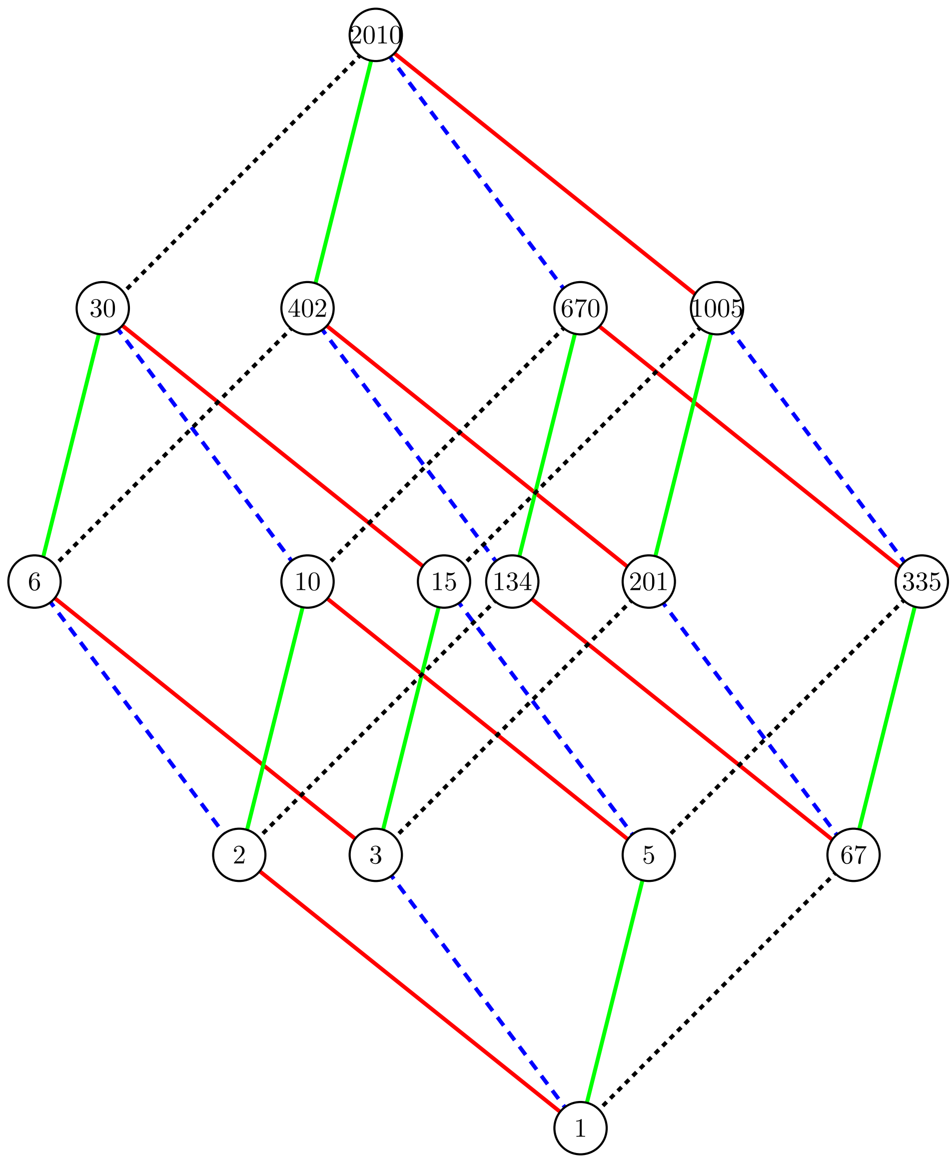
BUÉK 2010.



Az év elején mindenki kiváncsian tekint az új évszámra. Ezt az alkalmat kihasználhatjuk, hogy elgondolkoztassuk a nebulókat egyszerbb és nehezebb, néha egészen mélyre vezet matematikai problémákon. Ezzel a céllal gyjtöttem össze néhány feladatot az évszámmal kapcsolatban. Hasonló témában ennél alaposabban kidolgozott anyagok is születtek már. Az egyik remek kiadvány:

Sztrókay Vera - Török Judit: 1991 Érdekességek és feladatok egy évszámról (1990) Typotex.

A 2010 különleges szám. Egyik legfbb különlegessége, hogy négy különböz prímszám szorzata, így osztóhálója (Hasse diagramja) a négydimenziós kocka élhálójával egyezik meg. Ezzel kapcsolatban nagyon ajánlom Varga Tamás írását az „Él Matematika" cím kötetben, amelynek III. kiadását a Tankönyvkiadó 1975-ben jelentette meg, ISBN 963 17 1047 5). Matematikai és pedagógiai szempontból is fontos írás, az itt közölt feladatok elemzéséhez is ajánlott.

Nem szerencsés, ha a gyerekek mindenféle elkészítés nélkül kapják kézbe a következ három oldalon található példákat. A tanárnak érdemes elször elgondolkodni rajtuk, esetleg megnézni a megoldásokat, a feladatokkal kapcsolatos megjegyzéseket és saját diákjait ismerve válogatnia kell vagy érdemes elkészít feladatokat is kitznie.

Az esetleges hibákat a http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/buek2010/buek2010.pdf weboldalon található változatban javítom és oda szúrok be megjegyzést, más megoldást, ha kiderül, hogy szükséges.

Köszönöm Fazakas Tünde, Laczkó László és Pataki János javító illetve kiegészít megjegyzéseit, ötleteit.

Jó szórakozást, sok örömet kívánok tanároknak és diákoknak 2010-es utazásaikhoz Matematikában!

Hraskó András

BUÉK 2010. A feladatsor

Beugró Határozzuk meg a tizenkilencedik prímszám és a tizenkilencedik összetett szám szorzatát!

Számkártyák A $2; 0; 1; 0$ számkártyák felhasználásával hány négyjegy szám állítható el?

2010-ig a számok jegyei
Ha leírjuk a számokat egyesével 1-tl 2010-ig, akkor összesen
a) hány számjegyet írunk le?
b) hányszor írjuk le az 1-es számjegyet?

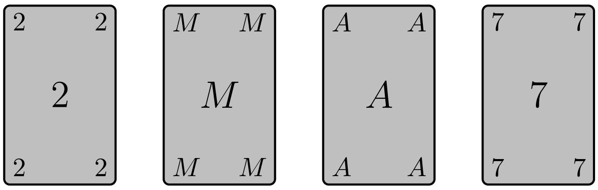
2010 számjegyei Hány olyan négyjegy szám van, amelyben
a) van 0? **b)** legalább két 0 van?
c) az els két jegybl álló szám osztható az utolsó kettbl álló számmal?

2010-ig a négyzetszámok
Hány négyzetszám van az 1, 2, …, 2010 számok között?

Eljeles összeg Határozzzuk meg $1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11 + \ldots + 2010$ pontos értékét!

Heted és nyolcad Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenl legyen a másik szám nyolcadával!

Logika
Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy bet van. Ez látható az asztalon:



Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenrizzük az állítás helyességét?

Rejtélyes összeadás
Hányféleképpen lehet egymástól és 0-tól különböz számjegyeket írni az A, I, L, P betk helyére úgy, hogy teljesüljön az alábbi összeadás?

$$\begin{array}{cccc} P & A & L & I \\ & P & I & A \\ & & A & L \\ + & & & P \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Ha 2-es, akkor 0-s is
Egy papíron négyjegy pozitív egész számok vannak felírva. Azt vettük észre, hogy a felírt számok közül azokban, amelyekben van kettes számjegy van nullás számjegy is.
a) A 2010, 1526, 1000, 1999 számok közül melyik lehet felírva?
b) Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

2010 mint szám vége Végzdhet-e
a) négyzetszám, **b)** faktoriális, **c)** tizenhárommal osztható szám
2010-re?

Eljelezés 2010-ig
Megválaszthatók-e úgy az eljelek, hogy teljesüljön az

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \ldots \pm 2009 \pm 2010 = 2010$$

összefüggés?

2010 szomszédos négyzetekként
Eláll-e 2010 öt szomszédos négyzetszám összegeként?

2010 négyzetszámok különbsége?
Eláll-e 2010 két négyzetszám különbségeként?

2010 egyenes a síkon

Legalább hány pont esetén fordulhat az el, hogy ha behúzzuk mindegyik kett összeköt egyenesét, akkor összesen épp 2010 egyenest kapunk?

Sakktábla lefedés dominókkal

a) Egy sakktábla két sarkát levágtuk. Lefedhet-e a megmaradt 62 mez 31 db 2×1-es dominólappal?

b) Egy sakktábla egyik sarkát levágtuk. Lefedhet-e a megmaradt 63 mez 21 db 3×1-es dominólappal?

c) Mely n-re fedhet le a 2010×2010-es sakktábla $n \times 1$-es dominólapokkal? Döntsük el a kérdést minden $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ számra!

„Kis" osztójáték

Ketten felváltva mondják a varázsszám pozitív osztóit. Már kimondott osztót egyik játékos sem említheti újra. Az veszt, aki kimondja a varázsszámot. Kinek kedvez a játék, Kezdnek vagy Másodiknak, ha a varázsszám

a) 9, **b)** 10, **c)** 16, **d)** 24, **e)** 36, **f)** 2010?

2010 osztói

a) Hány (pozitív) osztója van 2010-nek?

Ezek között hány

b) páros **c)** négyzetszám

van?

2010 osztói – antilánc

2010 osztói közül maximum hány választható ki úgy, hogy a kiválasztottak között egyik se legyen a másik többszöröse?

Osztójáték

Ketten felváltva mondják a varázsszám pozitív osztóit. Már kimondott osztó osztóját egyik játékos sem említheti újra. Az veszt, aki kimondja a varázsszámot. Kinek kedvez a játék, Kezdnek vagy Másodiknak, ha a varázsszám

a) 10, **b)** 16, **c)** 24, **d)** 36, **e)** 30, **f)** 2010?

2010 osztóhálója a síkon

Megfeleltethetk-e 2010 osztóinak pontok a síkon úgy, hogy különböz osztóknak különböz pontok feleljenek meg és az a, b, c, d különböz osztóknak megfeleltetett A, B, C, D pontokra akkor és csakis akkor teljesüljön az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ összefüggés, ha $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$?

2010 osztóhálója a térben Készítsük el 2010 osztóhálóját a térben! Pl. a Babylon épít golyói legyenek az osztók és kett akkor legyen összekötve rúddal, ha hányadosuk prím. Az azonos prímeknek megfelel rudak színe legyen egyforma és legyenek párhuzamosak is!

2010 cm^3 térfogatú téglatestek

Hány olyan nem egybevágó 2010 cm^3 térfogatú téglatest van, amely mindegyik éle cm-ben egész hosszúságú?

2010-ig a számok

Hány olyan szám van az 1, 2, …, 2010 számok között, amely relatív prím a 2010-hez?

Másodfokú polinom

a) Adjunk meg olyan másodfokú polinomot, amelynek gyökei 20 és 10.

b) Van-e olyan másodfokú polinom, amelynek gyökei 20 és 10 és a lineáris tag (x) együtthatója 2010?

2010 kettes számrendszerben

Állítsuk el 2010-et kettes számrendszerben, azaz

$$\sum_{k=0}^{m} n_k \cdot k! = n_m \cdot 2^m + n_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot \cdot 2^1 + n_1 \cdot \cdot 2^0 \qquad (1)$$

alakban, ahol m, n_0, n_1, …, n_m egészek, m pozitív és $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \le n_k \le 1$.

2010 hetes oszthatósága számrendszerekben

A tízes számrendszerbeli 2010, tehát 2010_{10} nem osztható héttel.

a) Mutassuk meg, hogy ha a számrendszer alapszáma osztható héttel, akkor abban a számrendszerben a 2010 alakban leírt szám is osztható héttel.

b) Van -e olyan héttel nem osztható a alap, hogy a 2010_a szám osztható héttel?

c) Van -e olyan tizeneggyel nem osztható a alap, hogy a 2010_a szám osztható tizeneggyel?

0.201020102010...

a) Melyik az a számrendszer, amelyben a 2222 és a 0,2010201020102010... számok szorzata egész szám?

b) Melyik számrendszerben teljesül a

$$2010 \cdot 0,2222222... = 2222 \cdot 0,201020102010...$$

összefüggés?

2010 **faktoriális számrendszerben**

Állítsuk el 2010-et faktoriális számrendszerben, azaz

$$\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot k! = n_m \cdot m! + n_{m-1} \cdot (m-1)! + \ldots + n_3 \cdot 3! + n_2 \cdot 2! + n_1 \cdot 1! \tag{2}$$

alakban, ahol m, n_1, n_2, ..., n_m egészek, m pozitív és $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \leq n_k \leq k$.

2010 **faktoriális**

a) Melyik az a legnagyobb ketthatvány, amely osztja 2010!-t?

b) Hány 0-ra végzdik 2010!?

$\frac{1}{2010}$ **többeseinek egyiptomi tört alakja**

Az egyiptomiak törzstörtekkel (azaz 1 számlálójú törtekkel, tehát pozitív egészek reciprokaival) számoltak. Minden törtet törzstörtek összegeként írtak fel, st a felírásban az egyes tagok nevezi mindig egymástól különböz pozitív egészek voltak.

a) A $\frac{2}{2010}$, $\frac{3}{2010}$, $\frac{4}{2010}$, $\frac{5}{2010}$, $\frac{6}{2010}$, $\frac{7}{2010}$, $\frac{8}{2010}$, $\frac{9}{2010}$, $\frac{10}{2010}$, $\frac{11}{2010}$, $\frac{12}{2010}$ törtek közül melyek nem egyszersíthetk törzstörté? Írjuk át azokat két (különböz nevezj) törzstört összegére!

b) Írjuk fel $\frac{14}{2010}$-et is két különböz pozitív egész szám reciprokának összegeként!

2010 **négyzetszámok összege**

Állítsuk el 2010-et minél kevesebb négyzetszám összegeként!

2010 **mint egymást követ egész számok összege**

Hányféleképpen írható fel 2010 egymást követ egész számok összegeként? (A számok száma lehet egy is, a számok között lehetnek negatívak is.)

2010 hatványok különbsége?

Adjuk meg az $x^n - y^n = 2010$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol x, y és n természetes számok és n legalább 2!

2010 **sorbatevése oszthatósággal**

Hányféleképpen rakhatók sorba a

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2009, \quad 2010$$

számok úgy, hogy a sorban k-adik szám minden $k \in \{1, 2, 3, \quad \ldots \quad, 2008, 2009\}$ értékre osztható legyen k-val?

Eredmények, megoldások, megjegyzések

Beugró Határozzuk meg a tizenkilencedik prímszám és a tizenkilencedik összetett szám szorzatát!

Megoldás

A prímek:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67

Az összetett számok:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	22	24	25	26	27	28	30

A keresett szám a $67 \cdot 30 = 2010$.

Számkártyák A $2; 0; 1; 0$ számkártyák felhasználásával hány négyjegy szám állítható el?

Megoldás

Hat ilyen négyjegy szám van. Az els helyre az 1-es vagy a 2-es kerül és közülük a másik a maradék három hely bármelyikére mehet. A megmaradt helyekre 0-t kell írni.

2010-ig a számok jegyei

Ha leírjuk a számokat egyesével 1-tl 2010-ig, akkor összesen

a) hány számjegyet írunk le?

b) hányszor írjuk le az 1-es számjegyet?

Megoldás

a) $(10-1)\cdot 1 + (100-10)\cdot 2 + (1000-100)\cdot 3 + (2011-1000)\cdot 4 = 9 + 180 + 2700 + 4044 = 6933$.

b) Az egyes helyiértéken 201-szer a tizes helyiértéken $(20 \cdot 10 + 1) = 201$-szer, a százas helyiértéken $(2 \cdot 100) = 200$-szor, az ezres helyiértéken 1000-szer, összesen tehát 1602-ször.

2010 számjegyei Hány olyan négyjegy szám van, amelyben

a) van 0? **b)** legalább két 0 van?

c) az els két jegybl álló szám osztható az utolsó kettbl álló számmal?

Megoldás

a) Összesen $9 \cdot 10^3 = 9000$ négyjegy szám van, ebbl 9^4 számban *nincs* 0-s számjegy, tehát $9000 - 9^4 = 2529$-ben van.

b) Vagy pontosan két 0 vagy pontosan három 0 van a számban. Az elbbibl $3 \cdot 81 = 243$ van, az utóbbiból 9, összesen tehát 252.

c) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $h(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$. A feladat a $h(99) - h(9)$ értékre kérdez rá, ami 450. Részletezve:

Hányszoros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10-11$	12
Az utolsó két jegy	$10-99$	$5-49$	$4-33$	$3-24$	$2-19$	$2-16$	$2-14$	$2-12$	$2-11$	$1-9$	$1-8$
darabszám	90	45	30	22	18	15	13	11	10	$9-9$	8

Hányszoros	$13-14$	$15-16$	$17-19$	$20-24$	$25-33$	$34-49$	$50-99$
Az utolsó két jegy	$1-7$	$1-6$	$1-5$	$1-4$	$1-3$	$1-2$	1
darabszám	7	6	5	4	3	2	1

Megjegyzés A $2n$ jegy számoknál 0-hoz tart azoknak az aránya, amelyben az els n jegybl álló szám az utolsó n jegybl álló szám többese. A harmonikus sorral kapcsolatos a $\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{h(k)}{k}$ határérték és nem véges, de a valószínségre vonatkozó határérték a $\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{h(k)}{k^2}$ kifejezéssel függ össze ($k = 10^n$), ami 0-val egyenl.

2010-ig a négyzetszámok

Hány négyzetszám van az 1, 2, …, 2010 számok között?

Megoldás

$[\sqrt{2010}] = 44$.

Eljeles összeg Határozzuk meg $1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11 + \ldots + 2010$ pontos értékét!

Megoldás

Csoportosítsuk az összeget hármasával, hogy mindig középen legyen a negatív eljel szám! Mivel $(x-1)-x+(x+1) = x$, így a $\frac{2010}{3} = 670$ tagból álló

$$2 + 5 + 8 + \ldots + 2009$$

összeghez jutunk, amelynek értéke $\frac{2+2009}{2} \cdot 670 = 1\,347\,370$.

Heted és nyolcad Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenl legyen a másik szám nyolcadával!

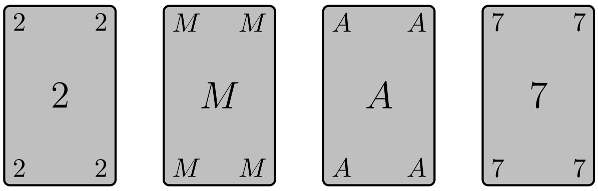
Megoldás

Ha az egyenl heted és nyolcad értéke x, akkor a két szám $7x$ és $8x$. Ezek összege 2010, tehát a két szám

$$\frac{7}{15}\cdot 2010 = 938, \qquad \text{és} \qquad \frac{8}{15}\cdot 2010 = 1072.$$

Logika

Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy bet van. Ez látható az asztalon:



Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenrizzük az állítás helyességét?

Megoldás

Az A és a 7-es kártyát kell megfordítani. Ha az A túloldalán nem 2010 osztója áll vagy ha a 7 túloldalán magánhangzó áll, akkor az cáfolja az állítást (hiszen a 7 nem osztója 2010-nek). A 2 (2010 osztója) illetve az M (nem magánhangzó) túloldalán bármi is van, az nem cáfolja az állítást.

Rejtélyes összeadás

Hányféleképpen lehet egymástól és 0-tól különböz számjegyeket írni az A, I, L, P betk helyére úgy, hogy teljesüljön az alábbi összeadás?

$$\begin{array}{cccc}
P & A & L & I \\
 & P & I & A \\
 & & A & L \\
+ & & & P \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Megoldás

Négyféleképpen. $P = 1$, $A = 7$ és $L + I = 12$, azaz

L	3	4	8	9
I	9	8	4	3

P értéke legfeljebb 2, de 2 nem lehet, mert a balról második oszlopban a 0 csak úgy adódhat összeg utolsó jegyeként, ha átvitel is van, tehát nem nulla az összeg, hanem 10 vagy 20.

Tehát $P = 1$. Tekintsük a balról második oszlopot és vegyük sorra A lehetséges értékeit! Ha $A = 9$, akkor a balról harmadik oszlopból nem szabad átvinni , tehát az összeg itt 1, de az nem lehet, mert a tagok közt van A is. Ha $A = 8$, akkor a balról harmadik oszlopban az összeg eredménye 11 kell legyen, de a tagok között van a $A = 8$ is és a jobb széls oszlopban van átmenet, tehát $L + I = 1$ vagy 0 lenne, de egyik sem lehetséges. Az $A < 7$ eseteket nem érdemes vizsgálni, mert hármat a balól harmadik oszlopból nem lehet áthozni még úgy sem, ha segít a negyedik oszlop.

Marad az $A = 7$ eset.

$$\begin{array}{cccc}
1 & 7 & L & I \\
 & 1 & I & 7 \\
 & & 7 & L \\
+ & & & 1 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Most a harmadik és negyedik oszlopban: $LI + IA + AL + P = 210$, azaz $P + 11\cdot(L + I + A) = 210$, amibl $L + I = 12$. A megmaradt betkbl erre a korábban megadott négy lehetség van, amelyek mindegyike jó.

Ha 2-es, akkor 0-s is

Egy papíron négyjegy pozitív egész számok vannak felírva. Azt vettük észre, hogy a felírt számok közül azokban, amelyekben van kettes számjegy van nullás számjegy is.

a) A 2010, 1526, 1000, 1999 számok közül melyik lehet felírva?
b) Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

Megoldás

Ehhez a feladathoz túlzásnak tnhet, de hasonló példák elemzésekor feltétlenül hasznos az alábbi típusú táblázat. A táblázat egyes mezibe azon négyjegy számok számát írjuk, amelyek rendelkeznek a mez oszlopának és sorának fejlécében olvasható tulajdonsággal. Az „Összesen” rovatokba pedig a megfelel sorokban, illetve oszlopokban található számok összegét kell beírni.

A kitöltetlen táblázat

4-jegy számok	Van benne 0	Nincs benne 0	Összesen
Van benne 2			
Nincs benne 2			
Összesen			9000

A táblázat részleges kitöltése

4-jegy számok	Van benne 0	Nincs benne 0	Összesen
Van benne 2		$9^4 - 8^4$	
Nincs benne 2		8^4	
Összesen		9^4	9000

A papíron csak olyan számok nem lehetnek, amelyekben van 2-es, de nincs 0-s. Ezek számát a „Nincs benne 0” oszlopban alulról felfelé haladva határozhatjuk meg (jobb oldali táblázat). A feladat kérdésére a válasz: legfeljebb $9 \cdot 10^3 - 9^3 + 8^3 = 8783$ szám lehet a papíron.

Megjegyzés

Pataki János hívta fel rá a figyelmemet, hogy ez a táblázatos eljárás áttekinthetbb a hasonló feladatokban használt Venn diagrammos módszernél.

2010 **mint szám vége** Végzdhet-e
a) négyzetszám, **b)** faktoriális, **c)** tizenhárommal osztható szám
2010-re?

Megoldás

a) I. megoldása A 2010 zérusra végzdik. Szám négyzetének utolsó jegye a szám utolsó jegye négyzetének utolsó jegye. A számjegyek és négyzetük végzdése:

a számjegy:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
négyzetének vége:	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Látható, hogy csak a 0-ra végzd számok négyzete végzdik 0-ra. Ezek négyzete azonban mindig két 0-ra végzdik (osztható 100-zal), így 2010-re nem végzdik négyzetszám.

a) II. megoldása A 2010 páros, így ha $2010 = n^2$, ahol n egész, akkor n is páros: $n = 2k$. Ekkor $n^2 = 4k^2$ osztható néggyel, de 2010-re végzd szám nem osztható néggyel. Tehát négyzetszám nem végzdik 2010-re.

b) I. megoldása A 2010 zérusra végzdik. Az els néhány faktoriális:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Az eddig felsorolt faktoriálisok között nincs 2010-re végzd. A 10! és a 10-nél nagyobb számok faktoriálisai már legalább két 0-ra végzdnek, tehát nincs 2010-re végzd faktoriális.

b) II. megoldása A 2010 nem osztható néggyel. A 4! és a négynél nagyobb számok faktoriálisai mind oszthatók néggyel. Az 1!, 2!, 3! számok egyjegyek, nincs olyan faktoriális, ami 2010-re végzdik.

c) I. megoldása Tekintsük a szorzási algoritmust! Nézzük meg, hogy az $a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ szám 13-szorosa végzdhet-e 2010-re. A szorzást úgy végezzük el, hogy az a szám 3-szorosát, a $3a = b = \dots b_3 b_2 b_1 b_0$ számot egy helyiértékkel jobbra csúsztatva a alá írjuk:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 1 & 3 \\ + & \dots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ \hline & \dots & 2 & 0 & 1 & 0 & & \end{array}$$

A b_0 jegy zérus, ez az a_0 háromszorosának utolsó jegye, tehát $a_0 = 0$.
Így $b_1 = 1$. Az egyetlen számjegy, amelynek háromszorosa 1-esre végzdik a 7, így $a_1 = 7$.
Így $b_2 = 3$. Ez a szám az elz oszlopból áthozott 2-nek ($3 \cdot 7 = \underline{2}1$ volt) és az a_2 számjegy háromszorosa utolsó jegyének összege, tehát ez a háromszoros 1-re végzdik. Az elzhöz hasonlóan $a_2 = 7$.
Így $b_3 = 4$. Ez a szám az elz oszlopból áthozott 2-nek és az a_3 számjegy háromszorosa utolsó jegyének összege, tehát ez a háromszoros 2-re végzdik. Az egyetlen számjegy, amelynek háromszorosa 2-esre végzdik a 4, így $a_3 = 4$. Ez így már meg is felel:

$$\begin{array}{cccccccc} & 4 & 7 & 7 & 0 & \cdot & 1 & 3 \\ + & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & & \\ \hline & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & & \end{array}$$

Van 13-nak olyan többszöröse, amely 2010-re végzdik. A legkisebb ilyen többszörös a 4770-szeres, azaz a 62010.

c) II. megoldása

A 2010 vég számok általános alakja $c_k = k \cdot 10000 + 2010$, ahol $k \in \mathbb{N}$. Nézzük ennek a számnak a 13-as maradékát! $10000 = 13 \cdot 769 + 3$, $2010 = 13 \cdot 154 + 8$., így c_k pontosan akkor osztható 13-mal, ha a $c'_k = 3k + 8$ szám osztható 13-mal. A c'_k sorozat elemei:

k	0	1	2	3	4	5	6
c'_k	8	11	14	17	20	23	26

Látható, hogy $c'_6 = 26$ osztható 13-mal, tehát a $c_6 = 62010$ szám is osztható 13-mal.

Problémák

1. A 13 mely többszörösei végzdnek 2010-re?

2. Határozzuk meg az összes olyan 2010-re végzd számot, amely osztható 13-mal!

3. Határozzuk meg az összes olyan természetes számot, amelynek van 2010-re végzd többszöröse!

Eljelezés 2010-**ig**

Megválaszthatók-e úgy az eljelek, hogy teljesüljön az

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \ldots \pm 2009 \pm 2010 = 2010$$

összefüggés?

Megoldás

Nem. Az $1+2+3+\ldots+2010 = \frac{2010 \cdot 2011}{2}$ összeg értéke páratlan és az eljelek változtatása nem módosít a paritáson.

Megjegyzés

Jól áttekinthet, érdemes feladni a diákoknak, hogy mely $n \in \mathbb{N}$-re választhatók meg az eljelek, hogy teljesüljön az

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \ldots \pm (n-1) \pm n = n$$

összefüggés.

Segítséget is jelenthet a diákoknak az eredeti feladatban, ha ajánljuk nekik, hogy oldják meg ezt az általános verziót $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10$ értékekre.

2010 szomszédos négyzetekként

Eláll-e 2010 öt szomszédos négyzetszám összegeként?

Megoldás: Igen.

Legyen az öt közül a középs szám gyöke x, tehát a számok összege:

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5x^2 + 10.$$

Ez $x = 20$ esetén épp 2010, azaz $18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 = 2010$.

2010 négyzetszámok különbsége?

Eláll-e 2010 két négyzetszám különbségeként?

I. megoldás

Nem. Nevezetes, hogy $x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y)$. A jobb oldali szorzat két tényezje azonos paritású (összegük $2x$, tehát páros), így szorzatuk vagy páratlan, vagy osztható néggyel, míg 2010 olyan páros szám, amely nem osztható néggyel.

II. megoldás Négyzetszám négyes maradéka 0 vagy 1. Ezt alább belátjuk, most egy pillanatra fogadjuk el. Ha így van, akkor két négyzetszám különbségének négyes maradéka 0, 1, vagy 3. De 2010 négyes maradéka 2, így nincs megoldás.

A számok négyes maradéka 0, 1, 2, vagy 3. Ennek megfelelen minden szám az alábbi négy alak egyikeként írható fel, ahol k egész számot jelöl:

$$4k, \qquad 4k+1, \qquad 4k+2, \qquad 4k+3.$$

Ezek négyzete:

$$16k^2 = 4 \cdot (4k^2), \qquad 16k^2+8k+1 = 4 \cdot (4k^2+2k)+1, \qquad 16k^2+16k+4 = 4 \cdot (4k^2+4k+1), \qquad 16k^2+24k+9 = 4 \cdot (4k^2+6k+2)+1.$$

A képletekbl leolvasható a számok négyes maradéka:

$$0, \qquad 1, \qquad 0, \qquad 1.$$

Látható, hogy két négyzetszám különbségének négyes maradéka nem lehet 2, tehát nincs megoldás.

2010 **egyenes a síkon**

Legalább hány pont esetén fordulhat az el, hogy ha behúzzuk mindegyik kett összeköt egyenesét, akkor összesen épp 2010 egyenest kapunk?

Megoldás

n általános helyzet pont esetén az egyenesek száma $\frac{n(n-1)}{2}$. Ez $n = 63$-ra még csak 1953, míg $n = 64$-re 2016. Ha három pont egy egyenesre kerül, akkor a köztük futó három egyenes egybeesik, az egyenesek száma kettvel csökken. Ha a 64 pont között három-három-három egy egyenesen van, de egyébként a pontrendszer általános helyzet, akkor az egyenesek száma épp $2016 - 3 \cdot 2 = 2010$. Tehát 64 pont esetén lehet az egyenesek száma 2010, kevesebb pont esetén nem lehet.

Sakktábla lefedés dominókkal

a) Egy sakktábla két sarkát levágtuk. Lefedhet-e a megmaradt 62 mez 31 db 2×1-es dominólappal?

b) Egy sakktábla egyik sarkát levágtuk. Lefedhet-e a megmaradt 63 mez 21 db 3×1-es dominólappal?

c) Mely n-re fedhet le a 2010×2010-es sakktábla $n \times 1$-es dominólapokkal? Döntsük el a kérdést minden $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ számra!

Segítség

a) Kétféleképpen vághatunk le két sarkot: két szomszédos saroknál, vagy két átellenesnél. Mutassuk meg, hogy az egyiknél lehetséges a lefedés. A másiknál használjuk a tábla színezését annak indoklásához, hogy nem lehetséges a lefedés!

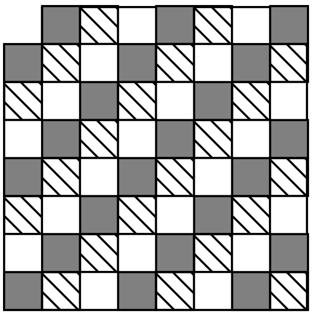
b) Készítsünk jó színezést! Olyat, amelynél minden dominó egyformán takar!

Megoldás

a) Ha szomszédos sarkokat vágunk, akkor pl az azokat összeköt oldaléllel párhuzamos állású dominók le tudják fedni a maradék táblát.

Az ellentétes sarkok azonos színek, pl feketék. Így 30 fekete és 32 fehér mez marad. Egy dominó egy-egy fehér és fekete mezt tud lefedni, így nem tudják az összes mezt lefedni.

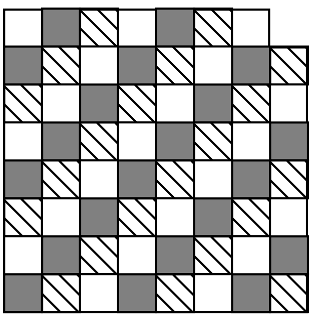
b) Vágjuk le pl a bal fels sarkot. „Színezzük" a tábla mezi háromféleképpen! Az alábbi ábrán 22 szürke mez, 21 csíkos és 20 fehér látható. Látható, hogy bármely dominó mindegyik „színbl" egyet-egyet-egyet fed le. Ezért a tábla nem fedhet le 1×3-as dominókkal hézagmentesen és átfedés nélkül.



c) eredménye: $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ esetén lehetséges a lefedés, a megadott halmazból a többi n-re nem. A konstrukciók a megadott esetekbe negyszerek, a többi eset kizárása a b)-ben leírt gondolatmenethez hasonló.

Dr. Kekec megjegyzése

Ha a b) feladatban (lásd a fenti megoldáshoz tartozó színezést) nem a bal fels, hanem a jobb fels sarkot vágjuk le, akkor lefedhet a sakktábla 3×1-es dominókkal. Nézzük ugyanis a színezést:



Most mindegyik színbl 21 van, tehát elvégezhet a lefedés.

Nos? Jogos-e Dr. Kekec megjegyzése? Igaz-e az állítása?

„Kis" osztójáték

Ketten felváltva mondják a varázsszám pozitív osztóit. Már kimondott osztót egyik játékos sem említheti újra. Az veszt, aki kimondja a varázsszámot. Kinek kedvez a játék, Kezdnek vagy Másodiknak, ha a varázsszám

a) 9, **b)** 10, **c)** 16, **d)** 24, **e)** 36, **f)** 2010?

Megoldás

Akkor kedvez Kezdnek a játék, ha a varázsszámnak páros sok osztója van, és akkor Másodiknak, ha az osztók száma páratlan. Így az a), c), e) esetekben Másodiknak, míg a többiben Kezdnek kedvez a játék.

2010 **osztói**

a) Hány (pozitív) osztója van 2010-nek?
Ezek között hány
b) páros **c)** négyzetszám
van?

Megoldás

a) $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, így az osztók száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
b) 8. **c)** Egy sincs.

2010 **osztói – antilánc**

2010 osztói közül maximum hány választható ki úgy, hogy a kiválasztottak között egyik se legyen a másik többszöröse?

Megoldás

$\binom{4}{2} = 6$ db, a két prím szorzatából álló osztók. Ennél több nem lehet, az alábbi hat osztólánc tartalmazza az összes osztót:

$$(1, 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 67, 2010), \qquad (1, 2, 2 \cdot 5, 2 \cdot 5 \cdot 3, 2010), \qquad (1, 3, 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 67, 2010)$$
$$(1, 5, 5 \cdot 67, 2 \cdot 5 \cdot 67, 2010), \qquad (1, 67, 2 \cdot 67, 2 \cdot 5 \cdot 67, 2010), \qquad (1, 67, 3 \cdot 67, 3 \cdot 5 \cdot 67, 2010).$$

Megjegyzés

Általában, az n elem halmaznak legfeljebb hány részhalmazát lehet úgy kiválasztani, hogy a kiválasztottak között egyik se legyen a másik részhalmaza?

Osztójáték

Ketten felváltva mondják a varázsszám pozitív osztóit. Már kimondott osztó osztóját egyik játékos sem említheti újra. Az veszt, aki kimondja a varázsszámot. Kinek kedvez a játék, Kezdnek vagy Másodiknak, ha a varázsszám

a) 10, **b)** 16, **c)** 24, **d)** 36, **e)** 30, **f)** 2010?

Megoldás

Lásd Varga Tamás írását az „Él Matematika" cím kötetben, amelynek III. kiadását a Tankönyvkiadó 1975-ben jelentette meg, ISBN 963 17 1047 5). Lásd még az alábbi weboldalt:
http://matek.fazekas.hu/portal/szakkorok/2003/07spec/7evf_int_06_2003_szakkor.htm

2010 **osztóhálója a síkon**

Megfeleltethetk-e 2010 osztóinak pontok a síkon úgy, hogy különböz osztóknak különböz pontok feleljenek meg és az a, b, c, d különböz osztóknak megfeleltetett A, B, C, D pontokra akkor és csakis akkor teljesüljön az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ összefüggés, ha $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$?

Eredmény

Igen. A címlapon látható ábra szemléltet egy megoldást.

Az 1-nek megfeleltetünk egy tetszleges O pontot a síkon. A 2, 3, 5, 67 prímosztók mindegyikének megfeleltetünk egy vektort – $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_5}$, $\overrightarrow{p_{67}}$ –, amelynek egyik koordinátája (az ábrán a függleges) mind a négynél ugyanaz – $y_2 = y_3 = y_5 = y_{67}$–, míg a másik koordináták (az ábrán a vízszintes), x_2, x_3, x_5 és x_{67} rendelkeznek az alábbi három tulajdonsággal:

I. Páronként különböznek egymástól;

II. Kéttagú összegeik – azaz $2x_2$, $2x_3$, $2x_5$, $2x_{67}$, $(x_2 + x_3)$, $(x_2 + x_5)$, $(x_2 + x_{67})$, $(x_3 + x_5)$, $(x_3 + x_{67})$, $(x_5 + x_7)$ – is páronként különböznek egymástól;

III. Háromtagú összegeik, a triplákat kivéve – azaz $2x_2 + x_3$, $2x_2 + x_5$, $2x_2 + x_{67}$, $2x_3 + x_2$, $2x_3 + x_5$, $2x_3 + x_{67}$, $2x_5 + x_2$, $2x_5 + x_3$, $2x_5 + x_{67}$, $2x_{67} + x_2$, $2x_{67} + x_3$, $2x_{67} + x_5$, $(x_2 + x_3 + x_5)$, $(x_2 + x_3 + x_{67})$, $(x_2 + x_5 + x_{67})$, $(x_3 + x_5 + x_{67})$ – is páronként különböznek egymástól;

A mellékelt példában mindegyik y-koordináta 4, míg az x-koordináták (-5), (-3), 1, és 4, melyek rendelkeznek az I-III. tulajdonságokkal.

A 2010 bármely osztója a 2, 3, 5, 67 prímtényezkbl kapható (mindegyik legfeljebb egyszer van benne), a neki megfelel pontot az 1-nek megfelel O pont eltolásával kapjuk, ahol az eltolás vektora a számban szerepl prímek vektorainak összege.

A 16 osztónak 16 különböz pont felel meg. Az y-koordináták egyenlsége miatt két számnak megfelel pont csak akkor eshetne egybe, ha ugyanannyi prímtényezbl áll. Az x-koordináták választása miatt a prímeknek (I. tul.) illetve a két prímtényez szorzataként felírható számoknak (II. tul.) különböz pontok felelnek meg. A három prímtényez szorzataként felírható számok pontjai úgy kaphatók a 2010-nek megfelel pontból, hogy azt a prímek vektorainak ellentettjeivel toljuk el. Ezek különböz vektorok, így a kapott pontok is különbözk lesznek.

Tegyük fel, hogy az a, b, c, d osztókra teljesül a $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ összefüggés. Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ vektorok a $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_5}$, $\overrightarrow{p_{67}}$ vektorok közül bizonyosak összegeibl állnak, így különbségük – az $\overrightarrow{AB}$ vektor – is úgy írhatjuk fel, hogy ezen vektorok közül egyeseket összeadunk másokat kivonunk. Épp azokat a „prímvektorokat” vesszük pozitív eljellel, amelyek a $\frac{b}{a}$ tört tovább nem egyszersíthet alakjának számlálójában vannak és azokat negatívval, amelyek a nevezben vannak. Mivel épp így kapható a $\overrightarrow{CD}$ vektor is és a két tört egyenl, így a vektorok is egyenlk.

Tegyük most fel, hogy az A, B, C, D pontok úgy helyezkednek el, hogy teljesül az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ összefüggés, azaz

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

A bal és a jobb oldal tagjait is felírhatjuk a $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_5}$, $\overrightarrow{p_{67}}$ vektorok segítségével. Azt kell belátnunk, hogy a két oldalon ilyenkor ugyanazt a vektorkifejezést kapjuk. Átrendezéssel megszabadulhatunk a negatív eljelektl:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$$

és ha ugyanaz a „prímvektor” mindkét oldalon elfordul, akkor letörölhetjük. Ezért mindegyik „prímvektor” legfeljebb csak az egyik oldalon fordulhat el és ott is legfeljebb csak kétszer (két szám miatt). Az egyenlség csak akkor teljesülhet, ha a tagok száma a két oldalon egyenl. Emiatt négynél több tag nem is lehet az egyes oldalakon és négy-négy is csak akkor ha az egyik is a másik is egy kéttagú összeg duplája. Ekkor kettvel egyszersíthetünk és az eset kizárására alkalmazhatjuk a II. tulajdonságot. A három-három, a kett-kett és az egy-egy tag esetét rendre a III., II., I. tulajdonságok zárják ki. Ez azt jelenti, hogy minden vektor kiegyszersödik, tehát eredetileg is ugyanaz volt a vektorfelbontás, a két tört is egyenl.

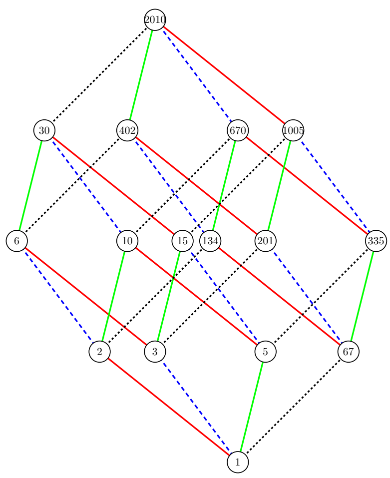
Probléma

Megfeleltethetk-e az alábbi számhalmazoknak pontok a síkon a feladatban említett szám- illetve pontnégyesekre elírt tulajdonsággal:

a) bármely pozitív egész osztói **b)** $\mathbb{N}^+$ **c)** $\mathbb{Q}^+$ **d)** $\mathbb{R}^+$?

2010 osztóhálója a térben Készítsük el 2010 osztóhálóját a térben! Pl. a Babylon épít golyói legyenek az osztók és kett akkor legyen összekötve rúddal, ha hányadosuk prím. Az azonos prímeknek megfelel rudak színe legyen egyforma és legyenek párhuzamosak is!

Megoldás Alább fénylépet láthatunk $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ osztóhálójáról, amelyet Kalló Bernát és Károlyi Gergely készített Babylon építbl.



2010 cm^3 térfogatú téglatestek

Hány olyan nem egybevágó 2010 cm^3 térfogatú téglatest van, amely mindegyik éle cm-ben egész hosszúságú?

I. megoldás

I. eset: van 1 cm-es él. Ilyenbl 8 van, mert a másik két él 2010 egy osztópárját alkotja.

II. eset: nincs 1 cm-es él. Ilyenbl 6 van, mert szükségképpen két él hossza prím, a harmadik él a kimaradt két prím szorzata. A négy prímbl kett hatféleképpen választható ki.

Tehát 14 ilyen téglatest van.

II. megoldás

I. eset: két 1 cm-es él van. A harmadik él a $\{2,3,5,67\}$ prímtényezk szorzata.

II. eset: pontosan egy 1 cm-es él van. A másik két él felbontása prímtényezkre:

$$\{\{2\},\{3,5,67\}\}, \qquad \{\{3\},\{2,5,67\}\}, \qquad \{\{5\},\{2,3,67\}\}, \qquad \{\{67\},\{2,3,5\}\},$$

vagy

$$\{\{2,3\},\{5,67\}\}, \qquad \{\{2,5\},\{3,67\}\}, \qquad \{\{2,67\},\{3,5\}\},$$

tehát 7 ilyen lehetség van.

III. eset: nincs 1 cm-es él. A három él felbontása prímtényezkre:

$$\{\{2\},\{3\},\{5,67\}\}, \qquad \{\{2\},\{5\},\{3,67\}\}, \qquad \{\{2\},\{67\},\{3,5\}\},$$

$$\{\{3\},\{5\},\{2,67\}\}, \qquad \{\{3\},\{67\},\{2,5\}\}, \qquad \{\{5\},\{67\},\{2,3\}\},$$

tehát 6 ilyen lehetség van.

Összesen tehát $1+7+6=14$ megfelel téglatest van.

Kérdés

Térbeli *mozgásokkal* – tehát síkra való tükrözés alkalmazása nélkül – biztosan egymásba vihet-e két téglatest, ha éleik páronként egyenlk? Pl van-e két olyan téglatest a térben, amelyek egy csúcsból kiinduló élei 1, 2 és 3 cm hosszúak és az egyik nem mozgatható a másikba?

Megjegyzés

Ugorjunk elre a „2010 sorbatevése oszthatósággal" feladat után részhez, a másodfajú Stirling számok definíciójához és a táblázathoz. Az egyik sorban (ott $n=3$, az els három szám ($k=1,2$ és 3-nál) 1, 7 és 6, épp mint a fenti II. megoldásban.

Probléma

A másodfajú Stirling számok táblázatát használva adjuk meg, hogy hány olyan téglatest van, amelynek oldalai *cm*-ben egész számok és térfogata $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310$ cm^3!

2010-ig a számok

Hány olyan szám van az 1, 2, ..., 2010 számok között, amely relatív prím a 2010-hez?

Segítség Könnyítsünk a feladaton! Határozzuk meg az $1, 2, \ldots, n$ számok közül n-hez relatív prím számok számát az alábbi esetekben: $n=6$, $n=30$, $n=180$. Általában ezt az értéket $\phi(n)$-nel jelöljük és a ϕ függvényt az Euler-féle ϕ függvénynek hívják.

I. megoldás (*Rejtett indukció*)

Azokat a számokat keressük, amelyek a 2, 3, 5, 67 számok egyikével sem oszthatók. Elször számoljuk össze azokat, amelyek a 2, 3, 5 egyikével sem oszthatók. 1-tl 30-ig nyolc ilyen szám van:

$$1, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad 23, \quad 29,$$

és minden további harmincasban ugyanennyi, összesen tehát $8\cdot67$. Ezekbl ki kell dobni azokat a számokat, amelyek 67-tel oszthatók, azaz az alábbiakat:

$$1\cdot67, \quad 7\cdot67, \quad 11\cdot67, \quad 13\cdot67, \quad 17\cdot67, \quad 19\cdot67, \quad 23\cdot67, \quad 29\cdot67.$$

A megoldások száma tehát $8\cdot66=528$.

II. megoldás (*Szita*)

Jelölje a $H=\{1,2,3,\ldots,2010\}$ alaphalmazban az n-nel ($n\in\{2,3,5,67\}$) osztható számok halmazát H_n. A $H\setminus H_2\cup H_3\cup H_5\cup H_{67}$ halmaz elemszámát keressük. Ezt kiszitáljuk:

$$|H\setminus H_2\cup H_3\cup H_5\cup H_{67}| = |H|-|H_2|-|H_3|-|H_5|-|H_{67}|+$$

$$+|H_2\cap H_3|+|H_2\cap H_5|+|H_2\cap H_{67}|+|H_3\cap H_5|+|H_3\cap H_{67}|+|H_5\cap H_{67}|-$$

$$-|H_2\cap H_3\cap H_5|-|H_2\cap H_3\cap H_{67}|-|H_2\cap H_5\cap H_{67}|-|H_3\cap H_5\cap H_{67}|+$$

$$+|H_2\cap H_3\cap H_5\cap H_{67}| =$$

$$= 2010 - \frac{2010}{2} - \frac{2010}{3} - \frac{2010}{5} - \frac{2010}{67} +$$
$$+ \frac{2010}{2 \cdot 3} + \frac{2010}{2 \cdot 5} + \frac{2010}{2 \cdot 67} + \frac{2010}{3 \cdot 5} + \frac{2010}{3 \cdot 67} + \frac{2010}{5 \cdot 67} -$$
$$- \frac{2010}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2010}{2 \cdot 3 \cdot 67} - \frac{2010}{2 \cdot 5 \cdot 67} - \frac{2010}{3 \cdot 5 \cdot 67} + \frac{2010}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67} =$$
$$= 2010 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{67}\right) =$$
$$= (2-1) \cdot (3-1) \cdot (5-1) \cdot (67-1) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 66 = 528.$$

Másodfokú polinom

a) Adjunk meg olyan másodfokú polinomot, amelynek gyökei 20 és 10.
b) Van-e olyan másodfokú polinom, amelynek gyökei 20 és 10 és a lineáris tag (x) együtthatója 2010?

Megoldás

a) I. megoldása
Az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomra vonatkozó Vieta-formulákból:

$$30 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad (3)$$

$$200 = x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (4)$$

Tehát pl $a = 1$ esetén $b = -30$ és $a = 200$, azaz a polinom: $x^2 - 30x + 200$. Ennek gyökei valóban 20 és 10.

a) II. megoldása A gyöktényezs alakból: $p(x) = a(x - 10)(x - 20)$, pl $a = 1$ esetén $x^2 - 30x + 200$.

b) I. megoldása
Az a)-ra adott I. megoldás (**??**) egyenletében most $b = 2010$, így $a = -\frac{2010}{30} = -67$. A (**??**) összefüggésbl $c = 200a = -13400$, tehát a polinom: $-67x^2 + 2010x - 13400$. Ennek gyökei valóban 20 és 10.

b) II. megoldása Az a)-ra adott II. megoldásban nem használtuk ki, hogy az a számmal megszorozhatjuk a polinomot. A (-30)-as együtthatóból szeretnénk 2010-et varázsolni. Ehhez csak (-67)-tel kell szoroznunk:

$$p(x) = 67(x - 10)(x - 20) = -67x^2 + 2010x - 13400.$$

2010 **kettes számrendszerben**

Állítsuk el 2010-et kettes számrendszerben, azaz

$$\sum_{k=0}^{m} n_k \cdot k! = n_m \cdot 2^m + n_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot \cdot 2^1 + n_1 \cdot \cdot 2^0 \qquad (5)$$

alakban, ahol m, n_0, n_1, $\ldots$, n_m egészek, m pozitív és $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \leq n_k \leq 1$.

I. megoldás (*Elölrl*)
A kett hatványai:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^k	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Választunk egy 1024-et, marad $2010 - 1024 = 986$. Ehhez választunk egy 512-t…

$$2010 = 11111011010_2 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

II. megoldás (*Hátulról*)
A legkisebb helyiértéktl kezdjük meghatározni a felírást. 2010 páros, így $2^0 = 1$-bl nem lehet benne. Ha ezt letöröljük a szám végérl, akkor a fele akkor a szám kettes számrendszerbeli alakját kapjuk meg. Így újra és újra 2-vel osztunk, a maradék lesz a kettes számrendszerbeli alak hátulról következ jegye és a hányadossal dolgozunk tovább (az alábbi táblázatban az új „osztandó" az elz osztás hányadosa:

osztandó	osztó	maradék
2010	2	0
1005	2	1
502	2	0
251	2	1
125	2	1
62	2	0
31	2	1
15	2	1
7	2	1
3	2	1
1	2	1

Tehát $2010 = 11111011010_2$

III. megoldás (*Ad hoc*)

$2048 = 2^{11}$ azaz $2047 = 11111111111_2$ (tizenegy darab 1-esbl álló szám). Mivel $2047 - 2010 = 37 = 32 + 4 + 1 = 100101_2$, így $2010 = 11111011010_2$.

Problémák

1. Miért létezik és egyértelm a (??) alakú felírás minden pozitív egész számra?

2. Nem egész számok kettes számrendszerbeli alakja hogy értelmezhet?

3. Létezik-e és egyértelm-e a (??) alakú felírás, ha a számjegyeket módosítjuk? Helyettesítsük pl a „$k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \leq n_k \leq 1$” részt ezzel: „$k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $n_k \in \{-1, +1\}$”, tehát a jegyek nem 0 és 1, hanem -1 és 1 lehetnek. Fel lehet-e így írni a 2010-et? Egyértelm-e a felírás?

2010 hetes oszthatósága számrendszerekben

A tízes számrendszerbeli 2010, tehát 2010_{10} nem osztható héttel.

a) Mutassuk meg, hogy ha a számrendszer alapszáma osztható héttel, akkor abban a számrendszerben a 2010 alakban leírt szám is osztható héttel.

b) Van -e olyan héttel nem osztható a alap, hogy a 2010_a szám osztható héttel?

c) Van -e olyan tizeneggyel nem osztható a alap, hogy a 2010_a szám osztható tizeneggyel?

Megoldás

a) Az a alapú számrendszerbeli 2010_a szám értéke

$$2 \cdot a^3 + a = a \cdot (2 \cdot a^2 + 1),$$

ami osztható a-val.

b) Nincs.

Ha 7 nem osztja a-t, akkor relatív prím hozzá, így $a \cdot (2 \cdot a^2 + 1)$ csak akkor osztható héttel, ha a $(2 \cdot a^2 + 1)$ kifejezés értéke osztható héttel. A négyzetszámok (lásd a^2) hetes maradékai: 0, 1, 2 és 4, ezek dupláinak (lásd $2a^2$) hetes maradékai 0, 2, 4 és 1, így az ennél eggyel nagyobb szám $(2 \cdot a^2 + 1)$ nem lehet osztható héttel.

c) A b) feladat megoldása szerint az kell, hogy $(2 \cdot a^2 + 1)$ osztható legyen tizeneggyel. Ez teljesül pl $a = 4$ esetén, ami tehát megfelel alap. Valóban, ekkor $2010_4 = 2 \cdot 64 + 1 \cdot 4 = 132 = 11 \cdot 12$.

$0.201020102010\ldots$

a) Melyik az a számrendszer, amelyben a 2222 és a $0,2010201020102010...$ számok szorzata egész szám?

b) Melyik számrendszerben teljesül a

$$2010 \cdot 0,2222222... = 2222 \cdot 0,201020102010...$$

összefüggés?

Megoldás

a) I. megoldása Ha a számrendszer alapszáma legalább 7, akkor

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & 0, & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \cdot & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & \ldots & & & & & \\
 & & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & \ldots & & & & & \\
 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & \ldots & & & & & \\
4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & \ldots & & & & & \\
\hline
4 & 4 & 6 & 6, & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

tehát a szám pontosan akkor egész, ha $1 = 0,6666\ldots$, azaz ha az alapszám 7.

Ötös számrenszerben az egyes szorzások jók, de $4+2+1=12_5$, így az összeg $1122,2222\ldots$, ami nem egész.
Négyes számrendszerben:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
 & & & 0, & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & & & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & \dots & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 3 & 3, & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & & & & &
\end{array}
$$

azaz az eredmény $11133,3333\ldots_4 = 11200_4 = 352_{10}$.
Míg hármas számrendszerben:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
 & & & 0, & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & \dots & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & & & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots & & & & & \\
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \dots & & & & & \\
\hline
2 & 0 & 0 & 2 & 2, & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & & & & &
\end{array}
$$

azaz az eredmény $20022,2222\ldots_3 = 20100_3 = 171_{10}$. Háromnál kisebb alap a 2-es jegy elfordulása miatt ne mjön szóba. Tehát a 3, 4, 7 alapú számrendszerek a megfelelek.

a) II. megoldása

Ha a számrendszer alapszáma $a>2$, akkor $x = 2222_a = 2a^3+2a^2+2a+2 = 2\frac{a^4-1}{a-1}$, míg ha

$$
\begin{aligned}
y &= 0, \quad 201020102010\ldots_a \\
a^4y &= 2010, \quad 201020102010\ldots_a
\end{aligned},
$$

akkor

$$(a^4-1)y = 2010_a,$$

azaz $y = \frac{2a^3+a}{a^4-1}$. A vizsgált szorzat:

$$xy = 2\frac{a^4-1}{a-1}\cdot\frac{2a^3+a}{a^4-1} = 2\frac{2a^3+a}{a-1}.$$

Mivel $2a^3+a = (a-1)(2a^2+2a+3)+3$, így

$$xy = 2(2a^2+2a+3)+\frac{6}{a-1},$$

ami pontosan akkor egész, ha $(a-1)$ a 6 osztója, azaz $a\in\{2,3,4,7\}$. Ezekbl a 2-nél nagyobb értékek a megfelelek.

b) Minden olyan alapnál egyenl a két kifejezés, ahol értelmesek, hiszen ez nem más, mint az

$$(2a^3+a)\cdot\frac{2}{a-1} = 2\frac{a^4-1}{a-1}\cdot\frac{2a^3+a}{a^4-1}$$

azonosság.

2010 **faktoriális számrendszerben**

Állítsuk el 2010-et faktoriális számrendszerben, azaz

$$\sum_{k=1}^{m} n_k\cdot k! = n_m\cdot m! + n_{m-1}\cdot(m-1)! + \ldots + n_3\cdot 3! + n_2\cdot 2! + n_1\cdot 1! \tag{6}$$

alakban, ahol m, n_1, n_2, $\ldots$, n_m egészek, m pozitív és $k\in\{0,1,\ldots,m\}$ esetén $0\le n_k\le k$.

I. megoldás (*Elölrl)*

A faktoriálisok:

k	1	2	3	4	5	6	7
$k!$	1	2	6	24	120	720	5040

A 7! már túl sok. Választunk két 6!-t, marad $2010-1440=570$. Ehhez választunk négy 5!-t…

$$2010 = 243300_! = 2\cdot 6! + 4\cdot 5! + 3\cdot 4! + 3\cdot 3! + 0\cdot 2! + 0\cdot 1!.$$

Érdemes elgondolkodni rajta, hogy miért egyértelm a megoldás.

II. megoldás (*Hátulról)* Az

$$1, \qquad 2, \qquad 3\cdot 2, \qquad 4\cdot 3\cdot 2, \qquad 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2, \qquad \ldots$$

helyiértékek közül az els kivételével mind osztható 2-vel, így a paritást az 1! „helyiérték" jegye dönti el. Mivel 2010 páros, így az 1!-os helyiérték jegye 0. Osszuk le a számot és a helyiértékeket is 2-vel! Most már az 1005-öt kell felbontanunk a

$$1, \qquad 3, \qquad 4\cdot 3, \qquad 5\cdot 4\cdot 3, \qquad \ldots$$

helyiértékekre. Ezek közül az els kivételével mindegyik osztható 3-mal...

osztandó	osztó	maradék
2010	2	0
1005	3	0
335	4	3
83	5	3
16	6	4
2	7	2

Tehát $2010 = 243300_!$

Megjegyzések

I. A faktoriális számrendszerben fel lehet tüntetni egy 0-adik helyiértéket, a $0! = 1$-nek megfelelt, azonban az ehhez tartozó jegy csak a 0 lehet, tehát kizárólag „díszitésnek" való ez a további helyiérték és kötelezen 0 számjegy.

II. A faktoriális számrendszer minden n pozitív egész esetén kölcsönösen egyértelm megfeleltetést ad az n elem összes permutációjából álló S_n halmaz és az $\mathbb{N}_{n!-1} = \{0, 1, 2, \ldots, n! - 1\}$ halmaz között. Ezt a megfeleltetést Lehmer leképezésnek nevezik, alább 2010 példáján mutatjuk be.

Példánkban $n = 7$. A hat jeggyel lekódolható legnagyobb szám a faktoriális számrendszerben a

$$6\cdot 6! + 5\cdot 5! + 4\cdot 4! + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! = 7! - 1,$$

tehát a

$$0_{10} = 000000_!, \qquad 1_{10} = 000001_!, \qquad \ldots \qquad 7! - 1 = 5039_{10} = 654321_!,$$

számok épp annyian vannak, mint a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számok permutációi.

A számokat faktoriális számrendszerben képzeljük el, míg a π permutációt a $[\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5), \pi(6)]$ alakban adjuk meg. Például a $[1, 0, 5, 4, 3, 2, 6]$ permutáció az alábbi értéktáblázattal megadott függvény:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\pi(k)$	1	0	5	4	3	2	6

A 2010_{10} szám faktoriális számrendszerbeli alakja $243300_!$. A hozzá tartozó permutáció megkereséséhez ennek kiolvasását balról kezdjük és jobbra haladunk. A szám legels jegye a 2, így a permutáció legels eleme is a 2 lesz.

$$243300_! \longrightarrow [2, ?, ?, ?, ?, ?, ?].$$

A megmaradt „faktoriális" szám a $43300_!$, a permutációban még ki nem osztott elemek a $\{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$. A szám balról els jegye a 4, az a megmaradt elemek listájában (mindent 0-tól számítunk) a növekedési sorban az 5-nek felel meg:

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, ?, ?, ?, ?, ?].$$

Most a $3300_!$ szám és a $\{0, 1, 3, 4, 6\}$ elemek maradtak meg. A következ lépésben:

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, ?, ?, ?, ?],$$

megmarad $300_!$ és $\{0, 1, 3, 6\}$, így

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, ?, ?, ?],$$

marad $00_!$ és $\{0, 1, 3\}$,

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, 0, ?, ?],$$

marad $0_!$ és $\{1, 3\}$,

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, 0, 1, ?],$$

marad semmi és $\{3\}$,

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, 0, 1, 3].$$

Határozzuk meg az $[1, 0, 5, 4, 3, 2, 6]$ permutációnak a Lehmer kód szerint megfelel szám faktoriális alakját!

Problémák

1. Miért létezik és egyértelm a (**??**) alakú felírás minden pozitív egész számra?

2. Nem egész számok faktoriális számrendszerbeli alakja hogy értelmezhet?

3. Mutassuk meg, hogy bármely permutáció Lehmer kódjában a jegyek összege megegyezik a legkevesebb elemi transzpozíció számával, amellyel a permutáció elállítható. Elemi transzpozíción szomszédos elemek cseréjét értjük.

2010 **faktoriális**

a) Melyik az a legnagyobb ketthatvány, amely osztja 2010!-t?

b) Hány 0-ra végzdik 2010!?

Megoldás

a) A páros számok száma 2010-ig $\left[\frac{2010}{2}\right] = 1005$, a néggyel oszthatóké $\left[\frac{2010}{4}\right] = 512$ stb. A „2010 kettes számrendszerben” feladat II. megoldásában már látott számokat kell összeadni:

$$1005 + 502 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2002.$$

Tehát a válasz: 2^{2002}.

b) A 2010!-t osztó legnagyobb öthatvány kitevje az 5-tel való osztási láncból kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} 2010 : 5 &= 402 \\ : 5 &= 80 \\ : 5 &= 16 \\ : 5 &= 3 \\ : 5 &= 0 \end{aligned}$$

Tehát a keresett kitev: $402 + 80 + 16 + 3 = 501$. A 2010! szám 501 db 0-ra végzdik.

Megjegyzés

Nem nyilvánvaló, de ügyesen kiszámolható, hogy a 0-k eltt milyen számjegy áll.

$\frac{1}{2010}$ **többeseinek egyiptomi tört alakja**

Az egyiptomiak törzstörtekkel (azaz 1 számlálójú törtekkel, tehát pozitív egészek reciprokaival) számoltak. Minden törtet törzstörtek összegeként írtak fel, st a felírásban az egyes tagok nevezi mindig egymástól különböz pozitív egészek voltak.

a) A $\frac{2}{2010}$, $\frac{3}{2010}$, $\frac{4}{2010}$, $\frac{5}{2010}$, $\frac{6}{2010}$, $\frac{7}{2010}$, $\frac{8}{2010}$, $\frac{9}{2010}$, $\frac{10}{2010}$, $\frac{11}{2010}$, $\frac{12}{2010}$ törtek közül melyek nem egyszersíthetk törzstörté? Írjuk át azokat két (különböz nevezj) törzstört összegére!

b) Írjuk fel $\frac{14}{2010}$-et is két különböz pozitív egész szám reciprokának összegeként!

a) megoldása

$2010 = 2 \cdot 1005 = 3 \cdot 670 = 5 \cdot 402 = 6 \cdot 335 = 10 \cdot 201$, így a megadott törtek közül négy önmagában törzstört:

$$\frac{2}{2010} = \frac{1}{1005}, \qquad \frac{3}{2010} = \frac{1}{670}, \qquad \frac{5}{2010} = \frac{1}{402}, \qquad \frac{6}{2010} = \frac{1}{335}, \qquad \frac{10}{2010} = \frac{1}{201}.$$

A többi összerakható ezekbl:

$$\frac{4}{2010} = \frac{3+1}{2010} = \frac{1}{670} + \frac{1}{2010}, \qquad \frac{7}{2010} = \frac{5+2}{2010} = \frac{1}{402} + \frac{1}{1005}, \qquad \frac{8}{2010} = \frac{6+2}{2010} = \frac{1}{335} + \frac{1}{1005},$$

$$\frac{9}{2010} = \frac{6+3}{2010} = \frac{1}{335} + \frac{1}{670}, \qquad \frac{11}{2010} = \frac{6+5}{2010} = \frac{1}{335} + \frac{1}{402}, \qquad \frac{12}{2010} = \frac{10+2}{2010} = \frac{1}{201} + \frac{1}{1005}.$$

b) I. megoldása

A $\frac{14}{2010} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ egyenletbl $7ab = 1005(a + b)$, amibl

$$49ab - 7 \cdot 1005(a + b) = 0,$$

azaz

$$(7a - 1005)(7b - 1005) = 1005^2.$$

Az $x = 7a - 1005$, $y = 7b - 1005$ számok (-1005)-nél nagyobbak, azonos eljelek és szorzatuk 1005^2, így mindketten pozitívak. Az $a = \frac{x+1005}{7}$, $b = \frac{y+1005}{7}$ számok is egészek és $1005 = 7 \cdot 91 + 4$, így olyan x, y pozitív egészeket keresünk, amelyekre

$$xy = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2, \qquad \text{és} \qquad x \equiv y \equiv 3 \pmod 7.$$

Pl $x = 3$, $y = 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2$ megfelel, amibl

$$\frac{14}{2010} = \frac{1}{2010 \cdot 24} + \frac{1}{6 \cdot 24} = \frac{1}{48240} + \frac{1}{144}.$$

b) II. megoldása

A keresett

$$\frac{14}{2010} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{7}$$

alakban legyen

$$a = 2010 \cdot \frac{x}{y}, \tag{8}$$

ahol x és y egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Egyenletünkbl

$$b = 2010 \cdot \frac{x}{14x - y}. \tag{9}$$

Mivel x és y relatív prímek, így $(14x - y)$ és x is relatív prímek. Az a és b számok tehát pontosan akkor egészek, ha

$$y|2010, \qquad \text{és} \qquad (14x - y)|2010. \tag{10}$$

Tehát 2010 két olyan pozitív osztóját (y-t és $14x - y$-t) keressük, amelyek összege osztható 14-gyel (t.i. $14x$). Van két ilyen osztó, pl az 1 és az $67 \cdot 5 = 335$. Ezekkel $y = 1$ és $x = \frac{336}{14} = 24$, azaz

$$\frac{14}{2010} = \frac{1}{2010 \cdot 24} + \frac{335}{2010 \cdot 24} = \frac{1}{48240} + \frac{1}{144}.$$

Megjegyzés

Két kérdés is felmerül.

I. Ha egy valódi tört nem törzstört, akkor mindig felírható két törzstört összegeként?

II. Lehetséges-e, hogy egy törtnek két különböz felbontása is van két törzstört összegére?

Az I. kérdésre a válasz: „nem”. A $\frac{3}{7}$ pl. nem írható fel két törzstört összegeként. Könnyen igazolható viszont, hogy a törzstörtek duplái vagy maguk is törzstörtek vagy felírhatók két törzstört összegeként. Ez az egyiptomi számoláshoz nagy segítséget jelentett, mert az írnokok a sokszorozást duplázások és összeadások segítségével végezték. Részletesebben lásd pl.Sain Márton „Nincs királyi út” cím könyvének (Gondolat Kiadó, 1986) Ókor/Ó-egyiptomi számírás cím fejezetét, amely a weben is elérhet: http://mek.oszk.hu/05000/05052/.

A II. kérdésre vizsgált példánk is választ ad. A $\frac{14}{2010}$ törtnek van még egy – és csak egy – megfelel felbontása:

$$\frac{14}{2010} = \frac{1}{150} + \frac{1}{3350}.$$

Az els megoldásban az

$$x = 3^2 \cdot 5 = 45 \equiv 3 \pmod{14}, \qquad y = 5 \cdot 67^2 = 22445 \equiv 3 \pmod{14}$$

számpár, a másodikban a 3, 67 osztók – összegük $70 = 5 \cdot 14$ – is megfelel, ezek vezetnek a most bemutatott megoldáshoz.

A $\frac{4}{2010} = \frac{2}{1005}$ törtnek tizenhárom egymástól eltér felbontása is van két különböz törzstört összegére.

Feladat Keressük meg a $\frac{2}{15}$ tört két különböz törzstört összegére való négy felbontását!

2010 **négyzetszámok összege**

Állítsuk el 2010-et minél kevesebb négyzetszám összegeként!

Megoldás

A négyzetszámok 3-as maradéka 0 vagy 1, míg 2010-nek a 3-as maradéka 0. Ha egy négyzetszám 3-as maradéka 0, akkor az a négyzetszám 9-cel is osztható. Ezért 2010 nem négyzetszám és két négyzetszám összegeként sem állítható el. Három négyzetszámból csak úgy állítható el, ha mind a három 1 maradékot ad 3-mal osztva.

A számok paritását is figyelembe véve (a 8-as maradék miatt két páratlan és egy páros szám kell) gyorsítható a keresés. Egy megoldás:

$$2010 = 16^2 + 23^2 + 35^2.$$

Megjegyzés

Két kérdés is felmerül.

I. Lehetséges-e, hogy egy egész szám kétféleképpen (többféleképpen) is felírható legkevesebb darab négyzetszám összegére?

II. Van-e olyan n pozitív egész korlát, hogy legfeljebb n négyzetszám összegére már minden pozitív egész felírható?

Az I. kérdésre a válasz: igen. Az alábbi táblázat tartalmazza a 2010 összes előállítását három négyzet összegére. Bármelyik oszlopban a három szám négyzetösszege 2010.

1	4	5	5	7	11	16	19
28	25	7	31	19	17	23	25
35	37	44	32	40	40	35	32

A II. kérdésre is igen a válasz. Bármely pozitív egész előáll legfeljebb négy négyzetszám összegeként.

2010 mint egymást követő egész számok összege

Hányféleképpen írható fel 2010 egymást követő egész számok összegeként? (A számok száma lehet egy is, a számok között lehetnek negatívak is.)

Megoldás Jelölje a számok számát d, az átlagukat a, tehát $2010 = d \cdot a$.

Ha d páratlan, akkor az átlag a középső szám, tehát egész. Az ilyen megoldások száma a 2010 páratlan osztóinak számával (d) egyezik meg.

Ha d páros, akkor a középső szám két egész között van. Ilyenkor $\frac{d}{2}$ egész és $2a$ páratlan szám és $2010 = \frac{d}{2} \cdot 2a$. Az ilyen megoldások száma a 2010 páratlan osztóinak számával ($2a$) egyezik meg.

A megoldások száma 2010 páratlan osztói számának duplája, azaz 16.

$$2010 = 2010 = (-2009) + (-2008) + \ldots + 2008 + 2009 + 2010.$$

$$2010 = 669 + 670 + 671 = (-668) + (-667) + \ldots + 669 + 670 + 671.$$

$$2010 = 400 + 401 + 402 + 403 + 404 + 405 = (-399) + (-398) + \ldots + 403 + 404 + 405. \ldots$$

2010 hatványok különbsége? Adjuk meg az $x^n - y^n = 2010$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol x, y és n természetes számok és n legalább 2!

Megoldás

b) Nincs megoldás. Elég n prím értékeivel foglalkozni, mert ha $n = ab$ összetett, akkor $x^n \pm y^n = (x^a)^b \pm (y^a)^b$, már a kisebb b kitevőre is megoldást ad.

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x-y)\cdot(x^2+xy+y^2) = (x-y)\left((x-y)^2+3xy\right), \\ x^5 - y^5 &= (x-y)\cdot(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) = (x-y)\left((x-y)^4+5xy(x^2-xy+y^2)\right). \end{aligned}$$

A 2010 osztható 3-mal és 5-tel is. Mivel $(x-y)$ és $(x-y)$ hatványai egyszerre oszthatók vagy nem oszthatók 3-mal és ugyanez igaz 5-re is, így a fenti azonosságok azt mutatják, hogy $n = 3$ és 5 esetén sincs megoldás.

A természetes számok hetedik hatványai: 0, 1, 128, 2187, 16384, ...

a tizenegyedik hatványok: 0, 1, 2048, 177147, 4194304, ...

E számok nagyságából látható, hogy ezekre és nagyobb kitevőkre sem lesz megoldás.

Problémák

1. Fent az alábbi állítást igazoltuk $p = 2$, 3 és 5 esetén:

Ha a p prímre és az x, y egész számokra $p|x^p - y^p$, akkor $p^2|x^p - y^p$.

Igazoljuk ezt az állítás minden p prímre!

2. Mutassuk meg, hogy az $x^n + y^n = 2010$ egyenletnek sincs olyan megoldása, amelyben x, y és n természetes számok és n legalább 2!

2010 sorbatevése oszthatósággal Hányféleképpen rakhatók sorba a

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2009, \quad 2010$$

számok úgy, hogy a sorban k-adik szám minden $k \in \{1, 2, 3, \quad \ldots \quad, 2008, 2009\}$ értékre osztható legyen k-val?

Eredmény: 75.

Megoldás: A 2010 nem kerülhet a 2010. helyre, mert olyan nincs. Így 2010 egy olyan kisebb sorszámú helyre, az x_1-re kerül, amelynek a többszöröse, azaz $x_1|2010$. Az x_1 számot 2010 „kilökte" a saját helyéről, ezért egy kisebb sorszámú x_2 helyre kerül, amelyre $x_2|x_1$. Ez az eljárás csak akkor áll meg, ha az éppen soron következ számot az 1. helyre raktuk, mert egyedül az 1-et nem kell beraknunk a sorba. Az eljárás eredményeként a 2010 osztóiból álló

$$2010 = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_s = 1 \tag{11}$$

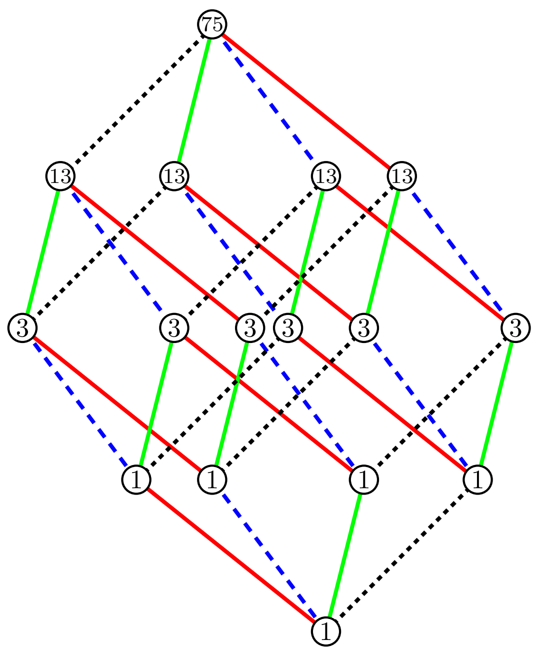
sorozathoz jutunk, amelynek tagjai osztási szempontból láncot alkotnak, azaz $x_{k+1}|x_k$, ha $0 \le k < s$. Az s pozitív egész nincs elre meghatározva. Pl az $s = 1$ eset annak felel meg, hogy a 2010 kerül a sor elejére.

A fent kapott (a 2010-tl induló) láncba nem tartozó k szám a sorban k-adik helyre kerül (marad). Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan a láncba nem tartozó szám, amely nem marad a helyén. Tekintsük ezek közül a legkisebbet. csak egy osztója helyére, tehát nála kisebb helyre kerülhet. A nála kisebb helyek mind foglaltak, mert a lánc tagjai egymás helyére illetve az 1. helyre kerülnek a többi szám pedig a foglalja a saját helyét. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

Feladatunk tehát abból áll, hogy összeszámoljuk a (**??**)-nek megfelel osztóláncokat. Erre két eljárást is adunk.

A láncok összeszámlálásának I. módszere

Ezt a Pascal háromszög képzési szabályához kissé hasonló módon az osztóháló (4-dim kocka) segítségével végezzük el. Az osztóháló csúcsaiba számokat írunk. Minden helyre beírjuk, hogy hány olyan lánc van, amelyben éppen oda kerül a 2010. Így legalulra, az 1-es osztó helyére, az 1 szám kerül. A felette lev helyekre, a prímek helyére is 1 kerül, mert ha pl a 2010 a 2 helyére kerül, akkor a 2-nek az 1 helyére, a lista 1. helyére kell mennie, nincs választási lehetség. Általában, ha a 2010 az osztóháló egy adott helyére kerül, akkor figyelembe kell venni, hogy az onnan kilökött szám hová mehet. Természetesen valamelyik osztójának helyére, tehát a hálóban alatta lev bármelyik helyre. Így a láncot annyiféleképpen folytathatjuk, amennyi az adott hely alatt a hálóban található helyekre már beírt számok összege. Tehát alulról haladva kitölthetjük hálót a variációs lehetségek számával és azt kell megnéznünk, hogy mi kerül legfölülre, a 2010 helyére.



Megjegyzés

Könnyítésnek érdemes a feladatot elbb kisebb (pontosabban egyszerbb osztóhálójú) számokkal – pl 8, 24, 30 – kitzni. A Pascal háromszögnek ez a módosított változata – nem csak a közvetlenül felette, illetve most alatta levket, hanem az összeset adjuk össze – is újdonság lehet. Egy egyszerbb feladat, amely erre a gondolatra vezet: Hányféleképpen mehet el a bástya a sakktábla jobb fels sarkából a bal alsóba, ha csak balra és lefelé – de ezekben az irányokban akármennyit – léphet?

Probléma

Legyen L_n az n-elem halmaz részhalmazaiból álló

$$\{\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

szigorúan monoton sorozatok száma. Írjuk le az L_n sorozatot!

Az els néhány elem:

n	0	1	2	3	4	5
L_n	1	1	3	13	75	541

Feladatunk úgy kapcsolódik ehhez a problémához, hogy a 2010 prímosztóiból álló négyelem halmaz részhalmazai megfelelnek a 2010 osztóinak. Ha ugyanis összeszorozzuk a részhalmazba tartozó elemeket, akkor egy osztóhoz jutunk, és fordítva, 2010 minden osztója a prímosztók egy részhalmazának szorzatából áll. Ha a kiindulási számban van prímtényez 1-nél magasabb kitevn, akkor már más a feladat és a probléma.

A fenti gondolatmenet alapján az L sorozatot meghatározza az $L_0 = 1$ kezdeleme és a rekurziós szabálya. Ezt a rekurziót végiggondolva a

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} L_k$$

képlethez jutunk.

Az L_n sorozat elemeit *rendezett Bell szám*oknak nevezik. Ugyanez a sorozat jön el az alábbi kérdés megválaszolásakor: „Hányféle sorrendben érkezhet be n versenyz a célba, ha holtverseny is megengedett?” Nem nehéz meggondolni, hogy ez a kérdés ekvivalens a problémával és $n = 4$ esetén kitzött feladatunkkal. Pl. ha a versenyzk 2, 3, 5 és 67 és befutások sorrendje:

1. helyezett	3
2. helyezett	2 és 67 holtversenyben
3. helyezett	5

megfelel a

$$\{\} \subset \{3\} \subset \{2,3,67\} \subset \{2,3,5,67\}, \qquad 1|3|2\cdot 3\cdot 67|2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 = 2010$$

részhalmazláncnak illetve osztóláncnak.

Indoklás nélkül közöljük az alábbi meglep formulát:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^k}.$$

Széleskören használtak a másodfajú Stirling számok: $S(n,k)$ azon esetek számát jelöli, ahányféleképpen egy n-elem halmazt fel lehet bontani k számú nem üres részhalmazra. Pl $S(3,2) = 3$, mert az $\{a,b,c\}$ három elembl álló halmaz felbontásai két részhalmazra: $(\{a\},\{b,c\})$, $(\{b\},\{c,a\})$, $(\{c\},\{a,b\})$.

A másodfajú Stirling számok a Pascal-háromszöghöz hasonló számháromszöget alkotnak, melynek képzési szabálya:

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	
$n=0$	1						$0!\cdot 1 = 1 = L_0$
$n=1$	0	1					$1!\cdot 1 = 1 = L_1$
$n=2$	0	1	1				$1!\cdot 1 + 2!\cdot 1 = 3 = L_2$
$n=3$	0	1	3	1			$1!\cdot 1 + 2!\cdot 3 + 3!\cdot 1 = 13 = L_3$
$n=4$	0	1	7	6	1		$1!\cdot 1 + 2!\cdot 7 + 3!\cdot 6 + 4!\cdot 1 = 75 = L_4$
$n=5$	0	1	15	25	10	1	$1!\cdot 1 + 2!\cdot 15 + 3!\cdot 25 + 4!\cdot 10 + 5!\cdot 1 = 541 = L_5$

A rendezett Bell számok egyszeren adódnak a másodfajú Stirling számokból:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} k!S(n,k),$$

amint az a táblázat melletti számításokon is nyomonkövethet.

A láncok összeszámlálásának II. módszere (*a másodfajú Stirling számok segítenek*)

A „kilökések” száma szerint gyjtsük össze a lehetségeket!

Ha egy kilökés volt, akkor a 2010 rögtön az 1 helyére ugrott. Az ilyen lehetségek száma 1.

Ha k kilökés volt, akkor mindegyik kilökés egy osztótól egy másikhoz, az elbbi egy osztójához vezetett. Mivel kell osztani, hogy a nagyobb osztótól a kisebbhez jussunk? Minden ilyen lépés a $H = \{2,3,5,67\}$ prímtényezk egy részhalmazát jelöli ki, a teljes lépéssorozat, a H halmaz egy k részre való partícióját, amelynél számít a sorrend. Tehát a k lépéses láncok száma épp $S(4,k)k!$, az összes lánc száma:

$$1!\cdot 1 + 2!\cdot 7 + 3!\cdot 6 + 4!\cdot 1 = 75.$$