Polinomalgebra elemei

I. Egész együtthatós polinomok

1. Mely n pozitív egész számokhoz található olyan k-adfokú egész együtthatós $p(x)$ polinom, amelyre teljesül, hogy $p(0)=20$, $p(1)=11$ és $p(n)=2011$?

2. Egy egész együtthatós polinomról tudjuk, hogy valamely egész helyen 1967-et vesz fel. Legfeljebb hány különböző egész helyen lehet a helyettesítési értéke -44?

3. A p egész együtthatós polinomról tudjuk, hogy p(1), p(2), …,p(2011) egyike sem osztható 2011-gyel. Legfeljebb hány egész gyöke lehet a polinomnak?

4. Lehet-e racionális a $p(x)=x^3-2010x^2-2010x-d$ polinom mindhárom gyöke, ha d egész szám?

5. Legyen az $f(x)$ egész együtthatós polinom, p és q relatív prímek, q nullától különböző! Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{p}{q}$ gyöke a polinomnak, akkor $f(k)$ minden egész k esetén osztható $p-kq$-val! Igaz-e az állítás megfordítása?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(x)$ egész együtthatós n-edfokú főpolinomra teljesül, hogy létezik olyan k és p pozitív egész szám, mely esetén $f(k)$, $f(k+1)$, $f(k+2)$, …, $f(k+p)$ nem osztható $p+1$-gyel, akkor f-nek nincs racionális gyöke!

7. Van-e olyan nem konstans egész együtthatós polinom, amelyik minden egész helyen kettőhatvány értéket vesz fel?

8. Mutassuk meg, hogy bármely egész együtthatós 1-nél nagyobb fokszámú $p(x)$ polinomhoz található olyan egész együtthatós $q(x)$ polinom, mely esetén $p(q(x))$ felbontható konstanstól különböző egész együtthatós polinomok szorzatára!

9. Igaz-e, hogy
   a) van olyan nem egész együtthatós polinom, mely minden egész helyen egész értéket vesz fel?
   b) ha a másodfokú polinom helyettesítési értéke minden egész helyen páros, akkor együtthatói egészek?
   c) ha egy harmadfokú polinom helyettesítési értéke minden egész helyen osztható 3-mal, akkor együtthatói egészek?
   d) ha egy harmadfokú polinom helyettesítési értéke minden egész helyen osztható 6-tal, akkor együtthatói egészek?

10. Van-e olyan 2011-edfokú p polinom, melyre minden egész k esetén teljesül, hogy $p(k)$, $p(p(k))$, $p(p(p(k)))$,…, $p(\ldots(p(k))\ldots)$,… sorozat tagjai páronként relatív prímek?

11. Létezik-e olyan 2012-edfokú egész együtthatós f(x) polinom, hogy végtelen sok valós x-re $f(x) = f(1-x)$ teljesül? Ugyanez a kérdés az $f(x) = f(x-1)$ feltétel mellett?

II. Polinomegyenletek

1. Határozzuk meg az összes olyan *p* polinomot, amelyre minden valós *x* esetén fennáll az alábbi egyenlőség!

   a) $xp(x-1)=(x-5)p(x)$ b) $(x-1)p(x+1)=(x+2)p(x)$ c) $(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x)$

   d) $xp(x-1)=(x+1)p(x)$

III. Gyökök és együtthatók közötti összefüggések, elemi szimmetrikus polinomok

1. A $p(x)=x^3+ax^2+x+b$ polinom együtthatói egészek. A -2 gyöke a polinomnak és *p* egyik valós gyökének a reciproka is gyök. Melyik ez a *p* polinom?

2. A $p(x)=x^4-x^3-14x^2+2x+24$ polinomról tudjuk, hogy négy valós gyöke van és két gyökének az összege 0. Határozzuk meg a gyökeit!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinomnak három különböző pozitív gyöke van, akkor $bc<ad$!

4. Adjuk meg azon *a, b, c* valós számokat, melyek esetén teljesül, hogy a $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ polinom gyökei megegyeznek a $q(x)=x^3-3x+1$ gyökeinek ötödik hatványával!

5. Az *a*, *b*, *c* olyan egész számok, hogy az x^3+ax^2+bx+c polinomnak három páronként különböző pozitív egész gyöke van, melyek prímszámok, továbbá az ax^2+bx+c polinomnak van pozitív egész gyöke. Mutassuk meg, hogy $|a|$ összetett szám!

6. Az x^4-2x^2+ax+b polinomnak négy különböző gyöke van a valós számok körében. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik gyök abszolút értéke kisebb, mint $\sqrt{3}$!

*****

A továbbiakban legyen $h_k=x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k$ és $s_k=x_1x_2\ldots x_k+x_1x_3\ldots x_kx_{k+1}+\ldots+x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n$!

7. Fejezzük ki n=3 esetén a h_1, h_2, h_3, h_4, h_5-öt az s_1, s_2, s_3-mal!

8. Fejezzük ki tetszőleges n>3 számra a h_3-at az s_1, s_2, s_3-mal!

9. Fejezzük ki tetszőleges $n\geq 4$ esetén h_4-et az s_1, s_2, s_3, s_4-gyel!

10. A 7. feladat felhasználásával bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket!

    a) $x^3+y^3+z^3-3xyz=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$;

    b) $x^3+y^3+z^3=\left(x+y+z\right)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$

c) $x^5+y^5+z^5=(x+y+z)^5-5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

11. a) Bizonyítsuk be, hogy ha *x, y, z* páronként különböző egész számok, akkor $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ osztható 3(*x*-*y*)(*y*-*z*)(*z*-*x*)-szel!

    b) Bizonyítsuk be, hogy ha *x, y, z* páronként különböző egész számok, akkor $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ osztható 5(*x*-*y*)(*y*-*z*)(*z*-*x*)-szel!

12. Hozzuk egyszerűbb alakra: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(c+b-a)^3$!

13. Az *a*, *b*, *c* valós számok összege 1. Igazoljuk, hogy $4(a^3+b^3+c^3-3abc)\geq 3(a-b)^2$!

14. Legyen x, y, z egész szám! Bizonyítsuk be, hogy ha $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=xyz$, akkor $(x+y+z+6)\,|\,(x^3+y^3+z^3)$!

15. Határozzuk meg az *x*, és *y* értékét, ha $x+y\neq 1$, de $x^3+y^3+3xy=1$!

16. Bizonyítsuk be, hogy ha *x, y, z* nullától különböző valós számok és *x*+*y*+*z*=0, akkor $\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{yx}$!

17. Legyen *a, b, c* nullától különböző valós szám, *a*+*b*+*c*=0 és $a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$! Határozzuk meg az $a^2+b^2+c^2$ kifejezés értékét!

18. Jelölje x_1, x_2 és x_3 az $r(x)=x^3+px+q$ polinom három gyökét. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathrm{x}_1^5+\mathrm{x}_2^5+\mathrm{x}_3^5=5\mathrm{pq}$!

19. Legyen *x, y, z* olyan valós szám, melyre $x^3+y^3+z^3\neq 0$! Bizonyítsuk be, hogy $\frac{2xyz-(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3}=\frac{2}{3}\ \Leftrightarrow\ x+y+z=0$!

20. Legyen *a, b, c* három olyan valós szám, melyek közül semelyik kettő összege nem 0! Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$!

21. Legyen *a, b, c* egy háromszög három oldala! Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}}\geq\max(a,b,c)$!

22. Legyen a, b, c, d egész szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor az *a*+*b*+*c*+*d* osztója a $2(a^4+b^4+c^4+d^4)-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+8abcd$ -nek!

23. Az alábbi kifejezésben *a*, *b*, *c* különböző pozitív egész számok, *n* pedig természetes szám: $S_n=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$. Igazoljuk, hogy S_n értéke egész szám, ha a) *n* = 0, b) *n* = 1, c) *n* = 2, d) *n*=3 e) *n*=4 f) *n* tetszőleges természetes szám!

24. Döntsük el, hogy az alábbi számok racionális, vagy irracionális számok!

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$

25. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c racionális számok és $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, akkor a=b=c=0!

26. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c racionális számokra az $\left(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\right)^3$ racionális, akkor az a, b, c közül legalább kettő nulla!

27. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} 2x+2y+2z=-1 \\ 2xy+2yz+2zx=-13 \\ xyz=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=65 \\ x^3+y^3+z^3=99 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=50 \\ x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2x+z^2y=138 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=297 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{24} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3=91 \\ x^5+y^5+z^5=4651 \end{cases}$