáson alapuló hiba is, hiszen megszokta, hogy beszoroz a közös nevezővel.
3. A fogalmai sem tiszták, mert keveri az egyenletet a racionális algebrai törtkifejezéssel.
4. Az előismeretei is hiányosak, mert ezt a kettőt nem lenne szabad összetéveszteni.
5. Világos az is, hogy a matematikai szakkifejezéseket sem tudja jól.

A tanár felteheti magának a kérdést, hogyan tud segíteni a gyereknek:

1. Megtanítja az algebrai kifejezés **helyes értelmezésére**.
2. Elmagyarázza, hogy ne rutinszerűen oldjon meg feladatokat, hanem **értelmezze** őket.
3. A fogalmakat tisztázza, tehát eljuttatja a gyereket a **helyes értelmezéshez.**
4. ***Jól összeszidja, hogy tanuljon rendesen***.
5. Elmagyarázza az egyenlet és az algebrai törtkifejezés közötti különbséget, tehát **értelmezi a fogalmakat.**

Ilyen oktatási környezetben a gyerek fejlődése esetleges, ugyanis meg sem próbálunk válaszolni arra az alapvető kérdésre, hogy miért jut eszébe, hogy így járjon el a feladat megoldása során. Ez a kérdés az lenne, miért keveri össze a két fogalmat. Egyáltalán miért történik meg újra és újra, hogy olyan gyerekek, akik soha nem találkoztak, más emberek tanították őket, mégis ugyanazokat a hibákat követik el. Hogyan lehetséges, hogy egymástól függetlenül ugyanazokat a hamis képzeteket alkotják meg?

Irodalomjegyzék

1. H. Aebli: A képzet és a művelet – Neveléslélektan II. Szöveggyűjtemény (szerk.: Kósáné Dr. Ormai Vera), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
2. H. Aebli: Lélektani didaktika, OPI kiadvány, Budapest, 1984.
3. Beke Manó: Typikus hibák a matematika tanításban, magyar pedagógia, 1900.
4. J.S. Bruner: Új utak az oktatás elméletéhez, Gondolat, Budapest, 1974.
5. Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát!, Gondolat, Budapest, 1973.
6. Faragó László: Aritmetikai feladatok általános alakban való megoldása során elkövetett tanulóhibák, Tanulmányok a neveléstudomány köréből, Budapest, 1959.
7. Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk?, Calibra, Budapest, 1993.
8. Majoros Mária: Az anyanyelv, mint a matematikai megértést korlátozó gondolkodási modell, II. Magyar Megismeréstudományi Konferencia, Visegrád, 1994.
9. Mérei Ferenc: Freud fényében és árnyékában, Interakt, Budapest, 1989.
10. Paul Moorhouse: Dali, Corvina, Budapest, 1992.
11. W. Peschek: Kognitív struktúrák megváltoztatása cselekvési képzetek felépítése segítségével – matematikadidaktikai tanulmányok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
12. J. Piaget: Válogatott tanulmányok, Gondolat, Budapest, 1970.
13. Pléh Csaba: Pszichológiatörténet, Gondolat, Budapest, 1992.
14. Pólya György: A gondolkodás iskolája, Gondolat, Budapest, 1979.
15. R.R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975.