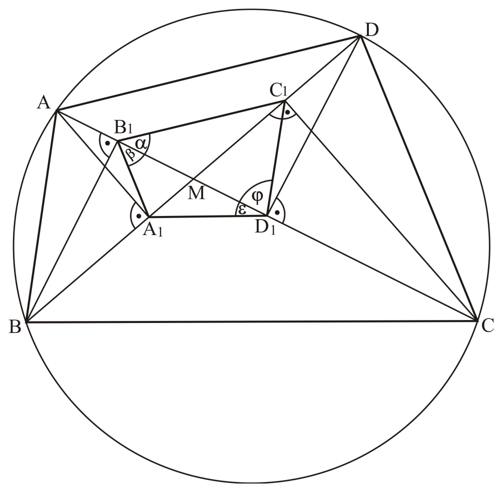
„Egy csodálatos egyenesről”
(A Simson-egyenes)

Bíró Bálint, Eger

1. feladat

Állítsunk merőlegeseket egy húrnégyszög csúcsaiból a csúcsokon át nem menő átlókra. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjai vagy egybeesnek, vagy egy húrnégyszög csúcsai!

Megoldás:



Ha a húrnégyszög átlói merőlegesek, akkor a talppontok nyilvánvalóan egybeesnek, ez a pont az *ABCD* négyszög átlóinak metszéspontja. Ha az átlók nem merőlegesek, akkor a talppontok az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög csúcsai.

A tételt úgy bizonyítjuk, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyszögben a B_1 és D_1 csúcsoknál szereplő szögeket megjelöljük (összesen négy szög) és igazoljuk, hogy a kérdéses szögek összege 180°.

Mivel BCC_1B_1 húrnégyszög, ezért a húrnégyszög köré írt körben $C_1BC\measuredangle = \alpha$, hiszen ezek a húrnégyszög köré írt körben azonos ívhez tartoznak.

Nyilvánvaló, hogy az $ABCD$ húrnégyszögben $DBC\measuredangle = \alpha$ és emiatt $DAC\measuredangle = \alpha$.

Láthatjuk, hogy $AB_1A_1\measuredangle = 180^\circ - \beta$, de, mivel ABA_1B_1 is húrnégyszög, így $ABA_1\measuredangle = \beta$ és így az $ABCD$ húrnégyszögben $ABD\measuredangle = ACD\measuredangle = \beta$.

Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy

$$AD_1A_1\measuredangle = ADA_1\measuredangle = ADB\measuredangle = ACB\measuredangle = \varepsilon \text{ és } C_1DC\measuredangle = BDC\measuredangle = BAC\measuredangle = \varphi .$$

Ezek alapján az $ABCD$ húrnégyszögben az A és C csúcsoknál keletkező két-két szög α és β, illetve ε és φ, így ezek összege az $ABCD$ húrnégyszög mivolta miatt nyilván 180°, ebből azonnal következik, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög szintén húrnégyszög.

Megjegyzések:

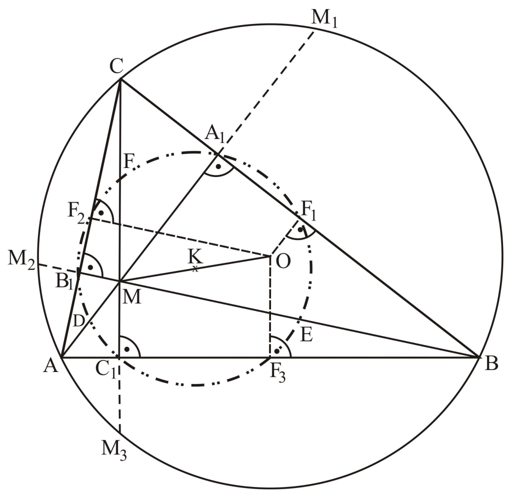
A tételt úgy is bizonyíthattuk volna, hogy húrnégyszögek segítségével belátjuk, hogy például az A_1B_1 szakasz az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög másik két csúcsából azonos szög alatt látszik.
A bizonyításból az is következik, hogy a megfelelő szögek egyenlősége miatt $BC \parallel A_1D_1$ és $DA \parallel C_1B_1$ továbbá, hogy $AB \parallel C_1D_1$ és $CD \parallel A_1B_1$. Látható az is, hogy az $ABCD$ és az $A_1B_1C_1D_1$ húrnégyszögek szögei rendre megegyeznek, mégpedig az $A;B;C;D$ csúcsoknál levő belső szögek egyenlők a nekik megfelelő $A_1;B_1;C_1;D_1$ csúcsoknál levő belső szögekkel.

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög körülírt körét az M magasságpontból $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyítjük, akkor a háromszög csúcsait az M magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjain, a magasságok talppontjai és az oldalfelező pontokon átmenő kört kapunk!

Megoldás:

Hivatkozunk több ismert geometriai tételre. Az egyik szerint (Geometriai Feladatgyűjtemény I.; 551. feladat), a háromszög körülírt körének középpontja feleakkora távolságra van egy oldaltól, mint a magasságpont az oldallal szemközti csúcstól. A másik tétel azt mondja ki, hogy az M magasságpontnak az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak (Geometriai Feladatgyűjtemény I., 1079. feladat). Végül a harmadik tétel miatt az M magasságpontnak az oldalfelező pontokra vonatkozó tükörképei is a háromszög köré írt körön vannak. (Geometriai Feladatgyűjtemény I., 1081. feladat)



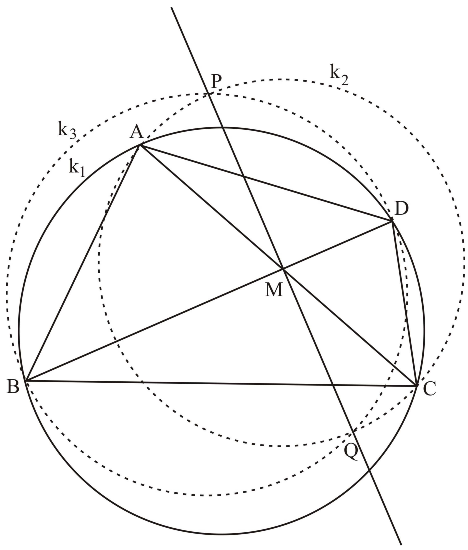
A hivatkozott tételek szerint az M magasságpontból $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyített kör kilenc ponton megy át, ezek a $D;E;F$, az $A_1;B_1;C_1$, végül az $F_1;F_2;F_3$ pontok.
Ismeretes, hogy a kapott kör az ABC háromszög Feuerbach-köre (Euler-köre).
A segédtétel közvetlen következménye, hogy a Feuerbach-kör sugara fele az ABC háromszög körülírt köre sugarának, továbbá az is nyilvánvaló, hogy a Feuerbach-kör középpontja az ABC háromszög körülírt köre O középpontját az M magasságponttal összekötő szakasz K felezőpontja.

3. feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt köre k_1. Az AC átló, mint átmérő fölé írt kör k_2, a BD átló, mint átmérő fölé írt kör k_3, továbbá a k_2 és k_3 körök metszéspontjai P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a PQ egyenes átmegy az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontján!

Megoldás:

A k_1 és k_2 körök metszéspontjai A és C, tehát a k_1 és k_2 körök hatványvonala az AC egyenes. Hasonlóképpen látható be, hogy a k_1 és k_3 körök hatványvonala a BD egyenes. Az AC és BD átlók M metszéspontjának mindhárom körre vonatkozó hatványa tehát egyenlő. Mivel a k_2 és k_3 körök közös pontjai P és Q, ezért a k_2 és k_3 hatványvonala a PQ egyenes. Ezen azok és csak azok a síkbeli pontok vannak rajta, amelyeknek a k_2 és k_3 körökre vonatkozó hatványa egyenlő, tehát az M pont valóban illeszkedik a PQ egyenesre.



4. feladat

Állítsunk merőlegeseket egy háromszög oldalegyeneseire a köré írt kör egy pontjából, és bizonyítsuk be, hogy a talppontok egy egyenesen vannak! (Simson-egyenes, Wallace-egyenes)

Megoldás:

A feladatban megfogalmazott tétel a Geometriai Feladat-gyűjtemény I. kötetének 1078. feladata. Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát.
Az állítás bizonyításához elegendő belátni, hogy az ábrán jelzett

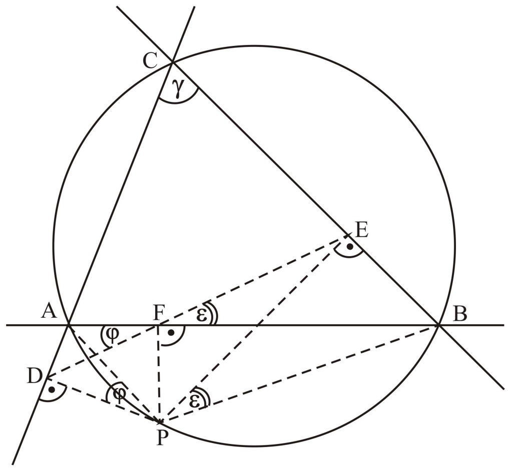
$$AFD\measuredangle = \varphi \text{ és } BFE\measuredangle = \varepsilon$$

szögekre $\varphi = \varepsilon$, hiszen a szögek egyik szárának egyenese közös (az AB szakasz egyenese) így, ha a két szög egyenlő nagyságú, akkor a másik két szögszár is egy egyenesre illeszkedik.
Mivel $ADPF$ húrnégyszög, ezért $AFD\measuredangle = APD\measuredangle = \varphi$, hasonlóképpen $BEFP$ is húrnégyszög, így $BFE\measuredangle = BPE\measuredangle = \varepsilon$.

Könnyen látható, hogy $CAPB$ és $CDPE$ szintén húrnégyszögek, amelyeknek a P ponttal szemben levő szöge mindkét esetben $ACB\measuredangle = \gamma$. Ebből az következik, hogy $DPE\measuredangle = APB\measuredangle = 180^\circ - \gamma$, innen azonnal adódik, hogy $\varphi = \varepsilon$.

A körülírt kör P pontjából az oldalegyenesekre bocsátott merőlegesek $D; F; E$ talppontjai tehát valóban egy egyenesen vannak.

Ha a P pont egybeesik az ABC háromszög valamelyik csúcsával, akkor a három talppont közül kettő a háromszög kérdéses csúcspontjával azonos, azaz ekkor csak két talppont keletkezik, de az állítás ekkor is nyilván teljesül.



5. feladat

Legyen P és Q az ABC háromszög köré írt kör két pontja. Bizonyítsuk be, hogy a P és Q pontokhoz tartozó Simson-egyenesek hajlásszöge a PQ ívhez tartozó kerületi szöggel egyenlő!

Megoldás:

Mivel BPT_3T_1 húrnégyszög, ezért

$$PBT_3\measuredangle = PT_1T_3\measuredangle = \mu ,$$

mert ezek a húrnégyszög köré írt körben azonos íven nyugvó kerületi szögek.

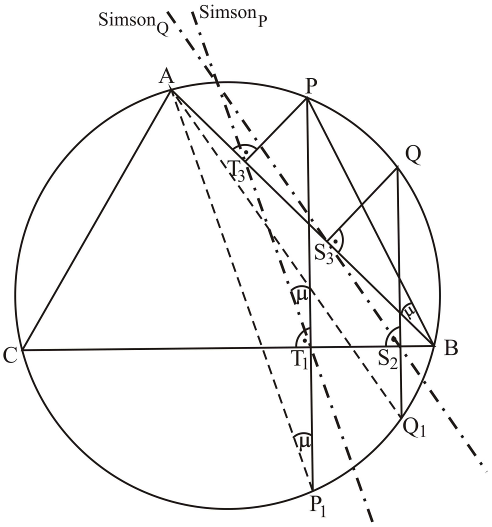
Ugyanakkor

$$PBT_3\measuredangle = PBA\measuredangle = \mu$$

is igaz, ezért az ABC köré írt körben

$$PBA\measuredangle = PP_1A\measuredangle = \mu$$

is teljesül. Ez éppen azt jelenti, hogy a P ponthoz tartozó
Simson-egyenes párhuzamos az AP_1 szakasszal.
Hasonlóképpen mutatható meg, hogy a Q ponthoz tartozó Simson-egyenes párhuzamos az AQ_1 szakasszal. A P és Q pontokhoz tartozó Simson-egyenesek hajlásszöge tehát éppen akkora, mint az ABC köré írt körben a P_1Q_1 ívhez tartozó kerületi szög, ez azonban az ívek hosszának egyenlősége miatt megegyezik a PQ ívhez tartozó kerületi szöggel.



6. feladat

Legyen P és Q az ABC háromszög köré írt kör két átellenes pontja. Bizonyítsuk be, hogy a P és Q pontokhoz tartozó Simson-egyenesek merőlegesek egymásra!

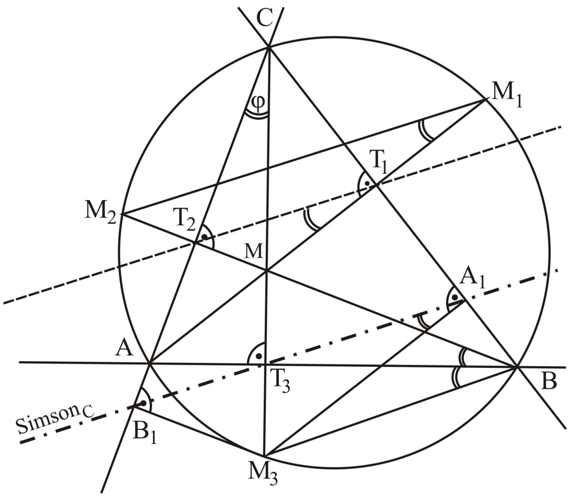
Megoldás:

az 5. feladat következménye, hiszen ha P és Q átellenes pontok egy háromszög köré írt körben, akkor a PQ ívhez tartozó kerületi szög 90°, így ekkora szöget zárnak be a kérdéses pontok Simson-egyenesei is.

7. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög magasságpontját tükrözzük az egyik oldalra, akkor a tükörképponthoz tartozó Simson-egyenes párhuzamos a másik két oldalon levő magasságtalppontokat összekötő egyenessel!

Megoldás:



Felhasználjuk a 2. feladatban már hivatkozott állítást, amely szerint az M magasság-pontnak az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak. Eszerint $M_1; M_2; M_3$ az ABC háromszög körülírt körének egy-egy pontja.

Az M_3-hoz tartozó Simson-egyenes átmegy a T_3 magasságtalpponton és az M_3-ból az AC és BC oldalakra bocsátott merőlegesek A_1 és B_1 talppontjain.

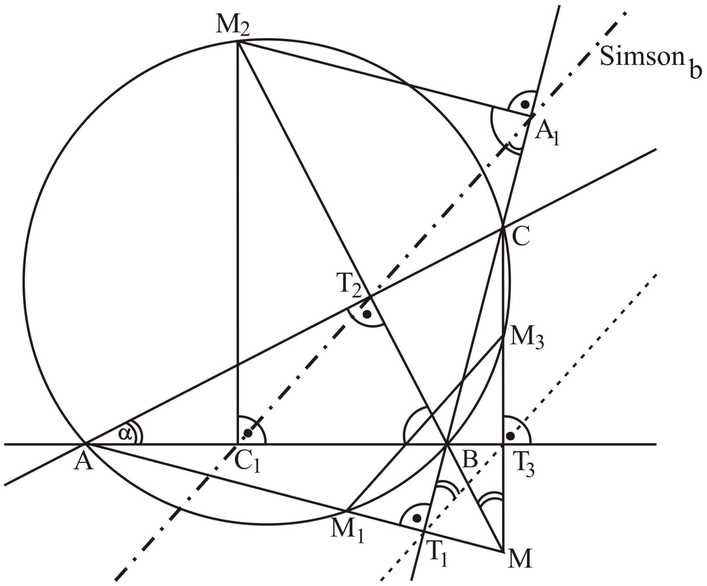
Legyen az ábra szerint $ACM_3\measuredangle = \varphi$, a szokásos jelölések szerint $\varphi = 90^\circ - \alpha$.

Mivel AM_3BC húrnégyszög, ezért a kerületi szögek tétele alapján $ABM_3\measuredangle = M_3BT\measuredangle = \varphi$. A hivatkozott tétel szerint a BMT_3 és BM_3T_3 derékszögű háromszögek egybevágók, így $M_3BT\measuredangle = \varphi$. Nyilvánvaló, hogy $MBT_3\measuredangle = M_2BA\measuredangle = \varphi$, ebből ismét a kerületi szögek tételét alkalmazva $AM_1M_2\measuredangle = \varphi$.

Az MM_1M_2 háromszögnek a T_1T_2 középvonala, ezért $M_1M_2 \parallel T_1T_2$, ebből adódik, hogy a T_1T_2 egyenese az AT_1 magasság egyenesével éppen φ szöget zár be.

Könnyen látható, hogy $M_3BA_1T_3$ húrnégyszög, ezért $M_3BT_3\measuredangle = M_3A_1T_3\measuredangle = \varphi$.

Eszerint az M_3 ponthoz tartozó Simson-egyenes az M_3A_1 szakasszal szintén φ szöget zár be.
Mivel M_3A_1 és AT_1 párhuzamosak (hiszen ugyanarra az oldalra merőlegesek) és páronként ugyanakkora szöget zárnak be velük az M_3 ponthoz tartozó Simson-egyenes, illetve a T_1T_2 egyenese, ezért az utóbbi két egyenes valóban párhuzamos.
Ezzel a feladat állítását hegyesszögű háromszögre bizonyítottuk.



A tétel tompaszögű háromszögre is igaz, ezt az esetet az ábrán szemléltetjük, a bizonyítás végrehajtását az olvasóra bízzuk.
Derékszögű háromszögre is teljesül az állítás, de mivel ott a magasságpont és a derékszögű csúcs (jelöljük ezt C -vel) azonos, a hegyesszögű csúcsokhoz tartozó $T_1;T_2$ magasság-talppontok a

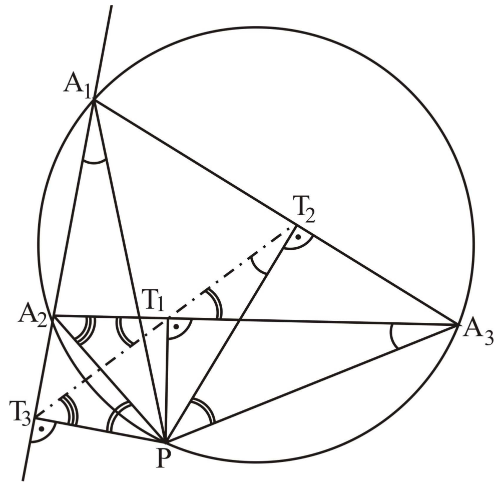
$C = M = M_1 = M_2$

pontba mennek át, így az M_3 ponthoz tartozó Simson-egyenes egy ponttá zsugorodott egyenessel „párhuzamos”, az M_1 ponthoz tartozó Simson-egyenes pedig egybeesik a T_2T_3 egyenesével.

8. feladat

Legyenek az $A_1A_2A_3$ háromszög köré írt kör P pontjához tartozó Simson-egyenesnek az $A_2A_3; A_3A_1$ és A_1A_2 oldalegyenesekkel képzett metszés-pontjai rendre $T_1; T_2; T_3$. Bizonyítsuk be, hogy a $PA_i \cdot PT_i$ szorzat állandó $(i = 1; 2; 3)$!

Megoldás:



Az ábrán látható $A_1A_2PA_3$, $A_2T_3PT_1$ és $PA_3T_2T_1$ húrnégyszögekben az azonosan jelölt szögek a kerületi szögek tétele miatt egyenlők. Ezért a megfelelő szögek egyenlősége miatt könnyen látható, hogy a PA_2A_3 és a PT_3T_2 háromszögek hasonlók, tehát ezekben a háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz

$$\frac{PT_2}{PT_3} = \frac{PA_3}{PA_2},$$

innen pedig

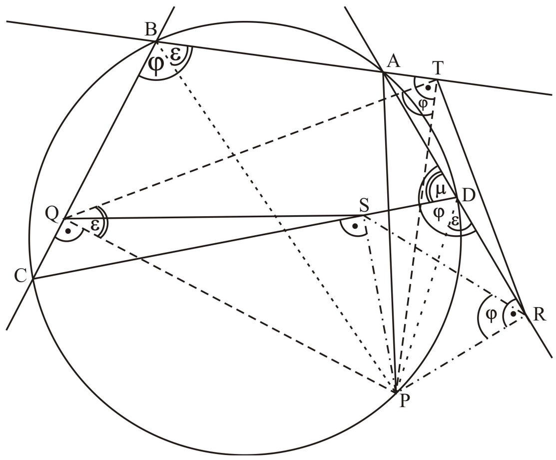
$$PA_2 \cdot PT_2 = PA_3 \cdot PT_3.$$

Az $i = 1$ esetre vonatkozó bizonyítás például annak észrevételén alapulhat, hogy a megfelelő szögek egyenlősége miatt a PA_1T_3 és PA_3T_1 derékszögű háromszögek is hasonlók, ebből $PA_1 \cdot PT_1 = PA_3 \cdot PT_3$ azonnal adódik.

9. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög köré írt kör bármely P pontjának a húrnégyszög két szemközti oldalától mért távolságainak szorzata egyenlő a másik két oldaltól mért távolságok szorzatával!

Megoldás:



A $PRDS$ négyszög húrnégyszög, ezért a kerületi szögek tétele miatt $PRS\measuredangle = PDS\measuredangle = \varphi$ amelyből $PDC\measuredangle = \varphi$ is következik.

Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt körben $PDC\measuredangle = PBC\measuredangle = \varphi$. Mivel $PTBQ$ is húrnégyszög, ezért $PBQ\measuredangle = PTQ\measuredangle = \varphi$. Ugyanebben a húrnégyszögben a $PQT\measuredangle = \varepsilon$ jelöléssel $PQT\measuredangle = PBT\measuredangle = \varepsilon$ is teljesül.

A feltétel szerint $ABCD$ húrnégyszög, ezért az $ADC\measuredangle = \mu$ jelölés alkalmazása után a B és D csúcsoknál levő belső szögek összegére $\varepsilon + \varphi + \mu = 180^\circ$, és így a D csúcsnál levő egyenesszöget alkotó harmadik szögre igaz, hogy $PDR\measuredangle = \varepsilon$.

Korábban láttuk már, hogy $PRDS$ húrnégyszög, ezért $PDR\measuredangle = PSR\measuredangle = \varepsilon$.

A 7. feladatban található ábrán szereplő PRS és PTQ háromszögekben tehát két-két szög páronként egyenlő, vagyis a két háromszög hasonló, így a megfelelő oldalak aránya egyenlő.

Eszerint $\dfrac{PS}{PR} = \dfrac{PQ}{PT}$, honnan $PS \cdot PT = PR \cdot PQ$ azonnal következik, ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Nyilvánvaló, hogy ha a P pont egybeesik az $ABCD$ húrnégyszög valamelyik csúcsával, akkor feladatbeli szorzat értéke zérus, de az egyenlőség ebben az esetben is fennáll.

Megjegyzés:

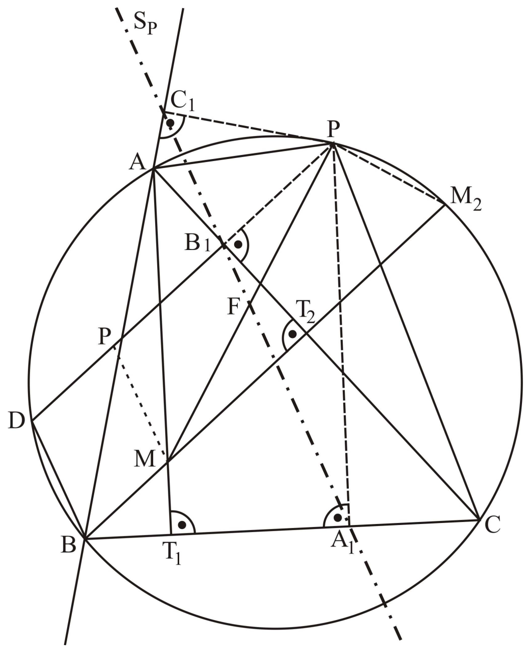
Az RT és SQ egyenesek a közös körülírt körrel rendelkező ABD és CDB háromszögek P ponthoz tartozó Simson-egyenesei.

10. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör bármely P pontját a magasságponttal összekötő szakaszt felezi a P ponthoz tartozó Simson-egyenes!

Megoldás:

Tükrözzük a P pontot a B_1 pontra, így kapjuk a P' pontot (a P' pont egyúttal az AC oldalra vonatkozó tükörkép is).
Ismét azt a tételt használjuk föl, amely szerint a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak. Eszerint az M pontnak az AC oldalra, és így a T_2 pontra vonatkozó tükörképe is M_2. Ez éppen azt jelenti, hogy a PM_2 szakasznak az AC oldalra vonatkozó tükörképe $P'M$. Mivel $PP' \parallel M_2M_2$, ezért az előzőek alapján $PP'MM_2$ egyenlő szárú trapéz.
Nyilvánvaló továbbá, hogy $PDBM_2$ is egyenlő szárú trapéz, ebből következik, hogy $P'M \parallel DB$.
A $BCPD$ és A_1CPB_1 húrnégyszögek, amelyeknek a P és C pontokhoz szögei egyenlők, így a két húrnégyszög B és A_1 pontokhoz tartozó szögei is egyenlők, eszerint BD párhuzamos az A_1B_1 szakasszal, vagyis A_1B_1 párhuzamos $P'M$ -mel.
Ez pontosan azt jelenti, hogy a $PP'M$ háromszög PP' oldalának B_1 felezőpontján áthaladó B_1F szakasz a háromszög középvonala, tehát a P ponthoz tartozó S_P Simson-egyenes valóban felezi a PM szakaszt. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.



11. feladat

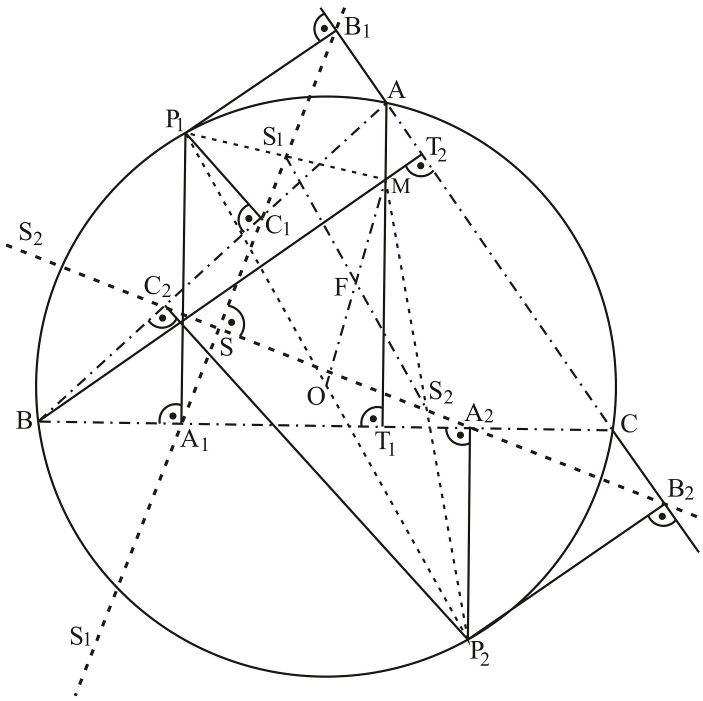
Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör változó átmérőinek végpontjaihoz tartozó Simson-egyenesek a Feuerbach-körön metszik egymást!

Megoldás:

Legyen az ABC háromszög köré írt kör egyik átmérője a P_1P_2 szakasz, a P_1 és P_2 pontokhoz tartozó Simson-egyenesek S_1 és S_2. Az S_1 és S_2 egyenesek a 6. feladat alapján derékszögben metszik egymást az S pontban.
A 10. feladat eredménye szerint az S_1 és S_2 pontok felezik a P_1M és P_2M szakaszokat.
Eszerint az S pontból az S_1S_2 szakasz derékszögben látszik, továbbá $P_1P_2 = 2 \cdot S_1S_2$.

Ezért az M pontból a P_1P_2 szakaszt $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyítve az S_1S_2 szakaszt kapjuk. Ez a 2. feladat szerint azt jelenti, hogy S_1S_2 az ABC háromszög Feuerbachkörének átmérője, és mivel ez szakasz az S pontból derékszögben látszik, ezért az S_1 és S_2 Simson-egyenesek S metszéspontja valóban rajta van az ABC háromszög Feuerbach-körén.

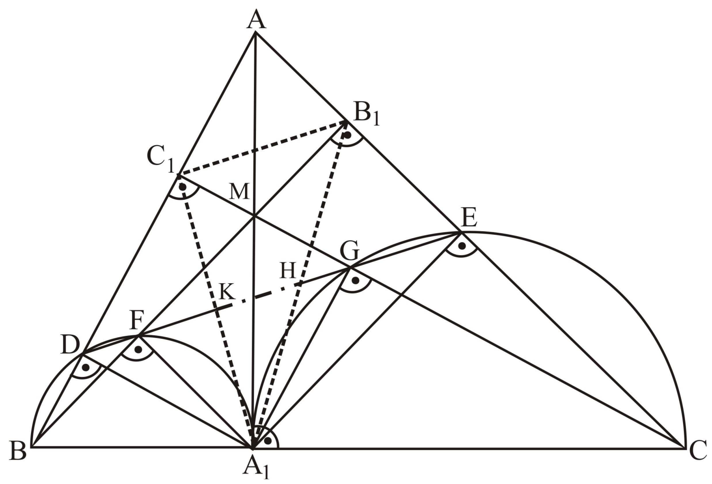
A teljességhez tartozik annak vizsgálata, hogy a Feuerbach-kör minden pontja előáll-e a feladatban leírt módon, azaz a Feuerbach-kör egy S pontját kiválasztva megadható-e az ABC háromszög két Simson-egyenese, amelyek derékszögben metszik egymást az S pontban. A kérdésre a válasz igenlő, hiszen a Feuerbach-kör tetszőleges S pontjához tartozik a Feuerbach-körnek egy S_1S_2 átmérője, amely az ábra alapján az S_1 és S_2 Simson-egyeneseket már egyértelműen meghatározza (az S_1 és S_2 pontok közül nyilván elegendő az egyiket megadni). Eszerint egy kiválasztott S ponthoz végtelen sok S_1 és S_2 Simson-egyenespár tartozik, de ha az S_1 vagy S_2 pontok közül az egyiket adjuk meg, akkor egy és csak egy $S_1;S_2$ egyenespárt, illetve egy és csak egy S pontot kapunk.



12. feladat

Az ABC háromszög magasságainak talppontjai $A_1; B_1; C_1$. A BA_1 és CA_1 szakaszok, mint átmérők fölé köröket rajzolva, a körök az $AB; CA; BB_1$ és CC_1 egyeneseket rendre a $D; E; F; G$ pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $D; E; F; G$ egy egyenesen vannak és a DE szakasz hossza az ABC háromszög talpponti háromszöge kerületének felével egyenlő!

Megoldás:



A $D; E$ és F pontok az ABA_1B_1 húrnégyszög köré írt körben (amely az ABB_1 háromszög körülírt köre is) az A_1 ponthoz tartozó Simson-egyenesen vannak. Hasonlóképpen a $D; E$ és G pontok az ACA_1C_1 húrnégyszög köré írt körben (amely az ACC_1 háromszög körülírt köre is) az A_1 ponthoz tartozó Simson-egyenesen helyezkednek el.

A felsorolt pontok közül kettő azonos (D és E) ezért mind a négy pont egy egyenesen van. Az A_1C_1 és DE egyenes metszéspontját K -val, az A_1B_1 és a DE egyenes metszéspontját H -val jelöltük.

Nyilvánvaló, hogy A_1GC_1D téglalap, amelynek K a középpontja. Hasonlóképpen kapjuk, hogy az A_1EB_1F téglalap középpontja H.
A téglalapok átlói felezik egymást, ezért K az A_1C_1, a H pedig A_1B_1 felezőpontja, tehát KH középvonala az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek és így

$$KH = \frac{B_1C_1}{2}.$$

A K pont az A_1C_1D derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, ezért

$$KA_1 = KC_1 = KD.$$

Hasonlóan kapjuk az A_1B_1E derékszögű háromszögből (körülírt körének középpontja H), hogy

$$HA_1 = HB_1 = HE.$$

A DE szakasz hossza tehát

$$DE = KD + KH + HE,$$

és ez az összeg a fentiek szerint éppen az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszög kerületének fele.