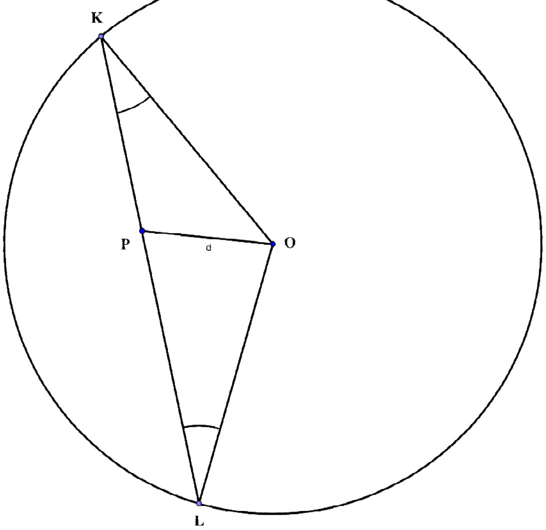
Megoldások, megoldásvázlatok, eredmények

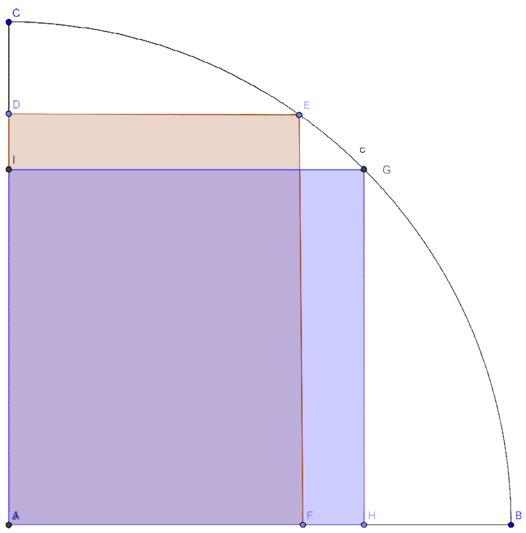
1. Legyen az *ABC* háromszög leghosszabb oldala *AB*, a hozzátartozó magasság m_c, az *AB* oldal tetszőleges belső pontja *P*! A *P* pont *CB* oldaltól való távolsága legyen *x*, *CA* oldaltól való távolsága *y*. Mivel AB a háromszög leghosszabb oldala, ezért AB$\geq$BC és AB$\geq$AC (*). Az ABC háromszög területére felírható, hogy $T_{ABC} = T_{APC} + T_{PBC}$, azaz a (*) egyenlőtlenségek alapján $\frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{BC \cdot x}{2} + \frac{CA \cdot y}{2} \leq \frac{AB \cdot x}{2} + \frac{AB \cdot y}{2}$, tehát $m_c \leq x + y$, amit bizonyítani kellett.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha AC=AB=BC, azaz a háromszög szabályos.



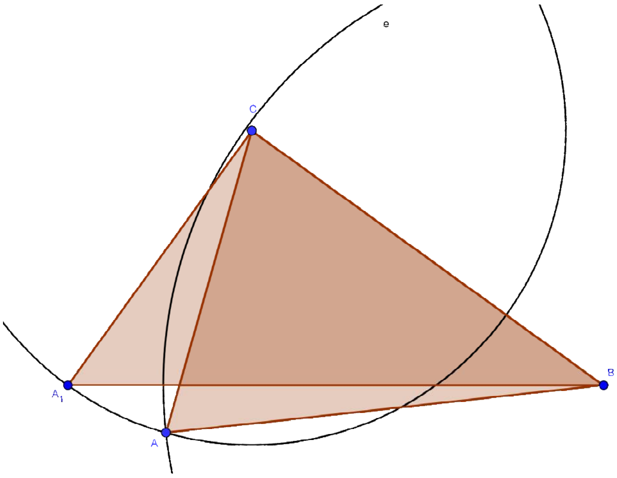
2. A feladat látószögkörív segítségével könnyen megoldható, de most ennél elemibb megoldást adunk rá! Készítsünk ábrát!

A KLO háromszög egyenlő szárú, így a K-nál és az L-nél levő belső szög egyenlő. Mivel $KLO\angle = OLK\angle = 180^\circ - LOK\angle$, így a $OKL\angle$ akkor a legnagyobb, amikor az $LOK\angle$ a legkisebb. Az $LOK\angle$ akkor a legkisebb, amikor a P-n átmenő KL húr a legrövidebb, ez pedig akkor teljesül, ha KL a legtávolabb van az O középponttól. Ez akkor áll fenn, ha OP merőleges KL-re. Tehát az $OKP\angle$ akkor a legnagyobb, ha OP merőleges KL-re.



3. Készítsünk ábrát!

Legyen a BC ív felezőpontja G! Belátjuk, hogy az AHGI négyzet területe nagyobb, mint bármely olyan téglalapé, melynek köríven levő csúcsa nem esik egybe a G ponttal. Hagyjuk el az ábrán látható AFED téglalap és az AFGI négyzet közös részét. Belátjuk, hogy az AFED-ből megmaradó rész területe kisebb, mint az AHGI-ből megmaradó rész területe. Nyilván ED<GI=GH. Másrészt EF-GH<GI-ED, mivel a CB körív G pontjába húzott érintő merőleges AG-re, így 45°-os szöget zár be AB és AC egyenesével. Ezekből már következik az állítás.



4. a)

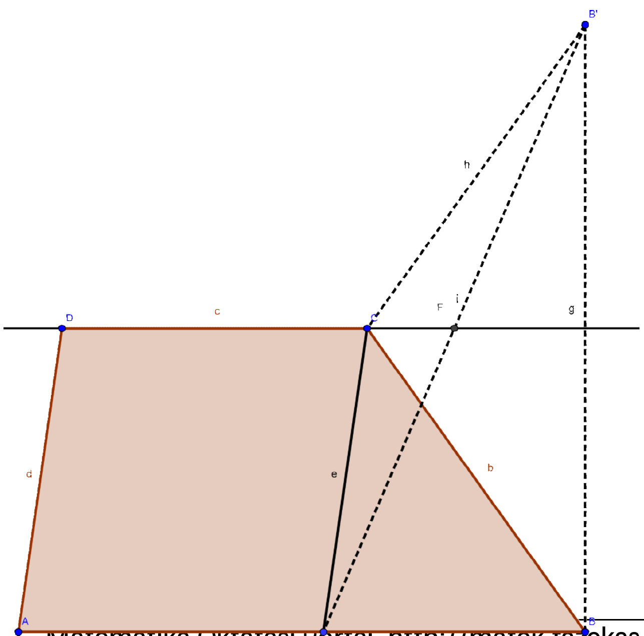
Készítsük el az alábbi ábrát! Az $A_1BC\triangle$ derékszögű, melyre teljesül, hogy $A_1C = AC$, így az $A_1BC\triangle$-ben és a $ABC\triangle$-ben két oldal egyenlő. Az $ACB\angle$ akkor és csak akkor hegyesszög, ha az A_1 pont a *B* középpontú *AB* sugarú körön kívül van, azaz akkor és csak akkor, ha $A_1B > AB$. Ebből pedig már következik, hogy $ACB\angle < 90^{\circ}$ akkor és csak akkor, ha $AB^2 < A_1B^2 = BC^2 + CA_1^2 = BC^2 + CA^2$. Ezt kellett bizonyítani.

Hasonlóan oldható meg a b) rész is.

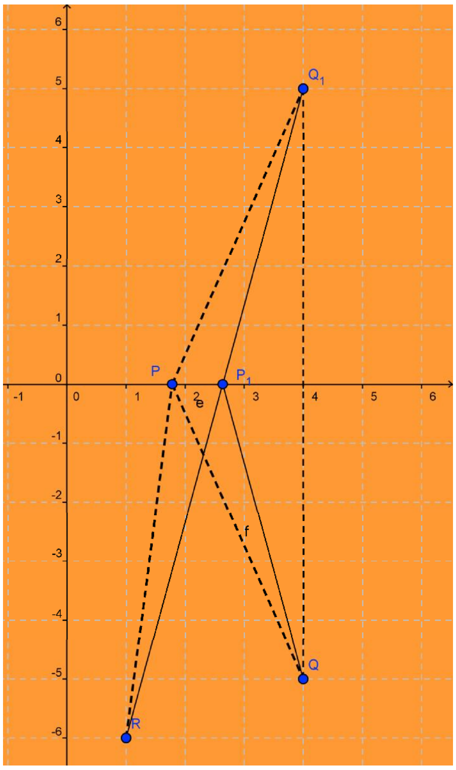
5. A feladat közismert megoldása megtalálható pl. a Geometriai feladatgyűjtemény I. kötetében, vagy N. D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek című könyvében.

II. Geometriai transzformációk, kerületi, középponti szögek

6. Mivel a háromszögek területe 12 területegység az egyik oldaluk pl. AB=6 egység, így ezen oldalhoz tartozó magasságuk m_c =4 egység. A háromszög kerülete akkor minimális, ha az ACB törött vonal hossza minimális, ahol C pont rajta van az AB egyenessel párhuzamos, tőle 4 egység távolságra levő *e* egyenesen. Ezzel a feladatot visszavezettük Héron problémájára. Ez alapján könnyen látható, hogy a kerület minimális, ha a háromszög egyenlő szárú és ekkor a kerület 16 egység.



7. Az alábbi ábra alapján könnyen visszavezethetjük a megoldást Héron problémájára. A trapéz kerülete legalább 56 cm.



8. a) Alakítsuk át teljes négyzetté kiegészítéssel a négyzetgyök alatti kifejezéseket az alábbi módon!

g(x)= $\sqrt{x^2-8x+41}+\sqrt{x^2-2x+37}$

$=\sqrt{(x-4)^2+5^2}+\sqrt{(x-1)^2+6^2}$

Legyen *P*(*x*;0), Q(4;-5) és *R*(1;-6)! Ekkor a távolságképlet alapján

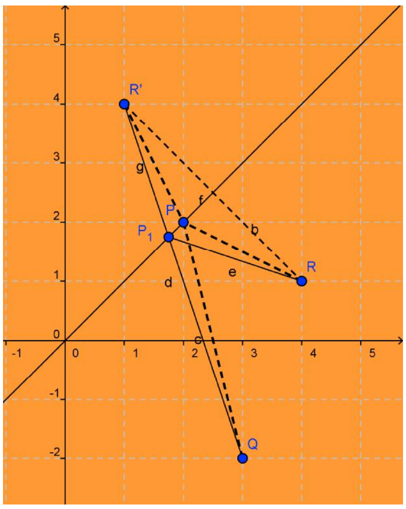
$g(x)=\sqrt{(x-4)^2+5^2}+\sqrt{(x-1)^2+6^2}=PQ+PR$, így innentől kezdve a feladat az, hogy mely *P*(x;0) pont esetén lesz a *PQ*+*PR* összeg minimális.

Ábrázoljuk a pontokat a koordinátasíkon, így a feladat visszavezethető Héron problémájára!

A *g* függvény a minimumát a $P_1(x_1;0)$ pont esetén veszi fel. Ennek koordinátái könnyen kiszámolhatók, hisz felírhatjuk az alábbi aránypárt $\frac{x_1-1}{4-x_1}=\frac{6}{5}$, ahonnan

$x_1=\frac{29}{11}$.

b) Itt is alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté kiegészítéssel!



f(x)=$\sqrt{2x^2-2x+13}+\sqrt{2x^2-10x+17}$

$=\sqrt{(x-3)^2+(x+2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(x-1)^2}$

Legyen *P*(*x*;*x*), *Q*(3;-2) és *R*(4;1)! Ekkor a távolságképlet alapján

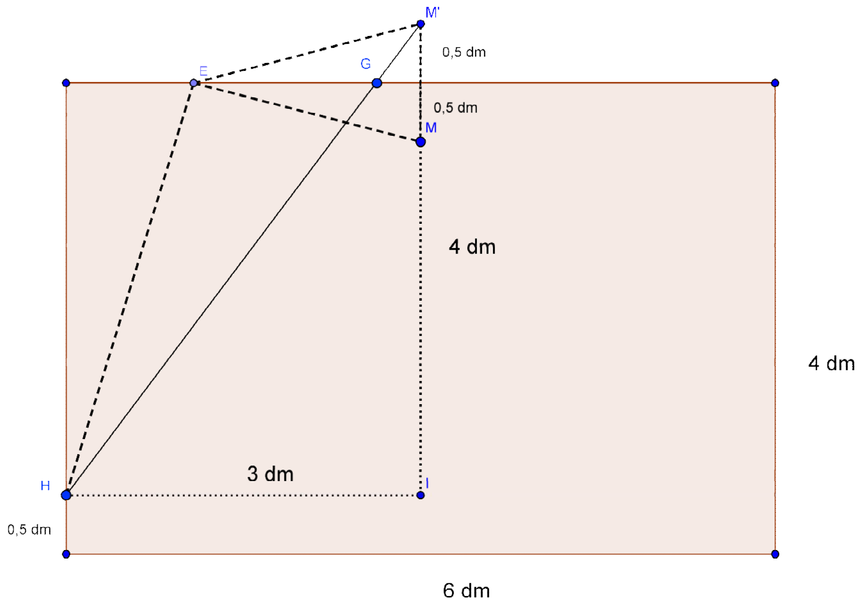
$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(x+2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(x-1)^2}=PQ+PR$

, így innentől kezdve a feladat az, hogy mely *P*(x;x) pont esetén lesz a *PQ*+*PR* összeg minimális. Ábrázoljuk a pontokat a koordinátasíkon, így a feladat visszavezethető Héron problémájára!

Az f függvény a minimumát a $P_1(x_1;x_1)$ pont esetén veszi fel, melyet a QR' egyenes és az y=x egyenes metszéspontjaként kapunk, ahol R' koordinátái R'(1;4). Innen könnyen kiszámolható, hogy a függvény a minimumát $x_1=\frac{7}{4}$-nél veszi fel.

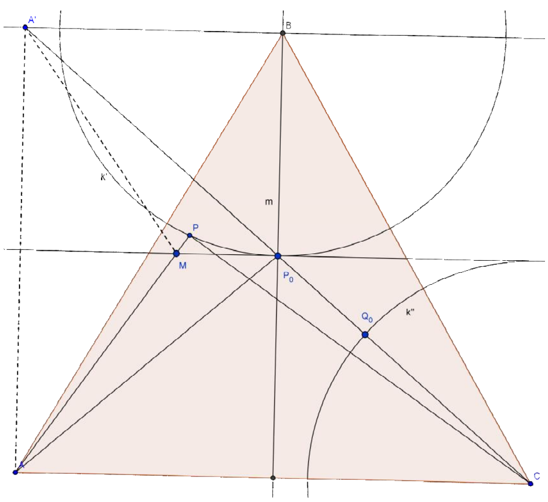
c) Az előzőhöz hasonlóan oldható meg.

9. Könnyen meggondolható, hogy elég csak a kiterített hengerpalásttal foglalkoznunk, mely egy a=4 dm, ill. b=6 dm oldalú téglalap. Készítsünk ábrát!



A feladatot ezzel visszavezettük Héron problémájára. A kérdezett távolság Pitagorasz tétele alapján 5 dm.

10. Az ABC háromszög magasságát jelöljük *m*-mel! Ahhoz, hogy a *B*, ill. *C* csúcsokat ellenőrizni tudja, el kell jutnia a *B*, ill. *C* középpontú *m*/2 sugarú *k*', ill. *k''* körívek egy-egy pontjához. A szimmetria miatt feltehető, hogy a *k'* körív egy *P* pontját éri el, majd innen megy a legrövidebb úton a *k''* ívhez. Ezen utóbbi legrövidebb út nyilván a *PC* egyenesen van. Az *AP*+*PC* út *m*/2-vel hosszabb, mint az *AP*+*PQ* út, így az utóbbi akkor a legrövidebb, ha *AP*+*PC* a legrövidebb.



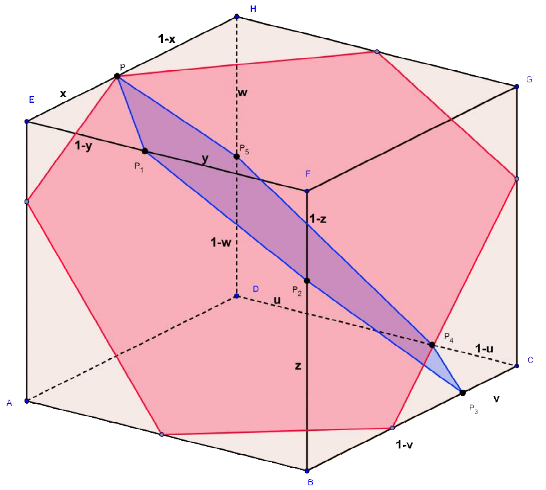
Készítsünk ábrát!

A *k'* íven kell azt a P_0 pontot kiválasztani, mely esetén a $AP_0 + P_0C$ összeg minimális. Bebizonyítjuk, hogy az alkalmas P_0 pont az m magasság és *k'* metszéspontja. Legyen a *k'* ív P_0-tól különböző pontja *P*! Megmutatjuk, hogy $AP_0 + P_0C < AP + PC$. Húzzuk be a *k'* kör P_0-beli e érintőjét! Ennek AP-vel vett metszéspontja legyen *M*! Az *A* pont *e*-re vett tükörképe legyen *A'*! Könnyen meggondolható, hogy A'C átmegy P_0 ponton. Így

Héron problémája alapján $AP_0 + P_0C < AM + MC$, másrészt $MC < MP + PC$ a háromszög egyenlőtlenség miatt. Tehát $AP_0 + P_0C < AP + PC$.

Tehát az A P_0 C töröttvonal alkalmasnak látszik. A feladat teljes megoldásához még hozzátartozik annak végiggondolása, hogy erről az útról az egész háromszög ellenőrizhető. Ezt még gondoljuk végig!

11. A kockának 6 oldalapja van, így a metsző síknak mindegyik lapot metszenie kell. Ilyen jellegű síkokból kétféle helyzetű lehet. Készítsünk ábrát!

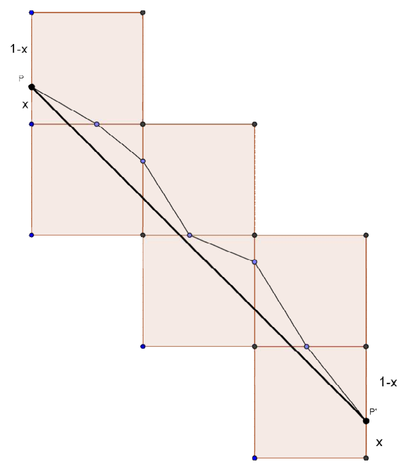


Válasszuk ki $PP_1P_2P_3P_4P_5$ pontokon átmenő síkot! Az ábrán szereplő jelöléseket felhasználva kapjuk, hogy lényegében a

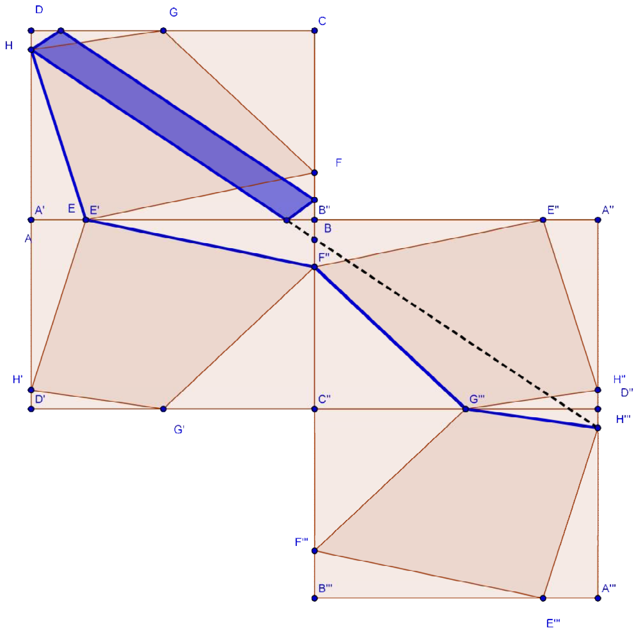
$$h = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-z)^2} + \sqrt{z^2 + (1-v)^2} + \sqrt{v^2 + (1-u)^2} + \sqrt{u^2 + (1-w)^2} + \sqrt{w^2 + (1-x)^2}$$

összeg minimumát keressük. Ilyen jellegű összeggel már találkoztunk a 8. feladatban. Ennek minimalizálásához rajzoljuk fel a kocka hálóját!

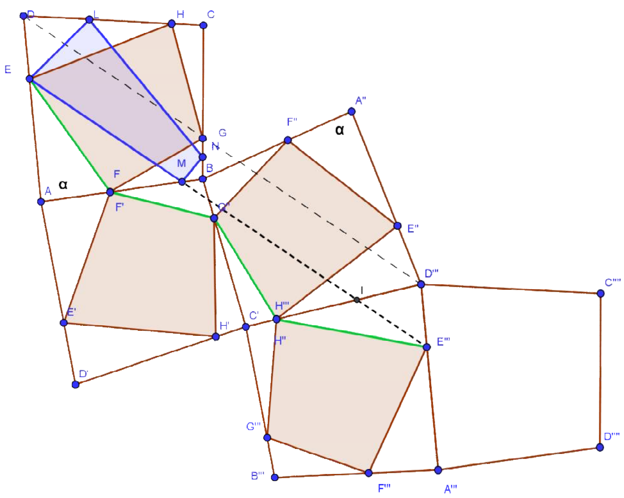
A töröttvonal a P és P’ pontok egyenes szakasszal történő összekötésével minimalizálható. Így a minimális kerületű hatszög kerülete $3 \cdot \sqrt{2}$ egység hosszú.



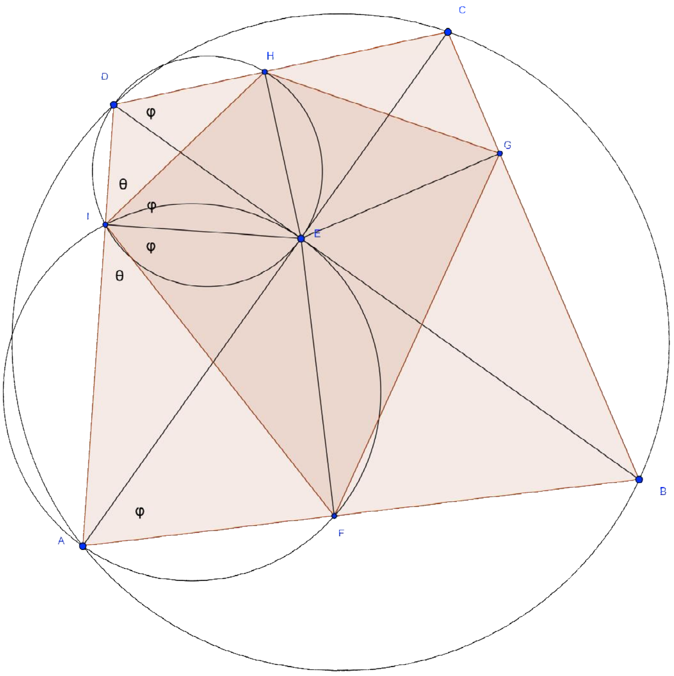
12. A megoldás némileg emlékeztethet az előző feladat megoldására. Ott a háló elkészítésével „kihajtogattuk” a hatszöget. Ebben az esetben is hasonlóan járhatunk el, csak most megfelelő tengelyes tükrözések egymásutánjával érhetjük el ezt a helyzetet, mint azt az alábbi ábra is mutatja. Legyen AD oldalon rögzített a H pont! Vegyük fel innen kiindulva a HEFG négyszöget! Ezután tükrözzük az ábrát az AB, majd a B’C’ és végül a C”B” tengelyre. A tengelyes tükrözések miatt a kékkel jelölt törött vonal hossza egyenlő az HEFG négyszög kerületével. Mivel H rögzített, ezért a harmadik tükrözés után kapott képe H’’’ is rögzített. A H és H’’’ pontokat összekötő szakasz adja a H és H’’’ közötti minimális hosszúságú utat. Ezt „visszahajtogatva” megkapjuk a minimális kerületű négyszöget, ami nyilván paralelogramma. A kerülete Pitagorasz-tétellel könnyen kiszámolható, ami 30 cm. Bárhol is vesszük fel a H pontot az AD oldalon belül, hasonlóan járhatunk el és ugyanilyen eredményre juthatunk.



13. a) Az előző feladatban látottakhoz hasonlóan járhatunk el. Azaz „hajtogassuk ki megfelelő tengelyes tükrözések egymás utáni alkalmazásával a beírt négyszög kerületét!

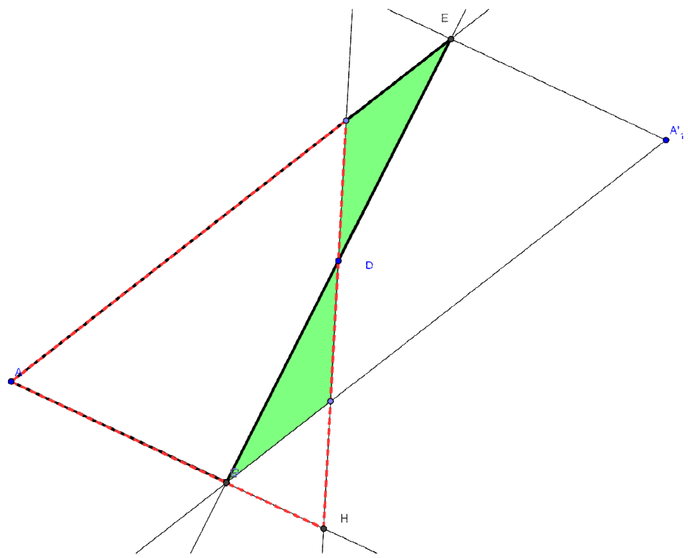


Legyen E pont az AD oldalon rögzített pont! Vegyük fel innen kiindulva az EFGH négyszöget! Ezután tükrözzük az ábrát az AB, majd a B’C’, utána a C”B” , majd csak a húrtnégyszöget az A’’’D’’’ tengelyre. A tengelyes tükrözések miatt a zölddel jelölt törött vonal hossza egyenlő az EFGH négyszög kerületével. Mivel E rögzített, ezért a harmadik tükrözés után kapott képe E’’’ is rögzített és ED=E’’’D’’’. Az első két tengelyes tükrözés szorzata egy B pont körüli 2β szögű, míg a másik két tengelyes tükrözés szorzata egy D’’’ pont körüli 2δ szögű forgatás. Mivel az ABCD négyszög húrnégyszög, ezért a szemközti szögeinek az összege 180°, tehát 2β+2δ=360°. Így a két forgatás szorzata eltolás, tehát AD párhuzamos A’’’D’’’. Így az előzőekből jön, hogy EE’’’D’’’D négyszög paralelogramma, tehát EE’’’, ami a legrövidebb út az E és E’’’ pont között, az E pont választásától függetlenül egyenlő a DD’’’ szakasszal, ami adott húrnégyszög esetén állandó. Tehát az E pont választásától függetlenül az EE’’’ szakasz hossza egyenlő a DD’’’ szakasz hosszával. Ez tehát a legkisebb kerületű beírható négyszög kerületének a hossza, feltéve, hogy ilyen négyszög létezik. Kérdés még az is, hogy az E pont minden helyzetében létrejön-e ilyen legkisebb kerületű négyszög. Ezt mindenképpen meg kell még vizsgálni!



b) A feladat megoldásában az alábbi ábra segít. Az ábrán egy húrnégyszög átlóinak a metszéspontjából merőlegeseket bocsátottunk az oldalaira, így kapjuk az FGHI négyszöget. Bizonyítsuk be az FGHI négyszögről, hogy érintőnégyszög, és azt is, hogy ha az előző tükrözéseket végrehajtjuk az ábrán, akkor az FGHI négyszög kerületének kiterítésével egy szakaszt kapunk! Ehhez gondoljuk végig, hogy az ábrán azonos betűvel jelölt szögek miért egyenlők!

14. Tükrözzük a szöget a megadott pontra, majd húzzuk be az így kapott paralelogramma azon átlóját, amely átmegy az adott ponton. Ez az egyenes vágja le a legkisebb területű háromszöget a szögtartományból. Ennek bebizonyításához húzzunk be egy az átlótól különböző egyenest, amely metszi a szögszárakat és átmegy a megadott ponton. Az ábra alapján innentől kezdve könnyen befejezhetjük a bizonyítást.



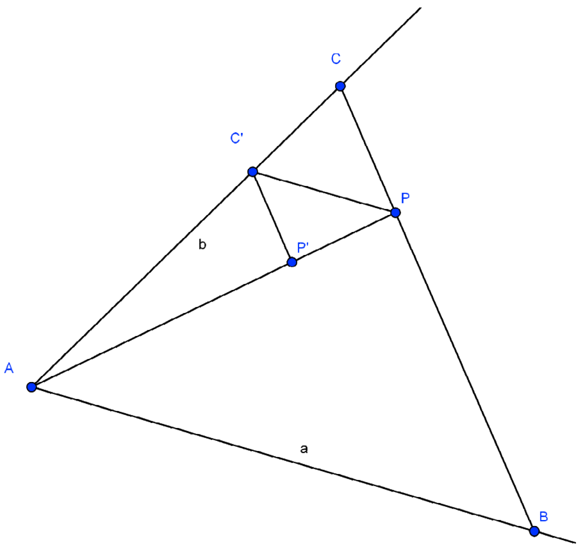
15. A feladat megoldása visszavezethető az előző feladatra. Lényegében adott egy konvex szög ez az $ACB\sphericalangle$, melynek belsejében adott egy pont ez a beírt kör középpontja. Az előző feladat alapján a legkisebb területű *EDC* háromszöget úgy kapjuk, ha az *O* pontra tükrözzük az $ACB\sphericalangle$ -et és $E = B'C' \cap AC$, illetve $D = A'C' \cap BC$. Mivel *O* most rajta van az $ACB\sphericalangle$ szög szögfelezőjén, ezért *ED* merőleges erre a szögfelezőre, tehát az *EDC* háromszög egyenlő

szárú. Már csak azt kell belátni, hogy ennek a területe nem kisebb $2r^2$-nél. Legyen a szögfelező és az *ED* szakasz metszéspontja *F*! Az *EDC* háromszög területe kétszerese az *FDC* háromszög területének. Húzzuk be az *O* pontból a *BC* oldalon levő *G* érintési pontba az *r* sugarat! Ekkor *CG*=*s*-*c*. Mivel a *CFG* háromszög derékszögű, ezért a magasság-tétel alapján $r^2 = CG \cdot GD$, azaz $GD = \frac{r^2}{s-c}$. Így

$$T_{EDC} = 2T_{CFD} = 2\frac{r \cdot CD}{2} = r(CG + GD) = r\left(s - c + \frac{r^2}{s-c}\right) =$$

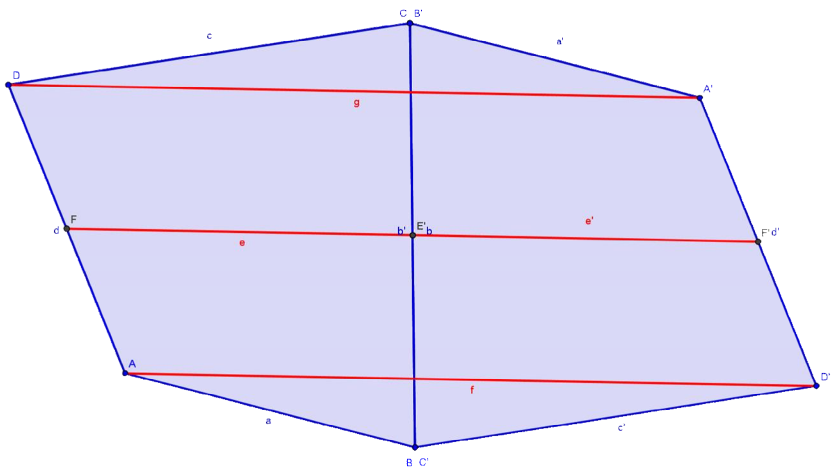
$$= r^2 \cdot \left(\frac{s-c}{r} + \frac{r}{s-c}\right) \geq 2r^2$$

Mivel bármely pozitív szám és reciprokának az összege legalább 2. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az ABC háromszög C csúcsánálderékszög van.



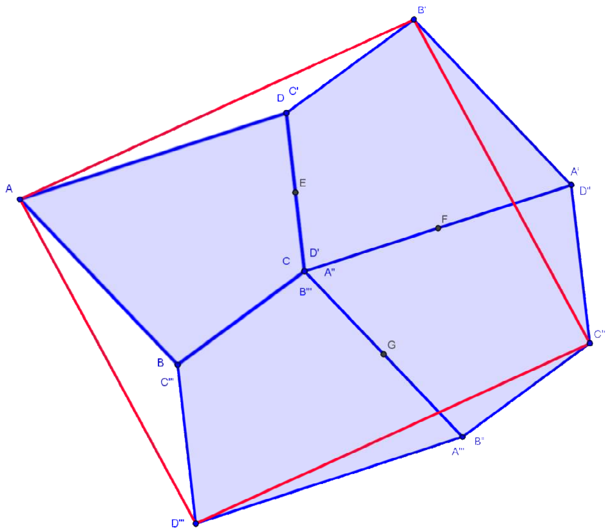
16. Legyen a szög csúcs A! Vegyünk fel a P ponton keresztül egy olyan egyenest, amely metszi a szögszárakat, az egyiket B a másikat C pontban! Legyen C'P párhuzamos AB-vel, míg C'P' párhuzamos BC-vel, ahol C' rajta van AC-n, míg P' az AP-n! Az eddigiekből következik, hogy $AP'C' \sim APC$ és $PP'C' \sim APB$. Ezek alapján az alábbi aránypárokat írhatjuk fel $\frac{C'P'}{CP} = \frac{AP'}{AP}$ és $\frac{C'P'}{BP} = \frac{P'P}{AP}$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $\frac{C'P'}{CP} + \frac{C'P'}{BP} = \frac{AP'}{AP} + \frac{P'P}{AP} = \frac{AP}{AP} = 1$, azaz $\frac{1}{CP} + \frac{1}{BP} = \frac{1}{C'P'}$. Nyílván ez akkor maximális, ha C'P' minimális, ami akkor teljesül, ha C'P' merőleges AP-re, azaz amikor BC merőleges AP-re.

17. Legyen az *ABCD* négyszög *k* középvonala az *a* és *c* oldal számtani közepe! Tükrözzük a négyszöget a *b* oldal *F* felezőpontjára! Könnyen meggondolható, hogy *DA'*=*AD'*=2*k* ≤ a+c, ami azt jelenti, hogy *D, C, A'*, ill. *A, B, D'* egy egyenesre esnek, amik egymással párhuzamosak, így *ABCD* trapéz. Ebből következik, hogy bármely négyszögben két



szemközti oldal számtani közepe nem kisebb, mint a másik két oldalhoz tartózó középvonal.

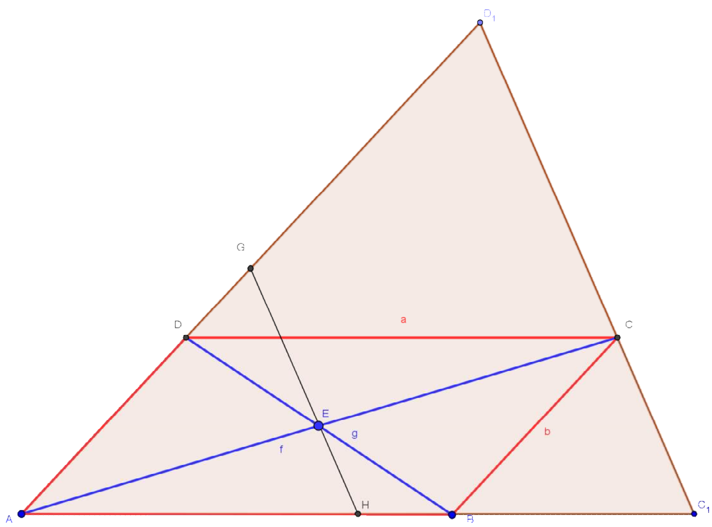
18. Vegyük fel az *ABCD* négyszöget, majd tükrözzük a *DC* oldal *E* felezőpontjára, majd az így kapott *A'B'C'D'* négyszöget a *D'A'* oldal *F* felezőpontjára és végül az *A"B"C"D"* négyszöget az *A"B"* oldal *G* felezőpontjára. Vegyük fel az *AB'C"D"'* négyszöget az alábbi ábra szerint. Az $AD'''B\triangle \cong B'C''A'\triangle$ és $ADB'\triangle \cong B''C''D'''\triangle$ mivel két-két oldaluk és az általuk bezárt szög egyenlő. Így *AD'''*=*C''B'* és *AB'*=*C''D'''*, tehát *AB'C''D'''* négyszög paralelogramma, másrészt a területe

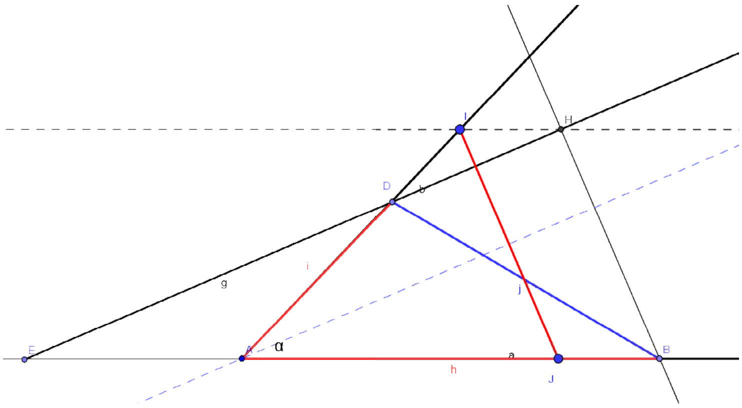


egyenlő a négy darab négyszög területének az összegével. Ez alapján a háromszög egyenlőtlenség és a paralelogramma területképlete alapján felírhatjuk, hogy

$$4T_{ABCD} = T_{AB'C''D'''} \leq AB' \cdot B'C'' \leq (AB+CD)(AD+BC)$$

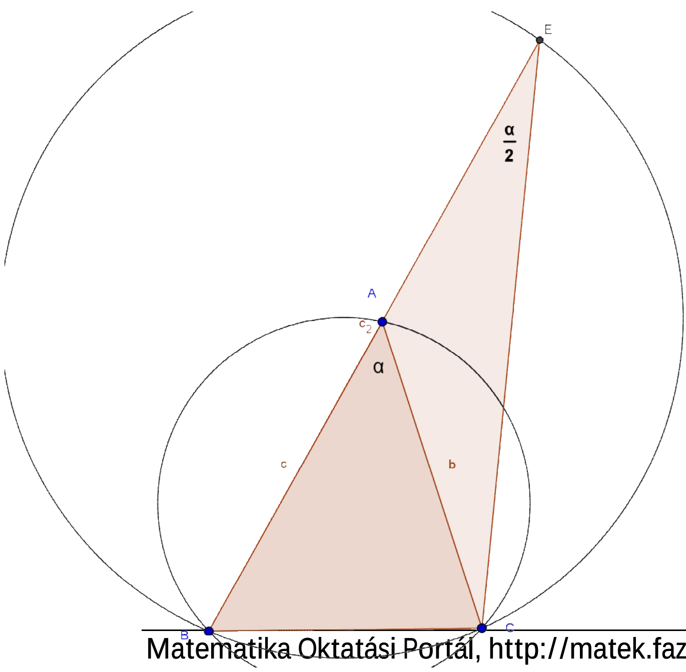
Azaz $T_{ABCD} \leq \dfrac{(AB+CD)(AD+BC)}{4}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *AB'C"D'''* négyszög téglalap és $AB' = \dfrac{AB+CD}{2}$ és $B'C = \dfrac{AD+BC}{2}$, ami pontosan akkor van, ha az *ABCD* négyszög téglalap.





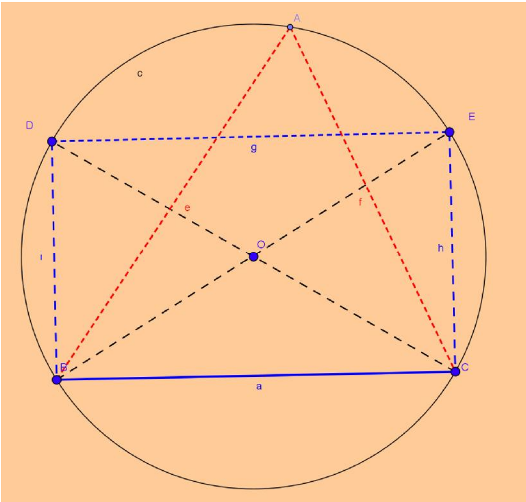
19. A Δ középvonalára vonatkozó ismert tétel miatt az oldalak felezőpontjai által meghatározott négyszög paralelogramma, melynek szemközti oldalai az *AC* ill. *BD* átlóval párhuzamosak és fele akkorák, így kerülete: $k = AC + BD$. Vegyük fel az oldalt látható ábrát! Legyen a BC_1=b, ekkor az AC_1D_1háromszög egyenlő szárú. A két átló metszéspontja végig a HG középvonalon van, így DB nem kisebb HG és AC nem kisebb a D_1C_1 oldalhoz tartozó magasságnál. Az utóbbi triviális, az előbbihez készítsünk egy ábrát! Legyen EB=AB+BC és EH egyenes párhuzamos az α szög felezőjével. Legyen BH merőleges EH-ra és IA=AJ=(AB+BC)/2. Ekkor IJ merőleges az α szög felezőjére, így EH-ra is, ezért párhuzamos és egyenlő BH-val, ami viszont kisebb, mint BD. Tehát BD akkor lesz minimális, ha B=J és D=I. Visszatérve az első ábrára a két átló összege akkor a legkisebb, ha D=G és B=C. Mivel a paralelogramma kerülete ilyen feltételek mellett állandó, így könnyen meghatározható a minimum.

20. A vizsgált háromszögek adott oldallal szemközti csúcsa (*A*) egy α szögű látószögköríven mozog. Tekintsük ennek egyik ívét és hozzuk létre az ábrának megfelelően a b+c szakaszt. Amikor ez maximális, akkor maximális a kerület is, hisz az *a* szakasz hossza állandó. Mivel az *ACE* háromszög egyenlő szárú, így



$BEC\angle = \frac{\alpha}{2}$, tehát az *E* pont mindig a *BC* szakasz fölé rajzolt α/2 szögű látószögköríven mozog. A *BE=b+c* szakasz akkor maximális, ha az az ábrán felvett nagyobb körnek az átmérője, azaz amikor *ABC* háromszögben *b*=*c*.

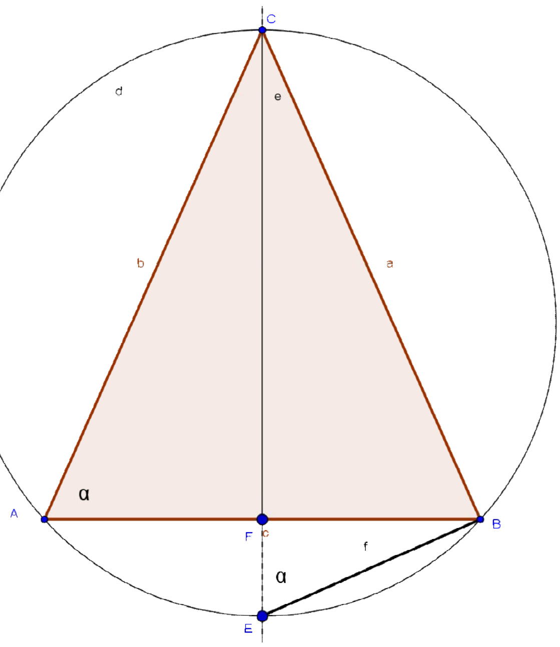
21.



Gondoljuk meg, hogy elég az *n*=3 esettel foglalkoznunk. Legyen n>3 és a sokszög leghosszabb oldala legyen BC! Tekintsük a kör CD, ill. BE átmérőjét! Nem lehet a sokszög minden csúcsa csak a BCE, vagy csak a DBC íven, mert akkor a sokszögnek nem lenne belső pontja a kör középpontja. Így van csúcsa az EDB és a CED íven is. Ha van csúcs a rövidebb ED íven belül pl. A, akkor az ABC háromszög tartalmazza a kör középpontját és a kerülete rövidebb, mint a sokszög kerülete, tehát elég lenne ezzel az esettel foglalkozni. Ha nincs, akkor két eset lehetséges. Az első az, amikor legfeljebb az egyik esik egybe a D vagy az E ponttal. Ebben az esetben ez a két csúcs szomszédos lenne, de az általuk meghatározott oldal nagyobb lenne BC-nél. Ez ellentmondás. Ha mindkettő egybeesik D-vel ill. E-vel, akkor a sokszög kerülete nem kisebb az EDBC téglalap kerületénél, ami nyilván nagyobb 4-nél.

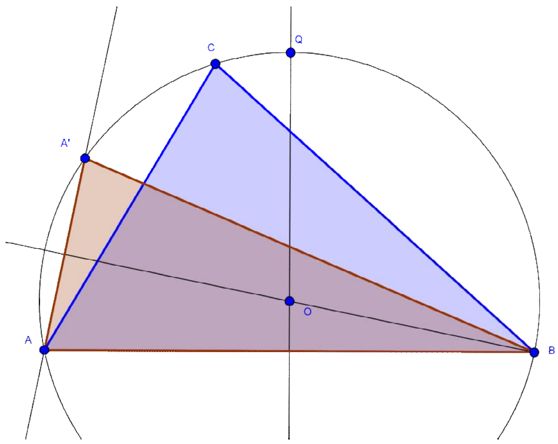
Nézzük az n=3 esetet!
A megoldást bontsuk két részre.

1. eset: A háromszög egyenlő szárú
   Vegyük fel az alábbi ábrát.

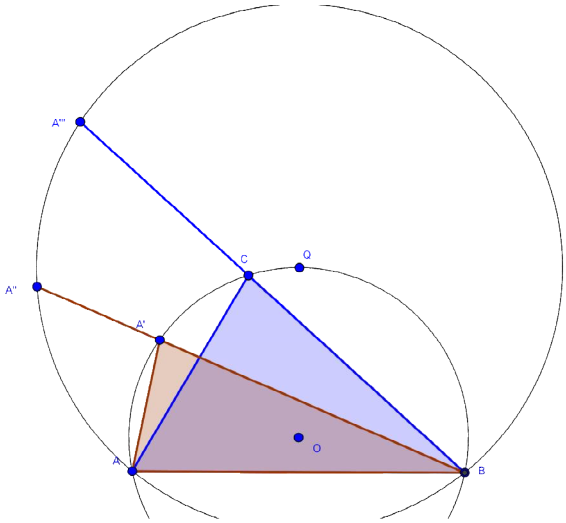


Mivel az ABC háromszög tartalmazza a kör középpontját, ezért α>45°. A $CEB\sphericalangle = a$ a kerületi szögek tétele értelmében. Mivel α>45°, ezért c/2=FB>FE. Így 2=CE=CF+FE<a+c/2. Innen a+b+c>4.

2. eset: Az ABC háromszög nem egyenlő szárú

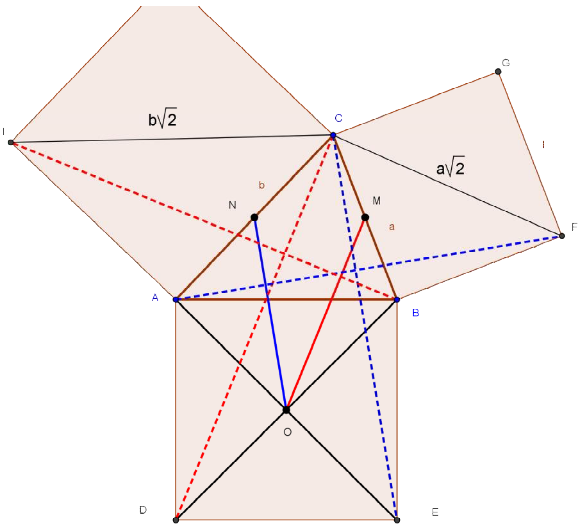


Gondoljuk meg ezt az esetet is! Ekkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy AB>BC>CA! Legyen a BA oldal BO átmérőre vett tükörképe BA'! Ekkor BA'>BC, ezért C közelebb van az AB ív Q felezőpontjához, mint az A' pont. Lásd az ábrát!

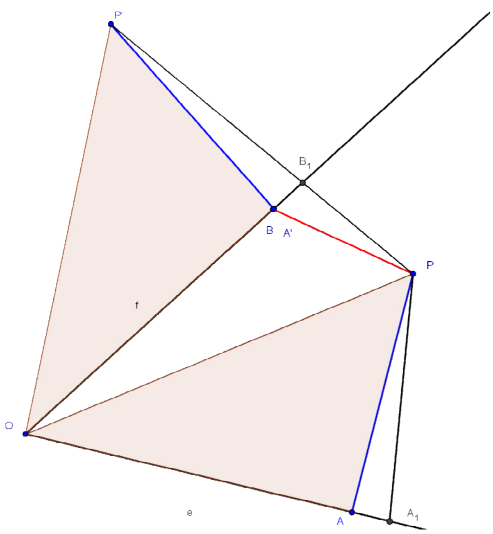


Hajtsuk ki az AC és az AA' oldalakat az alábbi ábrának megfelelően! Abból könnyen jön, hogy AB+BC+CA>AB+BA'+AA'>4.

22. Készítsünk ábrát!

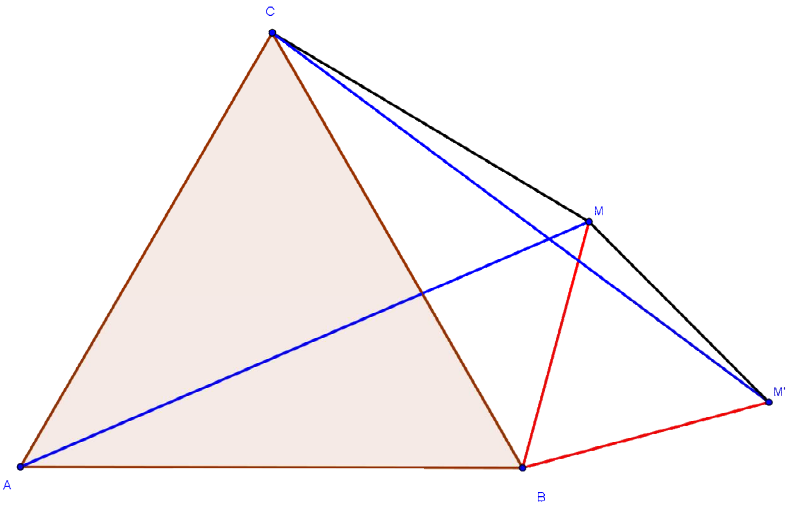


Vegyünk fel az ábrának megfelelően a *BC* és a *CA* oldalra is egy-egy négyzetet. Vegyük fel a *CD, CE, AF* és *IB* szakaszokat! A *CDB* háromszögben, illetve a *CAE* háromszögben az *OM* ill. az *ON* középvonalak, ezért $OM+ON=\dfrac{CD+CE}{2}$, tehát ez az összeg akkor maximális, ha a *CD+CE* összeg maximális. Nyilván az *ABF* háromszög a *CEB* háromszög *B* körüli -90°-os elforgatotja, míg az *IAB* háromszög a *CAD* háromszög *A* pont körüli 90°-os elforgatotja, így *CE=AF* és *CD=BI*. Tehát a *CD+CE* összeg akkor maximális, ha *IB+AF* maximális. Ezen utóbbi pedig akkor következik be, ha *A, C, F* ill. *B, C, I* pontik egyegyenesre esnek, ami $ACB\angle =135^{\circ}$ esetén következik be.



23. Készítsünk ábrát!
Vegyük fel úgy az *A* és *B* pontokat, hogy *OA*=*OB* teljesüljön! Forgassuk el az *OAP* háromszöget az *O* pont körül $BOA\sphericalangle$ -gel, így az *OBP'* háromszöghöz jutunk. Ilyen forgatás esetén a *B* és az *A* pont helyzetétől függetlenül az adott *P* pont képe mindig a *P'* pont lesz. Az *AP*+*PB* összeg akkor minimális, ha a *PB*+*BP'* összeg minimális, hisz a forgatás miatt *AP*=*BP'*. Ezen utóbbi összeg viszont akkor minimális, ha B pont egybeesik B_1 ponttal, ami a *PP'* szakasz és az *f* szögszár metszéspontja. Így megkapjuk a megfelelő *A* pontot is, ami az ábrán az A_1 pont.

24. Ha *MA* nem a legnagyobb szakasz a három szakasz közül akkor készen vagyunk. Legyen $MA \geq MB$ és $MA \geq MC$! Forgassuk el az *MAB* háromszöget az ábrának megfelelően a *B*



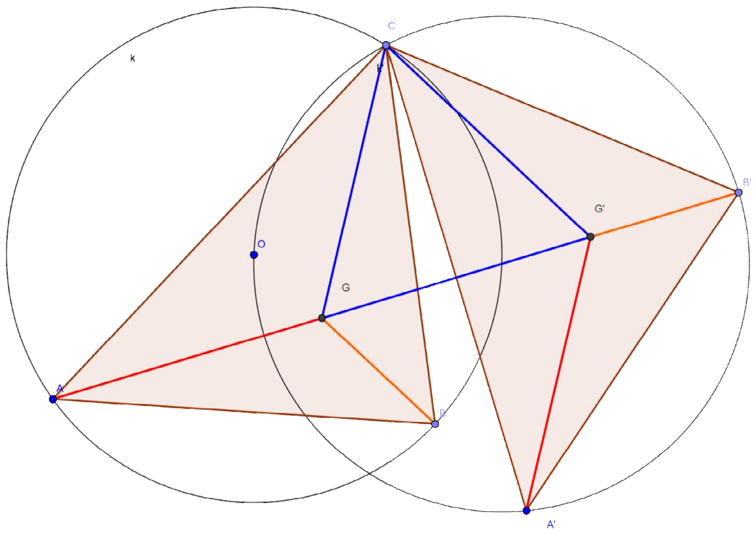
pont körül -60°-kal, ekkor a *BM'C* háromszöget kapjuk. A háromszög egyenlőtlenséget alkalmazva a *CM', M'M, MC* szakaszokra kapjuk, hogy $AM=CM' \leq CM+MM'=CM+BM$, mivel *MM'*=*BM*, hisz a *BMM'* háromszög a forgatás miatt szabályos. Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha *M* rajta van a *CM'* szakaszon, azaz a $CMB\sphericalangle = 120^\circ$, ami pontosan akkor teljesül, ha *M* pont rajta van az *ABC* háromszög köréírt körének rövidebb *BC* ívén.

25. Az előző feladatból következik, hogy az *ABC* háromszög köréírt körének vonalát leszámítva, ha a sík bármely más pontját összekötjük a szabályos *ABC* háromszög csúcsaival, akkor a szakaszokból háromszög szerkeszthetö.

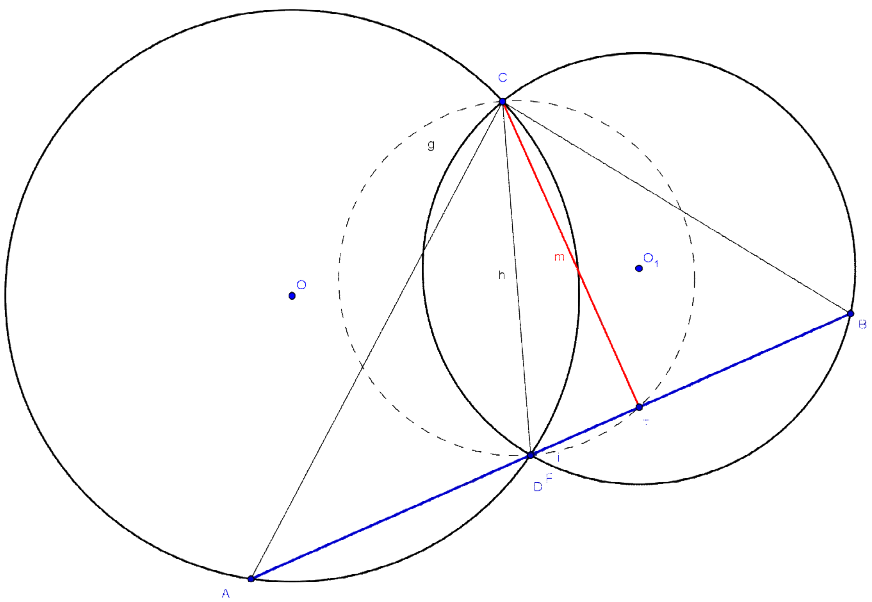
26. 27.

27. A 26. és 27. feladat közismert, megoldása megtalálható pl. a Geometriai feladatgyűjtemény I. kötetében. Ha a háromszögnek van 120°-nál nem kisebb szöge, akkor az ezen szöghöz tartozó csúcs esetén lesz az összeg minimális, ha nincs, akkor az úgynevezett izogonális pont esetén. Ezt a feladatot bizonyos szakirodalmakban szokás Steiner-féle háromszög problémának nevezni, az izogonális pontot, pedig Fermat-pontnak vagy Torricelli-pontnak is.

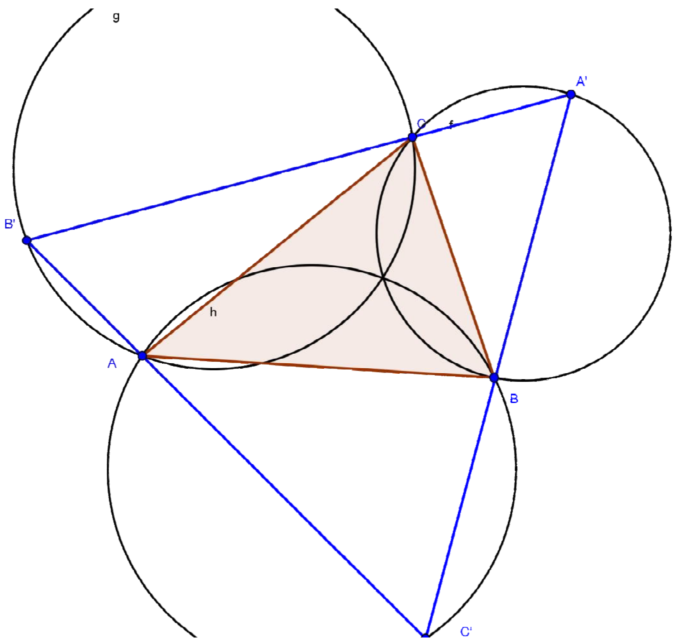
28. Készítsünk ábrát! Rögzítsük a *C* csúcsot! Vegyük fel az *ABC* háromszöget az izognális pontjával és a *k* köré írt körrel együtt. A Steiner-féle háromszög probléma megoldásához hasonlóan forgassuk el az egész ábrát a *C* csúcs körül 60°-kal. Ekkor az *A* és *B* pont helytől függetlenül a *k* kör képe mindig ugyanaz a *k*' kör lesz. Az *m* szakasz pedig egy olyan szakasz, amelynek egyik végpontja az egyik körön, a másik a másik körön van. Ezek közül az a leghosszabb, mely átmegy mindkét kör középpontján. Ez pedig akkor lehetséges, ha az *ABC* háromszög szabályos.



29. Készítsünk ábrát!



Az ábrán látható *ABC* háromszög szögei az *AB* szakasz helyzetétől függetlenek a kerületi szögek tétele értelmében. Emiatt az így létrehozott háromszögek mind hasonlók és az *AB* szakaszhoz tartozó magasságuk *T* talppontja a szaggatott vonallal felvett *CD* átmérőjű körön van a Thalesz-tétel miatt. Az ilyen háromszögek közül bármely kettő esetén a hasonlóság arányát az *AB* szakaszhoz tartozó magasságuk aránya adja meg. Ebből következik, hogy az *AB* szakasz annál nagyobb, minél nagyobb a hozzá tartozó magasság, ami viszont akkor a legnagyobb, ha *m*=*CD*, azaz *AB* merőleges *CD*-re.

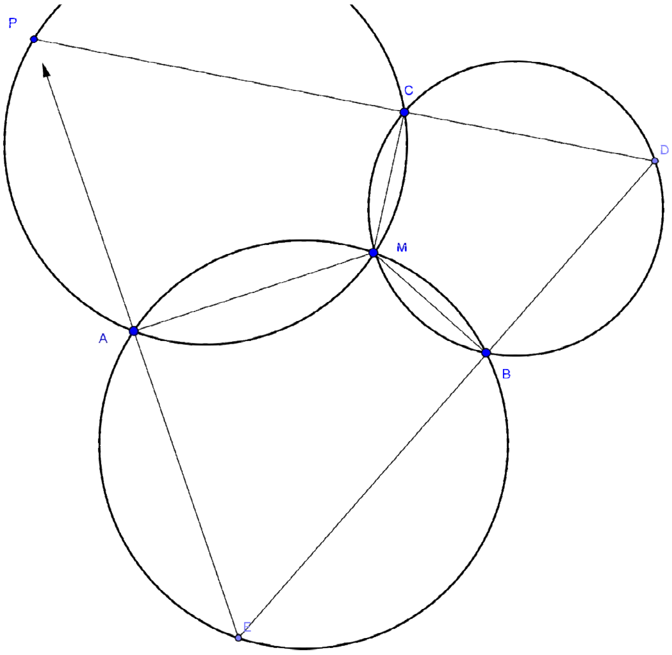


30. Az *ABC* háromszög köré szerkesztett szabályos háromszög csúcsai rajta vannak az oldalak fölé rajzolt 60°-os látóköríveken és a örök a háromszög izogonális pontjában metszik egymást. Lásd az ábrát!

A továbbiakban megfogalmazunk egy segédállítást.

Segédállítás:

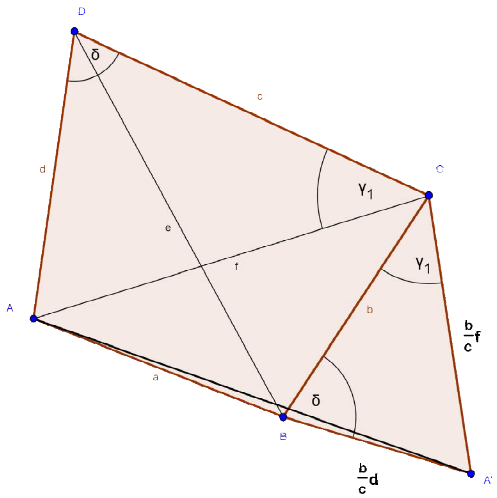
Ha három kör (*k', k'', k'''*) egy közös *M* pontra illeszkedik és a *k'* kör egyik *P* pontjából kiindulva egy törött vonalat, amely keresztül megy a a körök kettős metszéspontjain, akkor az a törött vonal a pontban záródik. Lásd az alábbi ábrát!



A segédállítás a húrnégyszögek tételének és a tétel megfordításának felhasználásával könnyen igazolható

A segédállítás és a 29. feladat felhazsnálásával a szerkesztés könnyen végiggondolható.

31. Készítsük el az alábbi ábrát!
Az *ABCD* négyszög *BC* oldalára hozzuk létre a *CBA'* háromszöget úgy, hogy felmérjük az ábrának megfelelően a δ és a γ_1 szöget! A *CBA'* háromszög hasonó az *ACD* háromszöghöz a hasonlósági arány *b/c*.



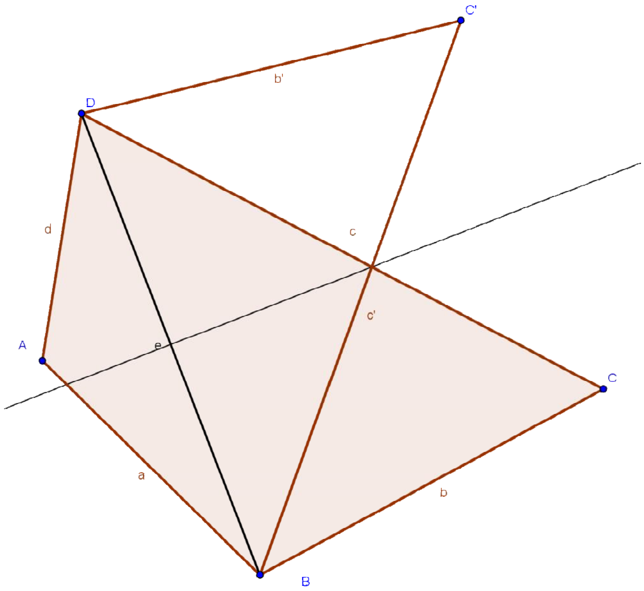
Így $BA' = \frac{b}{c}d$ és $CA' = \frac{b}{c}f$. Másrészt az *ACD* háromszöget egy *C* középpontú, *b/c* arányú, $BCD\sphericalangle$ $-ű$ forgatva nyújtás viszi *CBA'* háromszögbe. Emiatt *CAA'* háromszög is hasonló a *CDB* háromszöghöz, hisz a *C*-nél levő szögük egyenlő és az azt közrefogó oldalak aránya is egyenlő mégpedig *f/c*. Így $AA' = \frac{f}{c}e$. Így az *ABA'* háromszögre felírható a háromszög egyenlőtlenség, így $AA' \le AB + BA'$, ahonnan $\frac{f}{c}e \le a + \frac{b}{c}d$, ahonnan átszorzással kapjuk, hogy $ef \le ac+bd$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $ABC\sphericalangle + ABA'\sphericalangle = 180°$, azaz a négyszög húrnégyszög.

32. 1. megoldás:

Tudjuk, hogy bármely négyszög esetén $T_{ABCD} = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$, ahol *e, f* a két átló és *φ* az általuk bezárt szög. Ezt és az előző feladatot felhasználva kapju az állítást.

2.megoldás:

Nézzünk egy olyan megoldást, ami elkerüli az előző feladatot!



Húzzuk be az *ABCD* négyszög *BD* átlóját, majd ennek felező merőlegesére tükrözzük a *CD* háromszöget, így kapjuk az *ABC'D* négyszöget. Ennek területe megegyezik az *ABCD* négyszög területével. Húzzuk be az AC' átlóját! Az így keletkező részháromszögekre felírhatjuk, hogy $T_{ABC'} \le ac$ és $T_{AC'D} \le bd$. Így

$T_{ABCD} = T_{ABC'D} = T_{ABC'} + T_{AC'D} \le ac + bd$.