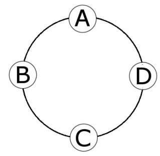
Algoritmusok

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Tesztversenyeken és ún. indoklós versenyeken egyaránt gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amelyekben egy kezdőállapotból lépések egymásutánja nyomán jutunk el egy végállapotba. Ezek leggyakrabban játékok, de lehetnek más folyamatok, algoritmusok is. Az ilyen jellegű feladatok megoldása során használható eszközöket, módszereket, trükköket mutatatjuk be az előadáson. A cikkben leírt feladatok nagy része a 2012. évi Kenguru-versenyen szerepelt. A nemzetközileg használt feladatsorban csak az első feladat, a további feladatok csak nálunk, illetve terítékre kerülnek olyan feladatok is, amelyek a versenyen nem szerepeltek. De nézzük először az ötletadó problémát, ami az 5-6. osztályosok versenyének 28. feladata volt.

Feladat:

Az Ugorj, kenguru! nevű játékban egy kengurubábu ugrál a jobb oldali táblán. Kezdetben az A pontban áll a kenguru, és minden lépésben a játék menetétől függően valamelyik szomszédos mezőre lép. Ha a D jelű mezőre érkezik, a játék véget ér. Hányféle olyan játékmenet képzelhető el, amely éppen 13 lépésből áll?



Megoldás:

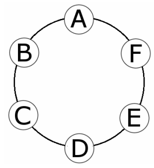
Az első ugrás csak a *B*-re történhet. A második ugrásnál 2 lehetőség van, *A* és *C*. Mindegy melyikre ugrik, a 3. ugrás mindenképpen csak *B*-re történhet ismét. Aztán a negyedikre megint 2 lehetőség van, *A* és *C*, és így tovább. A páratlan sorszámú ugrások során – az utolsó ugrás előtt – mindig a *B*-re kell ugrani, míg a páros sorszámú ugrások során mindig 2 lehetőség van, *A* és *C*. Végül a 13. ugrás során, akár *A*-n van előtte, akár *C*-n, onnan a *D*-re kell ugrania. Mivel hat páros sorszámú ugrásra kerül sor, így hat esetben dönthet kétféleképpen, tehát a lehetőségek száma $2^6 = 64$.

További kérdéseket is fel lehet tenni. Mennyi a valószínűsége, hogy 13 lépés után ér véget az ugrálás? Mivel mind a 13 lépés során kétfelé ugorhat a kenguru, az összes esetek száma 2^{13}, így a keresett valószínűség $\frac{2^6}{2^{13}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

További kérdések: Hányféle olyan lépéssorozat képzelhető el, ami n lépés után ér véget? Ha n páros, akkor nincs ilyen lépéssorozat, ha páratlan, akkor az $n = 2k + 1$ lépésből álló lépéssorozatok száma 2^k .

Feladat:

Az Ugorj, kenguru! nevű játékban egy kengurubábu ugrál a jobb oldali táblán. Kezdetben az A pontban áll a kenguru, és minden lépésben a játék menetétől függően valamelyik szomszédos mezőre ugrik. Ha az F jelű mezőre érkezik, a játék véget ér. Hányféle olyan játékmenet képzelhető el, amely éppen 13 lépésből áll?

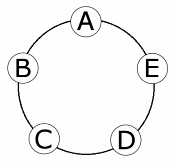


Megoldás:

Az első ugrás után a *B*-n lesz, a 3. ugrás után a *B*-n vagy a *D*-n, és egészen a 11. ugrásig minden páratlan sorszámú ugrás után szintén e két pont valamelyikén lesz. Mindkét pontról 3-féleképpen ugorhat tovább: a *B*-ről *BAB*, *BCB* és *BCD*, a *D*-ről pedig *DED*, *DCD* és *DCB* a lehetséges ugrássorozatok. Amikor tehát az első ugrással a *B*-re ér, 3-féle ugrássorozat áll rendelkezésére, de bármelyiket választja, végül a 3. ugrásban *B*-re vagy *D*-re ér. Innen megint 3-féle módon juthat az 5. ugrással *B*-re vagy *D*-re, aztán ugyanez igaz a 7., 9. és 11. ugrás utáni *B*-re vagy *D*-re érkezésre. Ez azt jelenti, hogy eddig $3^5 = 243$ módon történhetett az ugrálás. Ha a 11. ugrással a *B*-re ért, akkor innen két ugrással az *A*-n át tud csak az *F*-re érni, ha pedig a *D*-re érkezett, akkor csak az *E*-n keresztül, azaz itt már egyértelmű, merre kell ugrania.
Itt is megkérdezhetjük, hogy hány olyan lépéssorozat képzelhető el, ami n lépés után ér véget. Természetesen itt is azt mondhatjuk, hogy csak páratlan n-re van ilyen lépéssorozat. Ha $n = 2k + 1 \geq 3$, akkor a fenti gondolatmenet alapján a lehetséges lépéssorozatok száma 3^{k-1} . Ha pedig $n = 1$, akkor nyilván 1 lehetőség van, az, hogy rögtön az *F* pontba lép.

Feladat:

Az Ugorj, kenguru! nevű játékban egy kengurubábu ugrál a jobb oldali táblán. Kezdetben az A pontban áll a kenguru, és minden lépésben a játék menetétől függően valamelyik szomszédos mezőre ugrik. Ha az E jelű mezőre érkezik, a játék véget ér. Hányféle olyan játékmenet képzelhető el, amely éppen 14 lépésből áll?



Megoldás:

Az első ugrás után biztosan a *B* pontban lesz. Mivel nem kerülhet a 14. ugrás előtt az *E* pontra, így minden páratlan ugrás után a *B* vagy a *D* pontban kell lennie. Ahhoz, hogy végül az *E*-re jusson, a 13. ugrás után a *D* pontban kell lennie. A *B* pontra mindig kétféleképpen juthat a *B* pontról (*BAB* és *BCB* útvonalon), illetve egyféleképpen a *D*-ről (*DCB* útvonalon) két ugrással. Vagyis ha tudjuk, hogy valahány ugrás után hányféleképpen juthatott a *B*, illetve *D* pontra, akkor az előbbi kétszereséhez utóbbit hozzáadva megtudjuk, hányféleképpen juthat kettővel több ugrással a *B* pontra. Hasonlóan végiggondolható, hogy a *D* pontra a *D*-ből is egyféleképpen (*DCD*) és a *B*-ből is egyféleképpen (*BCD*) lehet eljutni két ugrással. Ha $b(n)$-nel, illetve $d(n)$ jelöljük azt, hogy hányféleképpen lehet *n* ugrással a *B*, illetve a *D* pontba eljutni, akkor a következőket mondhatjuk: egyrészt $b(1)=1$ és $d(1)=0$, továbbá minden pozitív *n*-re

$$b(2n+1)=2\cdot b(2n-1)+d(2n-1) \text{ és } d(2n+1)=b(2n-1)+d(2n-1)$$

összefüggés. Ezek alapján páratlan lépések után meghatározható, hányféleképpen lehet eljutni, az alábbi táblázat kitöltésével:

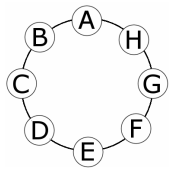
n	1	3	5	7	9	11	13
b(n)	1	2	5	13	34	89	-
d(n)	0	1	3	8	21	55	144

Ha 13 ugrással 144-féleképpen lehet a *D* pontban úgy, hogy előtte nem járt az *E*-ben, akkor ennyiféleképpen lehet 14 ugrás után először az *E*-ben.
A táblázatban szereplő számokat látva feltűnik, hogy a Fibonacci-sorozat elemeit látjuk. Bizonyítsuk be, hogy ez a megfigyelés a továbbiakban is igaz!

A Fibonacci-sorozat első néhány eleme $f(0)=0$, $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=2$, a további elemekre pedig $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$. Eddig a táblázat alapján azt lehet megfigyelni, hogy $b(2k+1)=f(2k+1)$, továbbá $d(2k+1)=f(2k)$.
Az előbb már használt összefüggések alapján felírhatók a következők:

$$d(2n+1)=b(2n-1)+d(2n-1)=f(2n-1)+f(2n-2)=f(2n)$$
$$b(2n+1)=2\cdot b(2n-1)+d(2n-1)=f(2n-1)+\left[f(2n-1)+f(2n-2)\right]=$$
$$=f(2n-1)+f(2n)=f(2n+1)$$

Teljes indukcióval bizonyítottuk tehát, hogy mindkét megfigyelés a továbbiakban is igaz, öröklődik.



Lehetséges, hogy páratlan sok lépésben ér véget a játék? Igen, pl. akár 1 lépésben is, egyféleképpen. De 3, 5, 7, … lépésben is véget érhet, hasonló gondolatmenettel dolgozhatunk, mint az imént, sőt, még az előbb elmondott képletek, összefüggések is érvényben maradnak. Egy dolog változik: két lépéssel a vége előtt ezúttal a *B* pontban kell lenni, innen az utolsó előtti lépésben az *A*-ra, majd az utolsóban az *E*-re lépünk, itt nincs választási lehetőségünk. Vagyis annyiféleképpen érhet véget a játék $2n+1$ lépésben, ahányféleképpen $2n-1$ lépés után a *B* pontba juthatunk, az *E* pont érintése nélkül. Azaz $b(2n-1)=f(2n-1)$-féleképpen. Pl. ahhoz, hogy 13 lépés után érjen véget, a 11. lépés után kell a B-be érni, ez a táblázat alapján 89-féleképpen lehet.

Feladat:

Az Ugorj, kenguru! nevű játékban egy kengurubábu ugrál a jobb oldali táblán. Kezdetben az A pontban áll a kenguru, és minden lépésben a játék menetétől függően valamelyik szomszédos mezőre ugrik. Ha a H jelű mezőre érkezik, a játék véget ér. Hányféle olyan játékmenet képzelhető el, amely éppen 11 lépésből áll?

Megoldás:

Az első ugrás után a *B*-ben lesz a bábu, és minden páratlan sorszámú ugrás után csak a *B*, *D* vagy *F* pontokba lehet, egészen addig, míg a 11. ugrásra a *H*-ra nem ér. Hogy ezt megtehesse, a 9. ugrással a *B* vagy az *F* pontokra kell érnie. A kérdés az, hogy ezt hányféleképpen tudja megtenni. Jelölje b_n azt, hogy hányféleképpen érhet a bábu *n* ugrással a *B* pontra. Hasonlóan értelmezzük a d_n és f_n jelöléseket a *D* és az *F* pontokkal kapcsolatban. Nyilván mindhárom sorozatot csak páratlan indexekre kell vizsgálni. Hogy juthat az n-edik ugrással a bábu a B-re? Ha 2 lépéssel előtte is ott volt, akkor kétféleképpen, (BAB és BCB), míg ha 2 lépéssel előtte a D-ben volt, akkor egyféleképpen (DCB). Jelöléseinkkel ezt a következő formában írhatjuk fel: $b_n = 2 \cdot b_{n-2} + d_{n-2}$. A másik két sorozatra hasonló okoskodással a következő rekurzív formulák adódnak:

$$d_n = 2 \cdot d_{n-2} + b_{n-2} + f_{n-2},$$

valamint

$$f_n = 2 \cdot f_{n-2} + d_{n-2}.$$

A rekurziók segítségével oszlopról oszlopra haladva kitölthető a jobb oldali táblázat, miután kitöltjük az első oszlopot, kihasználva, hogy első lépésre a bábu csak B-ben lehet. Mivel 9 ugrással a B-be 42, az F-be 26 módon tud eljutni, így 11 ugrással a H-ba $42+26=68$-féleképpen.

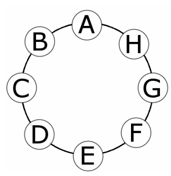
n	1	3	5	7	9
b_n	1	2	5	14	42
d_n	0	1	4	14	48
f_n	0	0	1	6	26

Az általánosításhoz vezessük be a $k_n = b_n + f_n$ jelölést. Némi algebrai ügyeskedéssel kapjuk, hogy páros indexre nyilván 0 az értéke, a kezdeti két érték páratlan index esetén $k_1 = 1$ és $k_3 = 2$, a további indexekre pedig $k_{2n+1} = 4k_{2n-1} - 2k_{2n-3}$. A másodrendű rekurziók Fibonacci-sorozatoknál megismert módszerével ebből megkapható az általános formula:

$$k_{2n+1} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n}{2}.$$

Feladat:

Az Ugorj, kenguru! nevű játékban egy kengurubábu ugrál a jobb oldali táblán. Kezdetben az A pontban áll a kenguru, és minden lépésben a játék menetétől függően valamelyik szomszédos mezőre ugrik. Hányféleképpen lehet a bábu a szemközti, E pontban 2012 lépés múlva?



Megoldás:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	2	0	6	0	20	0	72	0	272
B	1	0	3	0	10	0	36	0	136	0
C	0	1	0	4	0	16	0	64	0	256
D	0	0	1	0	6	0	28	0	120	0
E	0	0	0	2	0	12	0	56	0	240
F	0	0	1	0	6	0	28	0	120	0
G	0	1	0	4	0	16	0	64	0	256
H	1	0	3	0	10	0	36	0	136	0

Az előző feladatcsokor egyik variációs lehetősége, annyit módosítottunk, hogy nem áll meg a játék, amikor bizonyos mezőre ér a bábu. Kezdjünk megfigyeléseket tenni, írjuk be egy táblázatba, hogy melyik pontba hány lépés után hányféleképpen juthatok el. Mivel mindegyik pontba a két szomszédjából juthatok, így az előző lépésben a két szomszédos pontnál lévő számok összege adja a keresett értéket. Folytassuk, ha kell a táblázat kitöltését, amíg sejtéseket nem tudunk megfogalmazni. Nézzük csak a páros sorszámú lépéseket. Használjuk az előző feladat jelöléseit!

Sejtéseink: $c(2k) = g(2k) = 2^{2k-2}$, $a(2k) = 2^{2k-2} + 2^{k-1}$ és $e(2k) = 2^{2k-2} - 2^{k-1}$.

Igazak a következő rekurzív összefüggések is:

$$
\begin{aligned}
a(2k) &= 2 \cdot a(2k-2) + c(2k-2) + g(2k-2) \\
c(2k) &= 2 \cdot c(2k-2) + a(2k-2) + e(2k-2) \\
e(2k) &= 2 \cdot e(2k-2) + c(2k-2) + g(2k-2) \\
g(2k) &= 2 \cdot g(2k-2) + e(2k-2) + a(2k-2).
\end{aligned}
$$

Ezek felhasználásával a sejtéseket igazolhatjuk teljes indukcióval. Látjuk ugyanis, hogy kis *k*-kra teljesülnek. Ezután jöhet az indukciós lépés, amit természetesen mindegyik sejtésre meg kell tenni!

$$
\begin{aligned}
e(2k+2) &= 2 \cdot e(2k) + c(2k) + g(2k) = 2 \cdot 2^{2k-2} - 2 \cdot 2^{k-1} + 2^{2k-2} + 2^{2k-2} = 2^{2k} - 2^{k} \\
c(2k+2) &= 2 \cdot c(2k) + a(2k) + e(2k) = 2 \cdot 2^{2k-2} + 2^{2k-2} + 2^{k-1} + 2^{2k-2} - 2^{k-1} = 2^{2k} \\
g(2k+2) &= 2 \cdot g(2k) + e(2k) + a(2k) = 2 \cdot 2^{2k-2} + 2^{2k-2} - 2^{k-1} + 2^{2k-2} + 2^{k-1} = 2^{2k} \\
a(2k+2) &= 2 \cdot a(2k) + c(2k) + g(2k) = 2 \cdot 2^{2k-2} + 2 \cdot 2^{k-1} + 2^{2k-2} + 2^{2k-2} = 2^{2k} + 2^{k}
\end{aligned}
$$

Ezzel a sejtéseket igazoltuk, az eredeti feladat válasza így

$$e(2012) = 2^{2010} - 2^{1005}.$$

A feladatcsokor kapcsán újabb kérdéseket vethetünk fel, megkérdezhetjük, hogy n lépés után melyik pontban milyen valószínűséggel lesz a bábu. Azt kapjuk, hogy – ahol a paritás alapján a bábu lehet – az egyes helyeken a megtalálás valószínűsége egyre jobban kiegyenlítődik, és 25%-hoz tart, ha a lépések száma tart végtelenhez.
Ebben a feladatban nem szerepelt az a feltétel, hogy a játék véget ér, amint a bábu az E pontba lép. Hogy változik a játék, ha hozzávesszük ezt a feltételt? Ez a feladat (2012 helyett n-nel megfogalmazva) a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia egyik feladata volt. Az előző jelöléseket felhasználva a következő rekurzív összefüggések teljesülnek:

$$\begin{aligned}
&e(2k) = c(2k-2) + g(2k-2)\\
&a(2k) = 2\cdot a(2k-2) + c(2k-2) + g(2k-2)\\
&c(2k) = 2\cdot c(2k-2) + a(2k-2)\\
&g(2k) = 2\cdot g(2k-2) + a(2k-2)
\end{aligned}$$

Az első egyenletet a másodikba, illetve a harmadik és a negyedik összegébe helyettesítve a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
&(1)\;\; a(2k) = 2\cdot a(2k-2) + e(2k)\\
&(2)\;\; e(2k+2) = 2\cdot e(2k) + 2\cdot a(2k-2)
\end{aligned}$$

Küszöböljük ki a a függvényt az összefüggésből! A (2) összefüggésből kapjuk:

$$\begin{aligned}
e(2k+4) &= 2\cdot e(2k+2) + 2\cdot a(2k)\\
2\cdot e(2k+2) &= 4\cdot e(2k) + 4\cdot a(2k-2)
\end{aligned}$$

Ezeket egymásból kivonva:

$$e(2k+4) - 2\cdot e(2k+2) = 2\cdot e(2k+2) - 4\cdot e(2k) + 2\cdot\left[a(2k) - 2\cdot a(2k-2)\right]$$

Az (1) összefüggésből kapjuk, hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés értéke $e(2k)$. Ezt beírva az előző egyenletbe, némi rendezéssel kapjuk, hogy

$$e(2k+4) = 4\cdot e(2k+2) - 2\cdot e(2k).$$

Ez egy másodrendű rekurzió. Kihasználva, hogy $e(2)=0$, $e(4)=2$ és $e(6)=8$, a másodrendű rekurziók általános módszerével kapjuk, hogy

$$e(2k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{k-1}-\left(2-\sqrt{2}\right)^{k-1}\right].$$

A feladatsor tovább variálható: növelhetjük az állomások számát, beállíthatjuk tetszőlegesen a végállomást, megálljon a játék az első (második, harmadik, …) odaérkezéskor vagy sem, és így tovább. Mindehhez sok-sok ötletet és jó szórakozást kívánunk az olvasónak.