

Buék 2013

Az alábbi példasort a 11-12-es tagozatos diákoknak ajánlom újrétvetélkedőnek. Az osztályok nagyon különbözőek, ez a sor nagyon nehéznek is bizonyulhat, érdemes lehet könnyíteni rajta.

Kavics Kupa típusú vetélkedőnek gondoltam, tehát 2-4 fős csapatok versenyére. 60-90 perc az ajánlott ráfordítási idő. A kihozott megoldást a tanár nem kommentálja, csak megmondja, hogy jó-e a végeredmény – és beírja érte a pontszámot – vagy megmondja, hogy rossz az eredmény és (–5) pontot ír be. Mínusz 5 pontot többször is lehet kapni ugyanazért a feladatért és ezek nem törölődnek ki a jó megoldás után, amiért a pontot csak egyszer kaphatja meg a csapat.

A levezető tanárnak mellékeltem a végeredmény-lapot és egy pontozólapot is.

Aki hibát talál az írjon emailt a hraskoa@fazekas.hu címemre.

BUÉK!

Hraskó András

Minden feladatra egy-egy nemnegatív egész szám a válasz. Rossz megoldásért minden alkalommal (-5) pont jár, akár többször is ugyanazért a feladatért. Ugyanarra a feladatra többször is kihozható megoldás, de csak egyszer kapható meg érte a megajánlott pontszám. Számológép használható.

1. Ha felírjuk 2013³-t 2013 db egymást követő páratlan szám összegeként, akkor melyik összeadandó lesz a legkisebb? **15 pont**

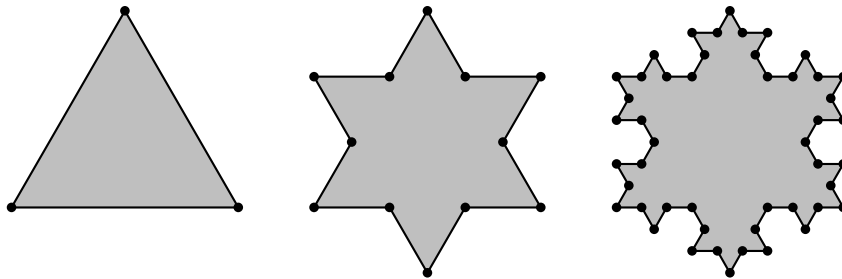
2. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013? **20 pont**

3. Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ kezdőelemekkel, $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurzióval definiált sorozat 2013-adik elemét! **20 pont**

4. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x; y; z)$ rendezett számháromas van, amelyben $x + y + z = 2013$? **20 pont**

5. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 2013 cm, testátlója 2000 cm. Mekkora a felszíne cm²-ben? **25 pont**

6. Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk az ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópehelyt. Az n -edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$ -edik hópehelyt, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.



Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységnél? **25 pont**

7. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $k^2 + n^2 = 2013$? **25 pont**

8. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van amelyre

$$2x + y + 2xy = 2012?$$

25 pont

9. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}, \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2013}(2012)$ értékét! **30 pont**

10. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{2012}$? **30 pont**

11. Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét! **35 pont**

12. Határozzuk meg $N = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012}$ tizedesvesszővel szomszédos egyegy jegyét, tehát adjuk meg a $10N$ egészrészének utolsó két jegyét! **35 pont**

13. Milyen értékhez tart az n -edik és az első hópehely (lásd a 6. feladatot) területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez? Adjuk meg a határérték 100-szorosának egészrészét! **40 pont**

13+1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely éppen 2013-szor akkora, mint prímosztóinak összege? **40 pont**

Feladatok és válaszok

1. Ha felírjuk 2013^3 -t 2013 db egymást követő páratlan szám összegeként, akkor melyik összeadandó lesz a legkisebb? **Válasz: 4050157**

2. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013? **Válasz: 7**

3. Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ kezdőelemekkel, $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurzióval definiált sorozat 2013-adik elemét! **Válasz: 2012**

4. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x; y; z)$ rendezett számhármast van, amelyben $x + y + z = 2013$? **Válasz: 2023066**

5. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 2013 cm, testátlója 2000 cm. Mekkora a felszíne cm^2 -ben? **Válasz: 52169**

6. Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk az ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópehelyt. Az n -edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$ -edik hópehelyt, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.

Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységénél? **Válasz: 24**

7. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $k^2 + n^2 = 2013$? **Eredmény: 0**

8. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van amelyre

$$2x + y + 2xy = 2012?$$

Válasz: 16

9. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}, \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2013}(2012)$ értékét! **Válasz: 2012**

10. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{2012}$? **Válasz: 3**

11. Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét!

Válasz: 740

12. Határozzuk meg $N = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012}$ tizedesvesszővel szomszédos egy-egy jegyét, tehát adjuk meg a $10N$ egészrészének utolsó két jegyét! **Válasz: 79**

13. Milyen értékhez tart az n -edik és az első hópehely (lásd a 6. feladatot) területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez? Adjuk meg a határérték 100-szorosának egészrészét! **Válasz: 160**

13+1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely éppen 2013-szor akkora, mint prímosztóinak összege? **Válasz: 169092**

Feladatok, válaszok, indoklás

1. Ha felírjuk 2013^3 -t 2013 db egymást követő páratlan szám összegeként, akkor melyik összeadandó lesz a legkisebb? **15 pont**

Válasz: 4050157

Indoklás: $2013^2 - 2 \cdot \frac{2013-1}{2} = 4050157$

2. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0 , utolsó eleme a 2013 ? **20 pont**

Válasz: 7

Indoklás: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, így 2013 önmagánál kisebb pozitív osztóinak száma 7 .

3. Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ kezdőelemekkel, $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurzióval definiált sorozat 2013 -adik elemét! **20 pont**

Válasz: 2012

Indoklás: A sorozat hatos periódusú, a 2013 -adik elem a harmadik elemmel egyezik meg.

4. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x; y; z)$ rendezett számháromas van, amelyben $x + y + z = 2013$? **20 pont**

Válasz: 2023066

Indoklás: Osszunk fel egy 2013 egység hosszú szakaszt három részre! A három rész balról jobbra: x , y , z . Az osztópontok 1 -nél, 2 -nél, \dots 2012 -nél lehetnek, tehát $\binom{2012}{2} = 1006 \cdot 2011 = 2023066$ lehetőség van.

5. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 2013 cm, testátlója 2000 cm. Mekkora a felszíne cm^2 -ben? **25 pont**

Válasz: 52169

Indoklás: $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2013^2 - 2000^2 = 52169$.

6. Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk az ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópehelyet. Az n -edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$ -edik hópehelyet, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.

Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységnél? **25 pont**

Válasz: 24

Indoklás: az n -edik hópehely kerülete: $k_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, így a kérdezett érték $\frac{\ln \frac{2013}{3}}{\ln \frac{4}{3}} + 1$ felső egész része.

7. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $k^2 + n^2 = 2013$? **25 pont**

Eredmény: 0

Indoklás: $a^2 \equiv 0$ vagy $1 \pmod{3}$, míg $2013 \equiv 0 \pmod{3}$, így $a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$, de $2013 \not\equiv 0 \pmod{9}$.

8. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van amelyre

$$2x + y + 2xy = 2012?$$

25 pont

Válasz: 16

Indoklás: $(2x + 1)(y + 1) = 2013$ és 2013 -nak 16 egész osztója van, mind páratlan.

9. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x + 7}{x + 3}, \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2013}(2012)$ értékét!

30 pont

Válasz: 2012

Indoklás: $f_3(x) = x$, sőt $f_{3n}(x) = x$, így $f_{2013}(x) = x$.

10. Hány olyan nemnegatív egész számból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{2012}$? **30 pont**

Eredmény: 3

Indoklás: $\sqrt{k} = 2\sqrt{503} - \sqrt{n}$, ahol 503 prím. Négyzetreemelve $4\sqrt{503n} = 2012 + n - k \in \mathbb{N}$, azaz $503n$ négyzetszám, tehát $n = 503\nu^2$ és ugyanígy $k = 503\chi^2$, ahol az eredeti egyenletbe visszaírva $\sqrt{503}$ -mal osztva $\nu + \chi = 2$ adódik.

11. Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét! **35 pont**

Eredmény: 740

Indoklás:

$$\frac{B}{A} = \frac{2012}{\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}} = \frac{2012}{\left(1 + \frac{1}{2012}\right)^{2012}} \approx \frac{2012}{e} \approx 740,$$

ahol amúgy a $\left(1 + \frac{1}{2012}\right)^{2012}$ kifejezés értéke számológéppel is meghatározható.

12. Határozzuk meg $N = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012}$ tizedesvesszővel szomszédos egy-egy jegyét, tehát adjuk meg a $10N$ egészrészének utolsó két jegyét! **35 pont**

Válasz: 79

Indoklás: Az $M = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012} + (\sqrt{20} - \sqrt{13})^{2012}$ szám egész szám, hiszen

$$\begin{aligned} M &= 2 \cdot 20^{2006} + 2 \binom{2012}{2} \cdot 20^{2005} \cdot 13 + \dots \\ &\dots + 2 \binom{2012}{4} \cdot 20^2 \cdot 13^{2004} + 2 \binom{2012}{2} \cdot 20 \cdot 13^{2005} + 2 \cdot 13^{2006}. \end{aligned}$$

Először meghatározzuk M utolsó jegyét.

M -ben a $2 \binom{2012}{2} \cdot 20 \cdot 13^{2005}$ tag 0-ra végződik, a 20-ban magasabb fokú tagok pedig már legalább két nullára végződnek. Így M utolsó jegye megegyezik $2 \cdot 3^{2006}$ utolsó jegyével, ami 8-as.

Másrészt az $N' = (\sqrt{20} - \sqrt{13})^{2012}$ szám rendkívül piciny. Valóban, $(\sqrt{20} - \sqrt{13}) < 0,9$, $(\sqrt{20} - \sqrt{13})^{22} < 0,9^{22} < 0,1$, így $(\sqrt{20} - \sqrt{13})^{2012} < 0,1$.

$N = M - N'$, tehát N egy 8-ra végződő számnál egy századnál kevesebbel kisebb, tehát $N = \dots 7,9\dots$

13. Milyen értékhez tart az n -edik és az első hópehely (lásd a 6. feladatot) területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez? Adjuk meg a határérték 100-szorosának egészrészét! **40 pont**

Válasz: 160

Indoklás: Ha T_n jelöli az n -edik hópehely területét és $T_1 = 1$, akkor

$$T_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad T_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}, \quad T_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \frac{1}{3}, \quad \dots$$

hiszen lépésenként 4-szer annyi oldalszakaszdarab lesz, mint korábban és mind-egyiken egy 9-ed akkora terület, mint korábban.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots \right) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}.$$

13+1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely éppen 2013-szor akkora, mint prímosztóinak összege? **40 pont**

Válasz: 169092

Indoklás: A keresett n szám osztható 2013 prímosztóival, tehát a 3, 11, 61 számokkal. Ha további prímosztói p_1, p_2, \dots, p_k , akkor

$$(3 + 11 + 61 + p_1 + p_2 + \dots + p_k) \cdot 2013 = n.$$

Szükséges, hogy $1 \leq i \leq k$ esetén fennálljon a $p_i \mid (75 + p_1 + p_2 + \dots + p_k)$ reláció és ez az összeg a lehető legkisebb legyen. $k = 2$ -re $p_1 = 2$, $p_2 = 7$ -tel megfelelő számot kapunk, hiszen $75 + 2 + 7 = 84$ osztható 2-vel és 7-tel és nincs a $\{2, 3, 7, 11, 61\}$ halmazba nem tartozó prímosztója. 75-től 83-ig nem kapunk megoldást, így a legkisebb megfelelő szám $84 \cdot 2013 = 169092$.

Csapattagok	1. fel.	2. fel.	3. fel.	4. fel.	5. fel.	6. fel.	7. fel.	8. fel.	9. fel.	10. fel.	11. fel.	12. fel.	13. fel.	14. fel.	Össz.
	15	20	20	20	25	25	25	25	30	30	35	35	40	40	
1.															
2.															
3.															
4.															
5.															
6.															
7.															