A pillangótétel és más mesék
(az elemi geometria néhány szép tétele és feladata)

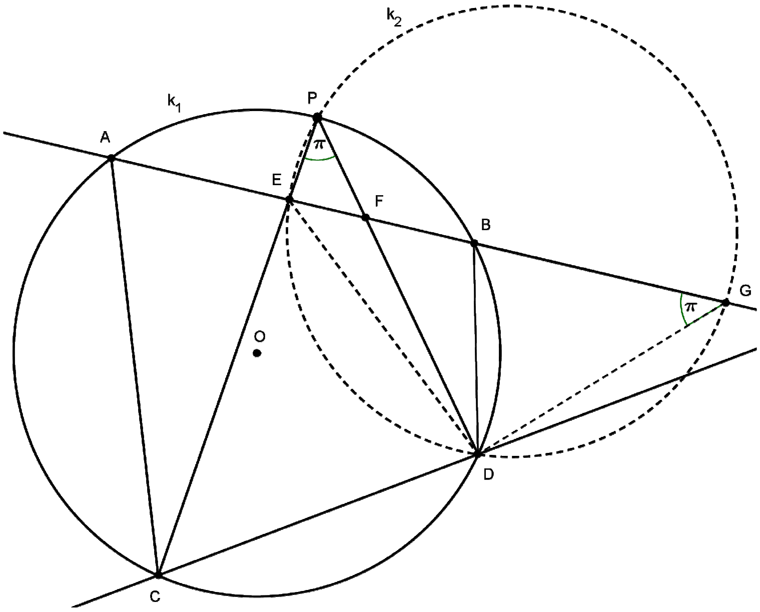
Bíró Bálint, Eger

1. Bevezetés

Az alábbiakban szereplő tételeket és feladatokat két téma köré csoportosítjuk: az egyik az elemi geometria úgynevezett pillangótétele, a másik a háromszögek oldalfelező pontjaira szimmetrikusan elhelyezkedő pontokból álló háromszögek területének egyenlősége. A két témakört néhány szép feladat segítségével össze is kapcsoljuk. A feladatok és tételek mindegyike tárgyalható középiskolában a tanítási órán, vagy szakkörön.

2. A Haruki-lemma

Legyen *AB* és *CD* ugyanannak a körnek két, nem metsző húrja, és legyen a *C* és *D* pontokat nem tartalmazó *AB* ív egy pontja *P*. Messe a *PC* és *PD* szakasz az *AB* húrt rendre az *E* és *F* pontokban. A Haruki-lemma állítása szerint az $\frac{AE \cdot BF}{EF}$ hányados értéke nem függ a *P* pont helyzetétől.
A lemma bizonyításához tekintsük az 1. ábrát, amelyen megszerkesztettük a *PED* háromszög k_2 körülírt körét is. Utóbbi kör az *AB* húr egyenesét a *G* pontban metszi. Két összefüggést fogunk bizonyítani, egyrészt azt, hogy $\frac{AE \cdot BF}{EF} = BG$, másrészt azt, hogy a *BG* szakasz hossza állandó, ez a kettő együttesen igazolja állításunkat.



1. ábra

Az F ponton keresztül a k_1 körben az AB és PD húr halad, ezek darabjainak szorzata egyenlő, azaz

$$(1) \qquad AF \cdot BF = PF \cdot DF\ .$$

A k_2 körben, ugyancsak az F ponton keresztül, az EG és PD húr halad, a húrok darabjainak szorzata itt is egyenlő, tehát

$$(2) \qquad EF \cdot GF = PF \cdot DF\ .$$

Az (1) és (2) összefüggések jobb oldala egyenlő, ezért egyenlők a bal oldalak is, és így

$$(3) \qquad AF \cdot BF = EF \cdot GF\ .$$

Mivel $AF = AE + EF$ és $GF = BF + BG$, ezért (3)-ból előbb

$$\left(AE + EF\right) \cdot BF = EF \cdot \left(BF + BG\right),$$

a műveletek elvégzése és rendezés után $AE \cdot BF = EF \cdot BG$, innen pedig

(4) $$\frac{AE \cdot BF}{EF} = BG$$

következik. A CD szakasznak a k_1 körben a P pontból mért látószögét az ábrán π-vel jelöltük, ennek a szögnek a nagysága a kerületi szögek tétele alapján a P pont mozgása közben nem változik.
Ugyanakkor $EPD\angle = \pi$ a k_2 körben is kerületi szög, ezért $EGD\angle = \pi$. Ha figyelembe vesszük még azt a tényt, hogy a P pont mozgása közben a $DBG\angle$ sem változik, akkor kijelenthetjük, hogy a DBG háromszög szögeinek nagysága állandó, és mivel a BD szakasz állandó hosszúságú, ezért a DBG háromszög BG oldalának hossza is állandó.

Ezt a megállapítást (4)-gyel összevetve a Haruki-lemmát igazoltuk.

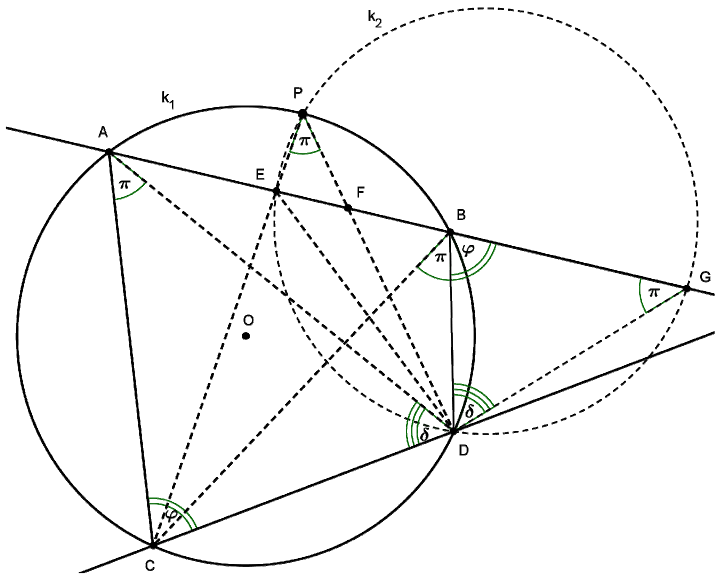
3. A Haruki-lemma kiterjesztése

Az előzőekben bizonyított Haruki-lemma a feltételek megtartása mellett kiterjeszthető (2. ábra).

Adottak egy körben az egymást nem metsző AB és CD húrok. Legyen a C és D pontokat nem tartalmazó AB ív egy változó pontja P, legyen továbbá a PC és AB illetve a PD és AB szakaszok metszéspontja rendre E és F. Ekkor fennáll a következő két egyenlőség:

(5) $$\frac{AE \cdot BF}{EF} = \frac{AC \cdot BD}{CD},$$

(6) $$\frac{AF \cdot BE}{EF} = \frac{AD \cdot BC}{CD}.$$



2. ábra

4. A Ptolemaiosz-tétel, mint a Haruki-lemma következménye:

A Haruki-lemma kiterjesztésének bizonyítása során belátható, hogy $BG = \frac{AC \cdot BD}{CD}$, illetve $AG = \frac{AD \cdot BC}{CD}$. Nyilvánvaló, hogy $AG - BG = AB$, így az előző két kifejezésből azt kapjuk, hogy $\frac{AD \cdot BC}{CD} - \frac{AC \cdot BD}{CD} = AB$, innen *CD*-vel való szorzással és rendezéssel adódik, hogy $AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD$, ez pedig éppen a Ptolemaiosz-tétel állítása.

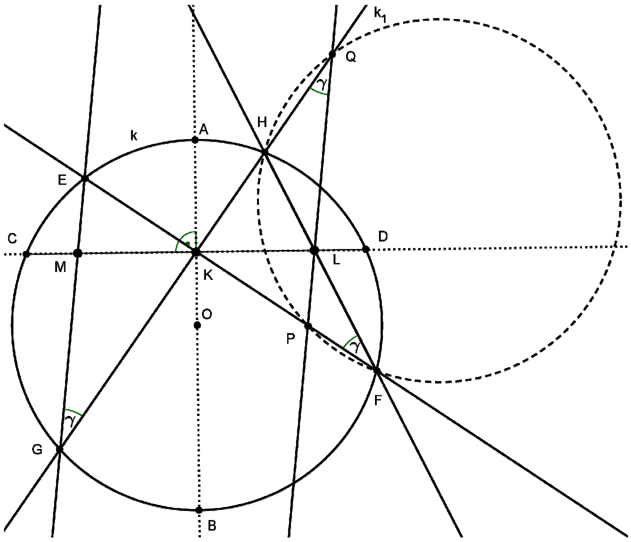
5. A pillangótétel:

Az angol nyelvű [2] szakirodalom szerint ezt a tételt William George Horner angol matematikus 1815-ben bizonyította. Ugyanez a forrás arról is beszámol, hogy William Wallace skót matematikus családi hagyatékában találtak egy 1805-ből származó bizonyítást a tételre. Utóbbi alapján pillanatnyilag a tétel felfedezőjének William Wallace-t tekinthetjük.

A tétel a következőképpen szól (nagyrészt megtartjuk Wallace eredeti jelöléseit):

legyen a *k* kör egy húrja *CD*, a *CD* húr felezőpontja *K*. A *k* kör *EF* és *GH* (különböző) húrjai a *K* pontban metszik egymást, az *EG* és *CD*, illetve *HF* és *CD* húrok metszéspontja rendre *M* és *L*. Ekkor $KM = KL$.

a) <u>William Wallace bizonyítása 1805-ből:</u> jelöléseink a 3. ábrán láthatók.



3. ábra

A 3. ábrán párhuzamost húztunk az *EG* szakasszal az *L* ponton keresztül, ez az *EF* egyenest a *P*, a *GH* egyenest a *Q* pontban metszi (ez a két metszéspont mindenképpen létrejön az *E*; *F*; *G*; *H* pontok felvétele miatt). Ekkor egyrészt a kerületi szögek tétele miatt a *k* körben $EGH\angle = EFH\angle = \gamma$, másrészt $EGQ\angle$ és $GQP\angle$ váltószögek, tehát egyenlők, azaz $EGQ\angle = GQP\angle = KQP\angle = \gamma$.
Az *F* és *Q* pontok a *HP* egyenes ugyanazon oldalán vannak, valamint az *F* és *Q* pontokból a *HP* szakasz azonos nagyságú szögben látszik, ezért a *H*; *P*; *F*; *Q* pontok a *HP* szakasz fölé rajzolt γ szögű látószögkörív pontjai, tehát az ábrán k_1-gyel jelölt körre illeszkednek, és így *HPFQ* húrnégyszög.
A k_1 körben az *L* ponton átmenő húrok darabjainak szorzata egyenlő, ezért:

$$(7) \qquad LQ \cdot LP = LH \cdot LF \ .$$

A megfelelő szögek egyenlősége miatt a *KMG* és *KLQ* háromszögek hasonlók, ebből a megfelelő oldalak arányának egyenlősége alapján $\frac{KM}{MG}=\frac{KL}{LQ}$ adódik.
Ugyancsak a megfelelő szögek egyenlőségéből következik, hogy a *KEM* és *KPL* háromszögek is hasonlók, ezért $\frac{KM}{ME}=\frac{KL}{LP}$.
A kapott két arányt összeszorozva és (7)-et figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$(8)\qquad \frac{KM^2}{MG\cdot ME}=\frac{KL^2}{LQ\cdot LP}=\frac{KL^2}{LH\cdot LF}.$$

Ugyanakkor a *k* körben az *M* ponton átmenő húrok darabjainak szorzata egyenlő, így $MG\cdot ME=MC\cdot MD$, de a *k* körben az *L* ponton átmenő húrok darabjainak szorzata is egyenlő, és ezért $LH\cdot LF=LD\cdot LC$.
A kapott összefüggéseket (8)-cal összevetve adódik

$$(9)\qquad \frac{KM^2}{MC\cdot MD}=\frac{KL^2}{LD\cdot LC}.$$

Vizsgáljuk most a CK^2-KM^2 kifejezést!
Egy algebrai azonosság alapján $CK^2-KM^2=(CK-KM)\cdot(CK+KM)$.
Mivel azonban $CK-KM=MC$ és $CK+KM=DK+KM=MD$, így $CK^2-KM^2=MC\cdot MD$.
Hasonlóképpen $DK^2-KL^2=(DK-KL)\cdot(DK+KL)$,
és mivel $DK-KL=LD$, továbbá $DK+KL=CK+KL=LC$,
ezért $DK^2-KL^2=LD\cdot LC$.

Helyettesítsük a kapott összefüggéseket (9)-be:

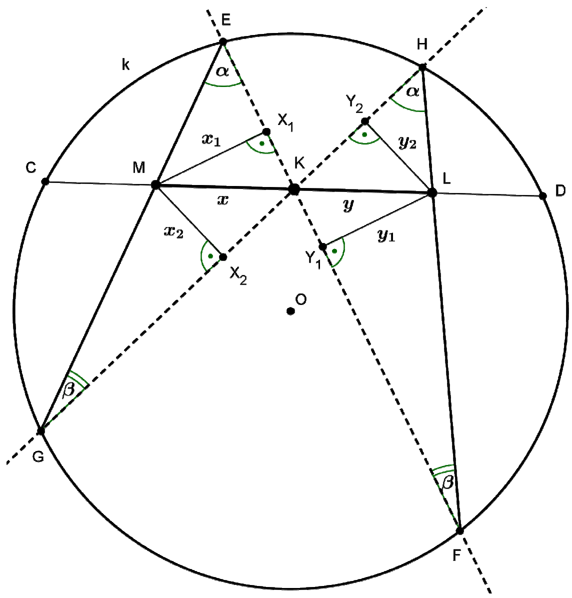
$$(10)\qquad \frac{KM^2}{CK^2-KM^2}=\frac{KL^2}{DK^2-KL^2}.$$

(10)-ben a két oldal reciprokai is egyenlők, így $\frac{CK^2-KM^2}{KM^2}=\frac{DK^2-KL^2}{KL^2}$, azaz $\frac{CK^2}{KM^2}-1=\frac{DK^2}{KL^2}-1$, ebből pedig $\frac{CK^2}{KM^2}=\frac{DK^2}{KL^2}$ következik. Mivel azonban $CK = DK$, ezért $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{KL^2}$, ez pedig azt jelenti, hogy $KM^2 = KL^2$, tehát $KM = KL$.

Ezzel a pillangótétel Wallace-féle bizonyítását befejeztük.

b) A Coxeter-Greitzer-féle bizonyítás vázlata:

A [2] szakirodalom sok bizonyítást tartalmaz a pillangótételre (a Wallace-bizonyítással együtt 21 bizonyítás), ezek közül az egyik legegyszerűbb a Coxeter és Greitzer által adott bizonyítás (4. ábra).



4. ábra

A 4. ábra KMX_1 és KLY_1 hasonló háromszögeiből $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$, az ugyancsak hasonló KMX_2 és KLY_2 háromszögekből pedig $\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}$ adódik. A megfelelő szögek egyenlősége miatt az MEX_1 és LHY_2, illetve MGX_2 és LFY_1 háromszögek is hasonlók, ezért $\frac{x_1}{y_2} = \frac{ME}{LH}$, illetve $\frac{x_2}{y_1} = \frac{MG}{LF}$.

A kapott összefüggésekből $\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{x_2}{y_1} = \frac{ME}{LH} \cdot \frac{MG}{LF}$ következik.

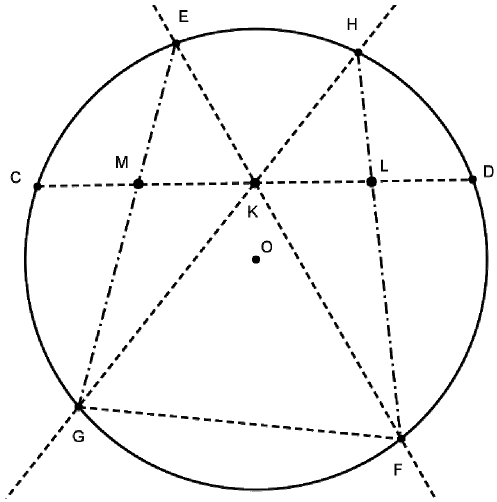
A k körben az M ponton átmenő húrok darabjainak szorzata egyenlő, így $ME \cdot MG = MC \cdot MD$, ugyanakkor az L ponton átmenő húrok darabjainak szorzata is egyenlő, ezért $LH \cdot LF = LD \cdot LC$.

Ebből azt kapjuk, hogy $\frac{x^2}{y^2} = \frac{MC \cdot MD}{LD \cdot LC}$. Bevezetve a $CK = DK = a$ jelölést, az előző képlet alapján $\frac{x^2}{y^2} = \frac{(a-x)\cdot(a+x)}{(a-y)\cdot(a+y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$ adódik (nyilvánvaló, hogy $a \neq \pm y$).

Az $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$ egyenlőségben elvégezve a műveleteket, rendezés és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $x^2 = y^2$. Az x és y pozitív számokra nézve ez azt jelenti, hogy $x = y$, azaz $KM = KL$, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

c) <u>Bizonyítás a Haruki-lemma felhasználásával</u>

Ez a bizonyítás az előzőeknél lényegesen rövidebb. Az egyszerűség kedvéért itt is megtartjuk az eddigi jelöléseket (5. ábra).



5. ábra

Az E és H pontok megfelelnek a Haruki-lemmában szereplő változó pont (az 1. ábrán a P pont) két helyzetének. Felírható tehát, hogy $\frac{CM \cdot DK}{KM} = \frac{CK \cdot DL}{KL}$, ugyanakkor a feltétel miatt $DK = CK$, ezért fennáll a $\frac{CM}{KM} = \frac{DL}{KL}$ egyenlőség. Adjunk mindkét oldalhoz 1-et!

Ezzel $\frac{CM}{KM} + 1 = \frac{DL}{KL} + 1$, azaz $\frac{CM + KM}{KM} = \frac{DL + KL}{KL}$. Mivel $CM + KM = CK$ és $DL + KL = DK$, ezért $\frac{CK}{KM} = \frac{DK}{KL}$. Ebből az összefüggésből $DK = CK$ felhasználásával $\frac{1}{KM} = \frac{1}{KL}$, innen pedig $KM = KL$, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzések:

a) a $KM = KL$ összefüggésből az is adódik, hogy $MC = LD$ és $MD = LC$. Az M és L pontokon átmenő húrok szorzata állandó, ezért $MC \cdot MD = ME \cdot MG$, illetve $LD \cdot LC = LH \cdot LF$, ez pedig $MC = LD$ és $MD = LC$ alapján azt jelenti, hogy $ME \cdot MG = LH \cdot LF$, vagyis a nem metsző EG és HF húrok darabjainak szorzata egyenlő.

b) Wallace bizonyításának végén található egy megjegyzés, amelyben a következőt állítja: a pillangótétel egy, az összes kúpszeletre vonatkozó állítás speciális esete. Eszerint, ha *AB* egy kúpszelet valamelyik átmérője, és egy erre merőleges *CD* egyenes ezt *K*-ban metszi, valamint az *EF* és *GH* húrok ugyancsak *k*-ban metszik egymást, továbbá *EG* és *CD*, illetve *HF* és *CD* metszéspontja rendre *M* és *L*, akkor $KM = KL$. Wallace ebben a megjegyzésében a kúpszelet átmérőjén a kúpszelet valamelyik szimmetria-tengelyének egyenesét érti, ezekre az esetekre a pillangótétel analitikus geometriai eszközökkel igazolható. Ha általánosabban a kúpszelet *AB* átmérőjének a kúpszelet középpontján átmenő egyenest tekintünk, akkor ki kell egészítenünk a Wallace által megadott feltételeket azzal, hogy *K* nem az *AB* és *CD* egyenesek (ezek merőlegességének feltételét megtartva) metszéspontja, hanem *K* a *CD* szakasz felezőpontja. A pillangótétel ezzel a kiegészítéssel is teljesül.

6. A pillangótétel kiterjesztése

A körre vonatkozó pillangótétel kiterjeszthető olyan esetekre, amikor az egyéb feltételek megtartása mellett az teljesül, hogy $\frac{CK}{DK} = \frac{m}{n}$ $\left(m; n \in N^{+}\right)$. Ha bevezetjük a $CD = h$ jelölést, akkor $CK = \frac{m}{m+n} \cdot h$ és $DK = \frac{n}{m+n} \cdot h$. A 4. ábra jelöléseit és a bizonyítás módszerét alkalmazva felírhatjuk, hogy $\frac{x^2}{y^2} = \frac{MC \cdot MD}{LD \cdot LC}$. Mivel $MC = CK - x$, és $MD = DK + x$, valamint $LD = DK - y$ és $LC = CK + y$. Ezzel

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\left(\frac{m}{m+n} \cdot h - x\right) \cdot \left(\frac{n}{m+n} \cdot h + x\right)}{\left(\frac{n}{m+n} \cdot h - y\right) \cdot \left(\frac{m}{m+n} \cdot h + y\right)},$$

ahonnan a műveletek elvégzése, rendezés és egyszerűsítés után

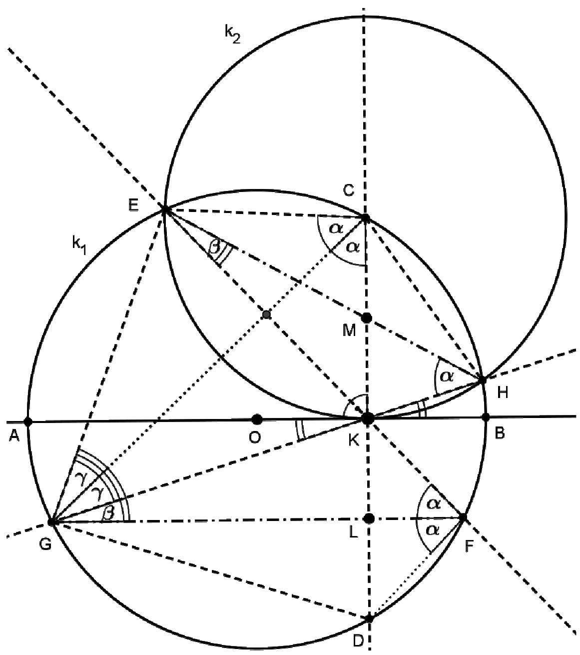
$$\frac{m^2 - n^2}{m \cdot n} = h \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

következik. Ez tekinthető a pillangótétel egyféle kiterjesztésének, hiszen, ha $m = n$, azaz *K* a *CD* szakasz felezőpontja, akkor az összefüggésben a bal oldal értéke zérus, így a jobb oldal is zérus, ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$, vagyis $x = y$.

7. A pillangótétellel összefüggő néhány feladat

a) Legyen az *AB* átmérőjű k_1 kör egy, az *A* és *B* pontoktól különböző tetszőleges pontja *C*. Bocsássunk merőlegest a *C* pontból *AB*-re, a merőleges talppontja *K*. A *C* középpontú, *CK* sugarú k_2 kör a k_1 kört az *E* és *H* pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az *EH* egyenes felezi a *CK* szakaszt!

Bizonyítás: jelöléseink a 6. ábrán láthatók.



6. ábra

Az E és H pontokat K-val összekötve a k_1 kör F és G pontjait kapjuk. Az AB átmérőre merőleges CK egyenesnek a k_1 körrel való második metszéspontja D, az EH és CK, valamint az FG és DK szakaszok metszéspontjai rendre M és L. A CD szakasz felezőpontja nyilvánvaló, hogy K, ez pedig azt jelenti, hogy alkalmazhatjuk a pillangótételt, azaz $KM = KL$. A kerületi szögek tétele miatt a k_1 körben $EFG\angle = EHG\angle = ECG\angle = \alpha$, továbbá $HEF\angle = HGF\angle = \beta$. A k_2 körben a középponti és kerületi szögek összefüggése miatt $ECK\angle = 2\alpha$, mivel azonban $ECG\angle = \alpha$, ezért a CG szakasz felezi az $ECK\angle$-et.

A k_2 kör CE és CH sugarai nyilván egyenlő hosszúak, de ezek a sugarak a k_1 körnek húrjai, ezért $CGE\angle = CGH\angle = \gamma$.

A CEG és CKG háromszögekben a CG szakasz közös, az ezen az oldalon fekvő két-két szög az előzőek szerint egyenlő, így a két háromszög egybevágó, ebből pedig $EG = KG$ következik (az is könnyen belátható, hogy CG merőlegesen felezi az EK szakaszt).

A k_2 körben $HEK\angle = \beta$, ez a szög a HK húrhoz tartozik, ugyanehhez a húrhoz tartozik a $HKB\angle$ érintőszárú kerületi szög is, ezért $HKB\angle = \beta$, illetve, mivel $HKB\angle$ és $GKA\angle$ csúcsszögek, ezért $GKA\angle = \beta$ is teljesül.

Utóbbiból az is következik, hogy $GKL\angle = 90° - \beta$, így $GLK\angle = 90°$, azaz GF merőlegesen metszi a CD szakaszt az L pontban.

Mivel a k_1 körben az előbbiek szerint a CG húr felezi az $ECK\angle = ECD\angle$-et, ezért $DCG\angle = \alpha$, tehát a kerületi szögek tétele szerint $DFG\angle = \alpha$ is igaz, ezért a DFL derékszögű háromszögben $DFL\angle = \alpha$ teljesül.

A DFL és KFL derékszögű háromszögekben az FL szakasz közös befogó, az ezen az oldalon fekvő megfelelő szögek egyenlők, ezért a két háromszög egybevágó. Ez azt is jelenti, hogy $KL = LD$, azaz az L pont felezi a KD szakaszt.

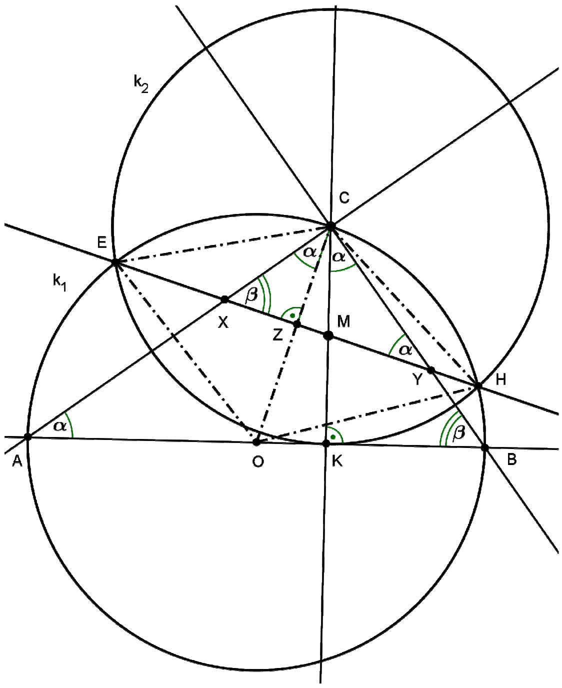
A pillangótétel szerint $KM = KL$, mivel azonban $CK = DK$, ezért $LD = MC$, ebből pedig azonnal következik, hogy $MC = LD = KL = KM$, tehát az M pont valóban felezi a CK szakaszt, ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

<u>Megjegyzés</u>: a feladat eredménye azt is jelenti, hogy a C pont egyes helyzeteihez tartozó M; K; L pontok a CD szakasz negyedelőpontjai.

Ha a C pont befutja a teljes k_1 kört, akkor a megfelelő M, illetve L pontok mértani helye egy olyan ellipszis, amely a k_1 körből $|\lambda| = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitással előállítható.

b) Legyen az AB átmérőjű k_1 kör egy, az A és B pontoktól különböző tetszőleges pontja C. Bocsássunk merőlegest a C pontból AB-re, a merőleges talppontja K. A C középpontú, CK sugarú k_2 kör a k_1 kört az E és H pontokban metszi. Az EH és CK szakaszok metszéspontja M, a CA és EH, valamint a CB és EH szakaszok metszéspontjai rendre X és Y.
Bizonyítsuk be, hogy $MX = MY$!

Bizonyítás: jelöléseink a 7. ábrán láthatók.

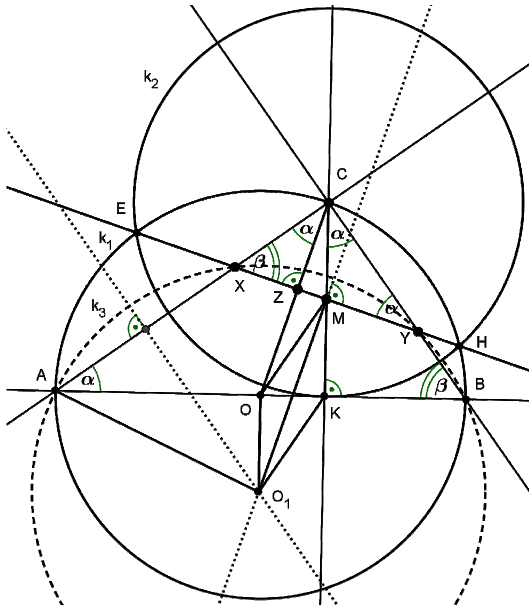


7. ábra

A Thalész-tétel miatt az ABC háromszög derékszögű, amelyben $ACB\angle = 90°$. A $BAC\angle = \alpha$ és az $ABC\angle = \beta$ jelöléssel $\alpha + \beta = 90°$. Ebből azonnal következik, hogy $BCK\angle = \alpha$.
A k_1 kör középpontja O, ezért $OE = OC = OH = R$, a k_2 kör középpontja C, és így $CE = CH = r$.
Eszerint a $CEOH$ négyszög deltoid, ez pedig azt jelenti, hogy a CO szakasz a Z pontban merőlegesen metszi az EH egyenest.

Az OAC háromszög nyilvánvalóan egyenlő szárú, ezért $ACO\angle = \alpha$, így a CXZ derékszögű háromszögben az $\alpha + \beta = 90°$ összefüggés miatt $CXZ\angle = \beta$. Az XYC háromszög is derékszögű, ezért $XYC\angle = \alpha$. Ez azt jelenti, hogy a CYM háromszög egyenlő szárú, azaz $MC = MY$. Az ACK derékszögű háromszögben pedig $ACK\angle = XCM\angle = \beta$, tehát az XCM háromszög is egyenlő szárú, ezért $MC = MX$. A szakaszok egyenlőségének tranzitív tulajdonsága miatt ebből azonnal adódik, hogy $MX = MY$, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzések: az $MX = MY = MC = MK$ egyenlőségek miatt $XKYC$ négyszög téglalap. A 7. ábra alapján láthatjuk, hogy az $ABYX$ négyszög húrnégyszög, hiszen $BAX\angle + BYX\angle = \alpha + 180° - \alpha = 180°$. Az $ABYX$ húrnégyszög körülírt körének (ez a kör a 8. ábrán k_3) középpontját O_1-gyel, sugarát ρ-val jelölve és az előző jelöléseket megtartva bizonyíthatjuk, hogy az O_1MCO, illetve O_1KMO négyszögek parallelogrammák, továbbá igazolhatjuk a $4R^2 + r^2 = 4\rho^2$, és $O_1C^2 + O_1K^2 = 2\rho^2$ összefüggéseket.
A bizonyítás a 8. ábra alapján könnyen elvégezhető, hiszen az előzőek szerint a CO szakasz merőleges az EH egyenesre, az O_1M pedig merőlegesen felezi a k_3 kör XY húrját (itt kihasználtuk, hogy $MX = MY$), tehát CO és MO párhuzamosak. Az AB szakasz a k_1 és k_3 körök közös húrja, ezért OO_1 merőleges AB-re, ugyanakkor CM egyenese is merőleges AB-re, így OO_1 és CM is párhuzamosak. Ez éppen azt jelenti, hogy O_1MCO parallelogramma, mivel azonban az a) feladat szerint $CM = KM$, ezért O_1KMO is parallelogramma. Az összefüggések bizonyítását az olvasóra bízzuk.

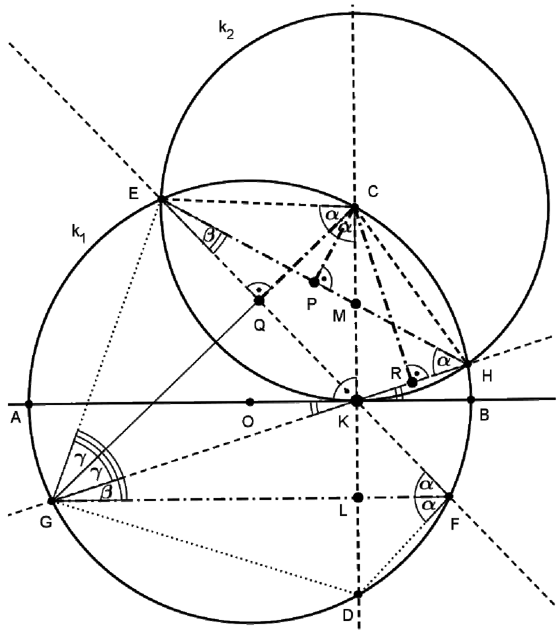


8. ábra

c) Legyen az AB átmérőjű k_1 kör egy, az A és B pontoktól különböző tetszőleges pontja C Bocsássunk merőlegest a C pontból AB-re, a merőleges talppontja K. A C középpontú, CK sugarú k_2 kör a k_1 kört az E és H pontokban metszi. A C pontból az EH; EK és KH egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre P; Q és R.

Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{CQ \cdot CR}{CP} = \dfrac{3}{2} \cdot CK$!

Bizonyítás: a feladat feltételei azonosak az a) feladat feltételeivel, ezért a 6. ábrát módosítjuk (9. ábra).



9. ábra

Legyen az egyszerűség kedvéért $CE = CH = CK = r$.
A ECQ derékszögű háromszögben $ECQ\angle = \alpha$, ezért $CQ = r \cdot \cos\alpha$.
A k_2 körben a HK húrhoz tartozó kerületi szög $HEK\angle = \beta$, ugyanehhez a húrhoz $HCK\angle = 2\beta$ középponti szög tartozik. A HCK egyenlőszárú háromszögben a CR magasság felezi a HK alapot, és így felezi a $HCK\angle$ szöget, és ezért $HCR\angle = \beta$. Ebből azt kapjuk, hogy a HCR derékszögű háromszögben $CR = r \cdot \cos\beta$.
A k_1 körben $CGE\angle = CHE\angle = \gamma$, így a CHP derékszögű háromszögben $CP = r \cdot \sin\gamma$.

A bizonyítandó állítás eszerint egyenértékű a $\dfrac{r \cdot \cos\alpha \cdot r \cdot \cos\beta}{r \cdot \sin\gamma} = \dfrac{3}{2} \cdot r$, vagy egyszerűsítés után a $\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{3}{2}$ egyenlőséggel, ezt fogjuk igazolni.

Az FGQ derékszögű háromszögből $\alpha+\beta+\gamma=90°$, így $\gamma=90°-(\alpha+\beta)$, vagyis $\sin\gamma=\sin\left[90°-(\alpha+\beta)\right]$, egy trigonometrikus azonosság alapján pedig $\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta)$.

A bizonyítandó állítás tehát $\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{3}{2}$, az addíciós tétel alkalmazásával

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{3}{2}.$$

Könnyen belátható, hogy α és β hegyesszögek, ezért $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq 0$, eszerint

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{1}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Mivel a KFL derékszögű háromszögben a $KL=\dfrac{r}{2}$, ezért $tg\alpha=\dfrac{\frac{r}{2}}{LF}=\dfrac{r}{2\cdot LF}$, illetve a KGL derékszögű háromszögben $tg\beta=\dfrac{\frac{r}{2}}{LG}=\dfrac{r}{2\cdot LG}$. Ebből $tg\alpha\cdot tg\beta=\dfrac{r^2}{4\cdot LF\cdot LG}$. A k_1 körben az L ponton átmenő húrok darabjainak szorzata egyenlő, azaz $LF\cdot LG=LD\cdot LC$, ebből pedig az következik, hogy $tg\alpha\cdot tg\beta=\dfrac{r^2}{4\cdot LD\cdot LC}$. Az a) feladat eredménye szerint $LD=\dfrac{r}{2}$ és $LC=\dfrac{3r}{2}$, azaz

$$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{r^2}{4\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{3r}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Ezzel

$$\frac{1}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2},$$

ez pedig a bizonyítandó állítással ekvivalens.

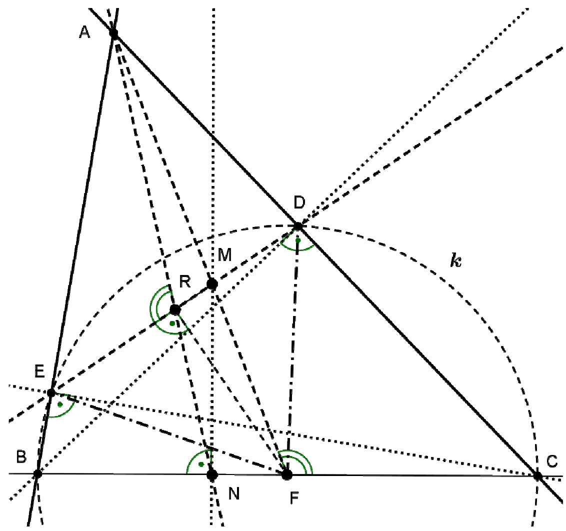
d) Az *ABC* hegyesszögű háromszögben a *BC* szakasz, mint átmérő fölé írt *k* kör az *AC* és *AB* oldalakat rendre a *D* és *E* pontokban metszi, a *BC* oldal felezőpontja *F*. Az *AF* és *DE* szakaszok metszéspontja *M*, az *M* merőleges vetülete a *BC* egyenesén *N*, az *AN* és *DE* szakaszok metszéspontja *P*. Rajzoljuk meg a *P* ponton keresztül a *BP* és *CP* egyeneseket, ezek a *k* kört rendre *G* és *H* pontokban metszik, végül a *BH* és *DE*, valamint a *CG* és *DE* szakaszok metszéspontja rendre *K* és *L*. Bizonyítsuk be, hogy $PK = PL$!

Először megemlítünk egy vietnami feladat ötletéből származó (az eredeti feladat szerzője Nguyen Minh Ha) geometriai problémát, ezután az eredeti feladat bizonyítása már nagyon egyszerű lesz.

A vietnami geometriai feladat nagyon szép, és a következőképpen szól:

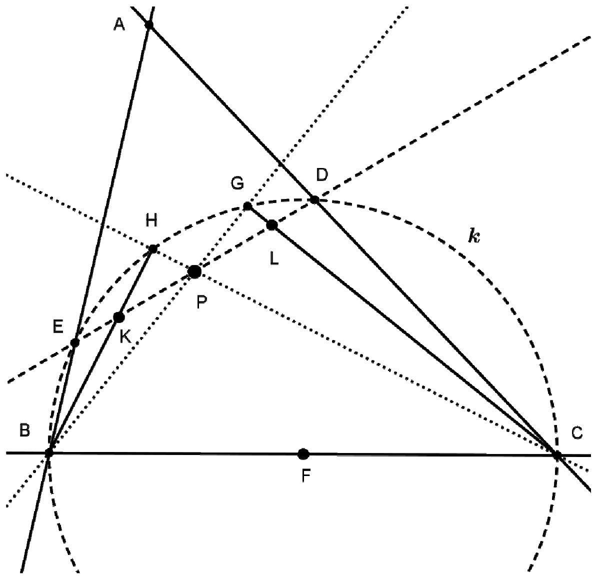
e) A hegyesszögű *ABC* háromszög *B* és *C* csúcsaiból induló magasságainak talppontja az *AC*, illetve *AB* oldalon rendre *D* és *E*, a *BC* oldal felezőpontja *F*. Az *AF* és *DE* szakaszok metszéspontját jelölje *M*, az *M* pontnak a *BC* szakaszra eső merőleges vetületét *N*.
Bizonyítsuk be, hogy az *AN* és *DE* szakasz metszéspontja felezi a *DE* szakaszt!

<u>Bizonyítás:</u> a megoldás a 10. ábra alapján könnyen elvégezhető, csak azt kell megmutatni, hogy a *DE* szakasz *R* felezőpontja és a feladatban szereplő, az *AN* és *DE* szakaszok *P* metszéspontja azonos.



10. ábra

A d) feladat megoldása ezután már valóban nagyon egyszerű (11. ábra).

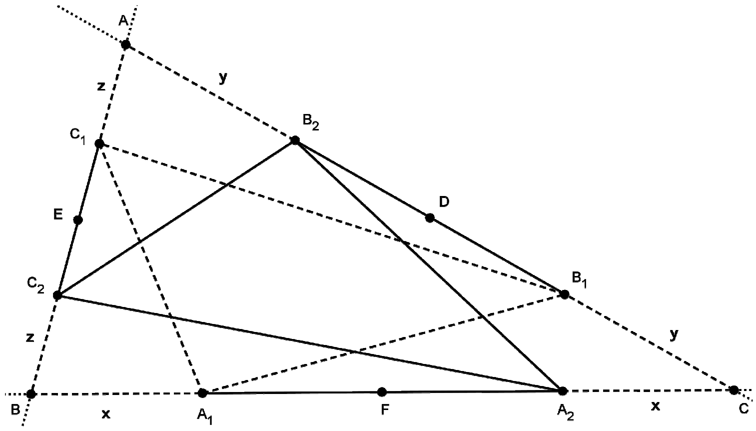


11. ábra

Az előző feladat eredménye alapján a *DE* szakasz felezőpontja *P*, a *k* kör *BH*, *CG* és *DE* húrjaira alkalmazhatjuk a pillangótételt, és ezzel $PK = PL$.

8. <u>A háromszög oldalfelező pontjaira szimmetrikus pontok háromszögeinek területe</u>

a) Az *ABC* háromszög oldalait pozitív körüljárási irány szerint körbejárjuk és sorban megjelöljük a *BC* oldalon az A_1 és A_2 , a *CA* oldalon a B_1 és B_2 , végül az *AB* oldalon a C_1 és C_2 belső pontokat úgy, hogy a körbejárás iránya szerint minden oldalon a kisebb sorszámú pont következik előbb. A kapott pontpárok mindegyike az adott oldal felezőpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek egyenlő területűek!



12. ábra

A bizonyítás a 12. ábra alapján (háromszögek területarányának felírásával) elvégezhető, ezen a helyen nem részletezzük.

Megjegyzés: könnyen igazolható, hogy a feladat állítása akkor is igaz, ha az A_1 és A_2, a B_1 és B_2, illetve a C_1 és C_2 pontok az adott oldalaknak nem belső pontjai. Az állítás igazolható a háromszögek trigonometrikus területképletével is.

Megemlítünk néhány feladatot, amelyet az a) feladat eredménye alapján könnyen megoldhatunk.

b) Az *ABC* háromszög beírt körének a *BC*; *CA* és *AB* oldalakon levő érintési pontjai rendre *D*; *E*; *F*, a hozzáírt köröknek a *BC*; *CA* és *AB* oldalakon levő érintési pontjai pedig rendre *G*; *H*; *I*. Bizonyítsuk be, hogy a *DEF* és *GHI* háromszögek területe egyenlő!

c) Az *ABC* háromszög *BC*; *CA* és *AB* oldalakhoz hozzáírt körei rendre $k_1; k_2; k_3$. A *BC* oldal egyenesének a k_2 és k_3 körökkel való érintési pontjai rendre A_2 és A_3. Hasonlóképpen kapjuk a *CA* oldal egyenesén a B_1 és B_3, az *AB* oldal egyenesén a C_1 és C_2 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $A_2B_3C_1$ és az $A_3B_1C_2$ háromszögek területe egyenlő!

d) Az *ABC* háromszög körülírt körének átmérője a P_1P_2 szakasz. A P_1 ponthoz tartozó Simson-Wallace-egyenes a *BC*; *CA*; *AB* oldalegyeneseket rendre az

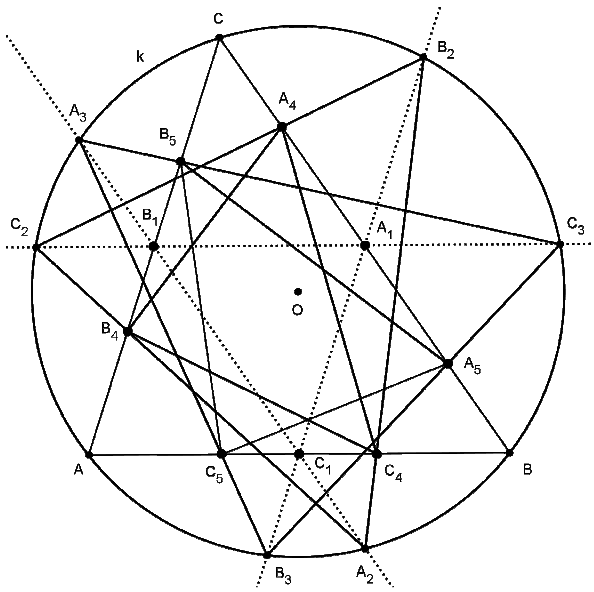
$X_1; Y_1; Z_1$ pontokban metszi. Hasonlóképpen kapjuk a P_2 ponthoz tartozó Simson-Wallace-egyenes és a *BC*; *CA*; *AB* oldalegyenesek metszéspontjaiként rendre az $X_2; Y_2; Z_2$ pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $X_2Y_2Z_1$ és $X_1Y_1Z_2$ háromszögek területe egyenlő!

A b) és c) feladatokban a beírt és hozzáírt körökhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét, a d) feladatban pedig azt a tételt használhatjuk föl, hogy ha egy kör egy átmérőjének két végpontjából merőlegest bocsátunk a kör egy húrjára, akkor a merőlegesek talppontjai a megfelelő húrvégpontokkal együtt a húr felezőpontjára szimmetrikusan elhelyezkedő szakaszokat alkotnak. Mindhárom feladat arra vezet, hogy a kérdéses háromszögek csúcsai az egyes oldalakon az oldalfelező pontokra szimmetrikusan helyezkednek el, ezért a) alapján a háromszögek területe valóban egyenlő.

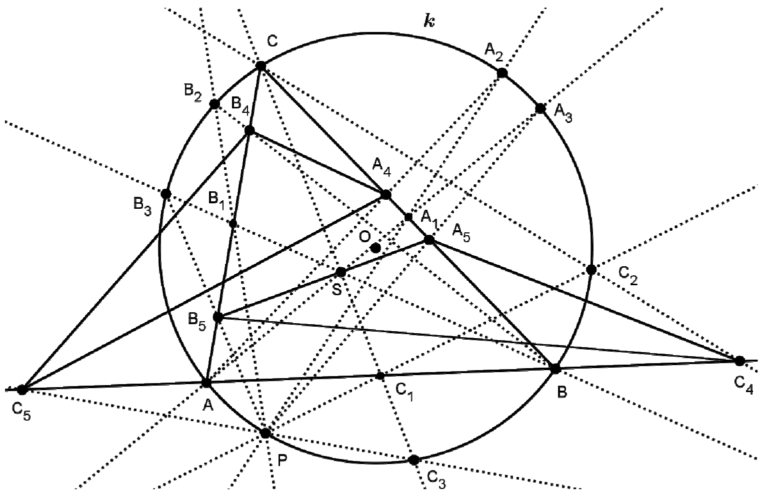
A b), c) és d) feladatoknak nincsen ismert kapcsolata a pillangótétellel. A következő két feladat viszont összefüggést mutat a pillangótétel és a háromszög oldalfelező pontjaira szimmetrikusan elhelyezkedő pontok háromszögeinek területe (vagyis az a) feladat) között.

e) Legyenek az *ABC* háromszög *BC*; *CA*; *AB* oldalainak felezőpontjai rendre $A_1; B_1; C_1$.
Az A_1B_1 egyenesnek a háromszög körülírt körével való metszéspontjai C_2 és C_3 (C_2 a *B* pontot nem tartalmazó *AC* köríven van), a B_1C_1 egyenesnek a körülírt körrel való metszéspontjai A_2 és A_3 (A_2 a *C* pontot nem tartalmazó *AB* íven van), végül a C_1A_1 egyenesnek a körülírt körrel való metszéspontjai B_2 és B_3 (B_2 az *A* pontot nem tartalmazó *BC* köríven van). Legyen továbbá $A_2B_2 \cap AB = C_4$, illetve $A_3B_3 \cap AB = C_5$, valamint $B_2C_2 \cap BC = A_4$, és $B_3C_3 \cap BC = A_5$, végül $C_2A_2 \cap CA = B_4$, illetve $C_3A_3 \cap CA = B_5$. Bizonyítsuk be, hogy az $A_4\,B_4\,C_4$ és $A_5\,B_5\,C_5$ háromszögek területe egyenlő!

f) Legyenek az *ABC* háromszög oldalainak felezőpontjai rendre $A_1; B_1; C_1$, az *ABC* háromszög körülírt körének tetszőleges pontja *P*. Kössük össze az A_1 ponttal a *P* és *A* pontokat, az így kapott egyeneseknek a körrel való második metszéspontjai rendre az A_2 és A_3 pont. Legyen továbbá $AA_2 \cap BC = A_4$ és $PA_3 \cap BC = A_5$. Hasonlóképpen kapjuk a *CA* és *AB* oldalegyeneseken a $B_4; B_5$ és $C_4; C_5$ pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $A_4\,B_4\,C_5$ és $A_5\,B_5\,C_4$ háromszögek területe egyenlő!



13. ábra



14. ábra

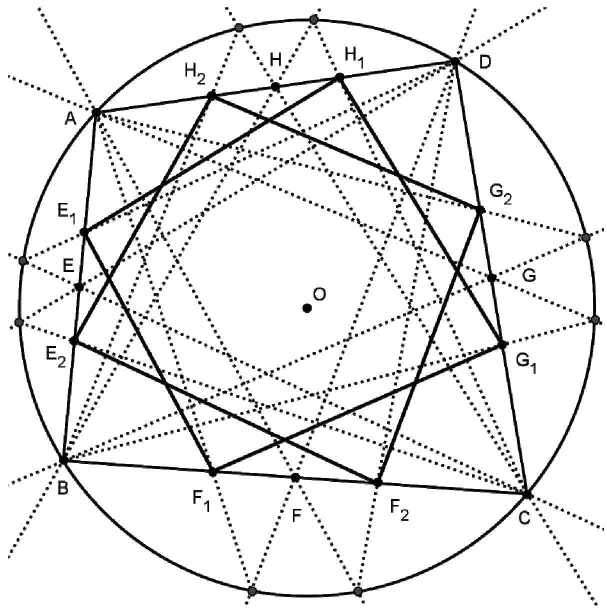
Az e) és az f) feladatok megoldása ugyanazon az elven alapul (13. és 14. ábra). Mindkét esetben a pillangótétel alkalmazható, ennek segítségével belátható, hogy az $A_4; A_5$, a $B_4; B_5$ illetve a $C_4; C_5$ pontok a megfelelő oldalak felezőpontjaira szimmetrikusan elhelyezkedő pontpárok, így az a) feladat eredményére való hivatkozással a megadott háromszögek területének egyenlősége igazolható.

Megjegyzendő az f) feladat egymással is összefüggő két érdekessége:

(1) az $A_4; B_4; C_4$, valamint az $A_5; B_5; C_5$ pontok egy egyenesre illeszkednek,

(2) az $A_5; B_5; C_5$ pontok egyenesére illeszkedik az *ABC* háromszög *S* súlypontja.

Végül bizonyítás nélkül megemlítjük a tárgyalt tételek (pillangótétel és a háromszögek oldalfelező pontjaira szimmetrikusan elhelyezkedő pontok) egy érdekes kiterjesztését (15. ábra):



15. ábra

A 15. ábrán az *ABCD* húrnégyszög megfelelő oldalainak felezőpontjai rendre *E*; *F*; *G*; *H*.

Ezután például az AB oldalon úgy kaptuk az E_1 pontot, hogy a C pontot összekötöttük az E-vel, az így kapott egyenesnek a húrnégyszög körülírt körével való második metszéspontját pedig D-vel.
Hasonlóan szerkesztettük meg az E_2 pontot az AB oldalon, továbbá a BC oldalon az $F_1; F_2$, a CD oldalon a $G_1; G_2$, végül a DA oldalon a $H_1; H_2$ pontokat. Világos, hogy a jelzett pontok a megfelelő oldal felezőpontjára szimmetrikus pontok.

A kiterjesztés azt állítja, hogy az $E_1F_1G_1H_1$ és az $E_2F_2G_2H_2$ négyszögek területe egyenlő.

Felhasznált irodalom:

[1] Jaroslav Bezverkhnyev: Haruki's lemma and a related locus problem (Forum Geometricorum-2008)

[2] Alexander Bogomolny: The Butterfly Theorem (http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml)

[3] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Geometry Revisited* (http://www.amazon.com/exec/obidos/ISBN=0883856190/ctksoftwareincA/#reader_0883856190)