Egyenletek megoldása az analízis elemeinek felhasználásával
(megoldások, megoldás vázlatok)

I. Az injektivitás alkalmazása az egyenletek megoldásában

a) Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon!

$$\left(x^2+x-2\right)^3+x^2+x-2=x^3+x$$

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto x^3+x$ függvényről könnyen igazolható, hogy szigorúan monoton, így injektív, tehát *f(x)=f(y)* akkor és csak akkor, ha *x=y*. Mivel az egyenlet $f\left(x^2+x-2\right)=f(x)$, így $x^2+x-2=x$, ahonnan $|x|=\sqrt{2}$.

b) Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon!

$$\sqrt[3]{x}+x=\sqrt[3]{\left(x-2\right)^2}+\left(x-2\right)^2$$

Mivel a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\sqrt[3]{x}+x$ függvény szigorúan monoton, ezért injektív is, így $x=\left(x-2\right)^2$, amiből a megoldások 4, ill. 1.

c) A $\log_2(x-1)-\log_2(x^2-2x)=x^4-4x^3+3x^2+2x-1$ egyenlet átalakítása után azt kapjuk, hogy $\log_2(x-1)+(x-1)^2=\log_2(x^2-2x)+(x^2-2x)^2$. Az egyenlet megoldásait az x>2 számok halmazán keressük. A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\log_2 x+x^2$ függvényről könnyen beláthatjuk, hogy szigorúan monoton növekvő, tehát injektív is. Így $x-1=x^2-2x$, melynek gyökei közül csak a $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ nagyobb 2-nél.

d) A $9^{\sin x\cdot\cos x}-3^{\sin x}\cdot\left(\sqrt[9]{9}\right)^{tgx}=\left(\frac{2}{9}tgx+\sin x\right)^3-\left(\sin 2x\right)^3$ egyenlet

$$3^{\sin 2x}+\left(\sin 2x\right)^3=\left(\frac{2}{9}tgx+\sin x\right)^3+3^{\frac{2}{9}tgx+\sin x}$$ alakra hozható.

A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=3^x+x^3$ függvényről könnyen beláthatjuk, hogy szigorúan monoton növekvő, tehát injektív is. Így az $\frac{2}{9}tgx+\sin x=\sin 2x$ egyenlethez jutunk, melynek megoldása rutin feladat.

e) Az $x^2-x-1=2^x-\log_2\left(x^2+2^x\right)$ egyenletet $x^2+2^x+\log_2\left(x^2+2^x\right)=2^{x+1}+\log_2\left(2^{x+1}\right)$ alakra hozhatjuk. Mivel a pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\log_2 x+x^2$

függvény szigorúan monoton növekvő, így injektív is. Ebből az $x^2 + 2^x = 2^{x+1}$ egyenlethez jutunk, amiből kapjuk, hogy $x^2 = 2^x$, amiből x>0 esetén az $2\log_2 x = x$ egyenlethez jutunk, melynek bal oldalán egy szigorúan konkáv függvény, jobboldalán egy lineáris függvény található, tehát legfeljebb két megoldása van, ami jelen esetben a 2 és a 4.

f) Legyen $\sqrt[5]{x^3+2x} = y$ és $\sqrt[3]{x^5-2x} = y$! Innen $x^3+2x = y^5$ és $x^5 - 2x = y^3$. A két egyenletet összeadva az $x^5 + x^3 = y^5 + y^3$ egyenlethez jutunk. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^5 + x^3$ függvény szigorúan monoton, így injektív is, tehát y=x. Így az $x^5 - x^3 - 2x = 0$ egyenlethez jutunk, melynek megoldásai a 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

II. Konvex, konkáv tulajdonság szerepe a megoldásban

a) Könnyen meggondolható, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 6\cdot 2^x - 10$ függvény szigorúan konvex, míg a g(x)=7x lineáris, így az egyenletnek legfeljebb két megoldása van. Ezek a 2 és a -1.

b) Alakítsuk át a $9^x - 8x\cdot 3^x + 2\cdot 3^x + 12x^2 - 3 = 0$ egyenletet!

$$9^x - (8x-2)\cdot 3^x + 12x^2 - 3 = 0$$

A kapott egyenlet a 3^x-re nézve másodfokú, a diszkriminánsa

$$D = (8x-2)^2 - 4\cdot 12x^2 + 12 = 16x^2 - 32x + 16 =$$
$$= 16(x-1)^2$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $3^x = 2x+1$ és a $3^x = 6x-3$. Mindkét egyenlet baloldalán egy szigorúan konvex exponenciális függvény a jobboldalán egy lineáris függvény található, így mindkét egyenletnek legfeljebb két megoldása van. Az első megoldásai 1 és 0, a másodiké 1 és 2, így az eredeti egyenlet megoldásai 0, 1, 2.

c) Mivel az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x) = 13\cdot\sqrt[4]{5x+1}$ függvény szigorúan konkáv, míg a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x \mapsto 13x^2 - 246x + 647$ szigorúan konvex, így az egyenletnek legfeljebb két megoldása van, melyek a 3 és a 16.

d) Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a megoldások -1 és 1.

e) Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a megoldások 1 és 2.

f) Legyen $y = \left(2^x - 1\right)^2$ *és* $y = \log_2\left(\sqrt{x}+1\right)$, ahol x, y$\geq$0! Az elsőből $2^x - 1 = \sqrt{y}$, a másodikból $2^y - 1 = \sqrt{x}$. A két egyenlet kivonásával és rendezéssel kapjuk, hogy $2^y + \sqrt{y} = 2^x + \sqrt{x}$. Mivel az $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R};\ f(x) = 2^x + \sqrt{x}$ szigorúan monoton növekvő, így injektív is, ezért y=x. Tehát a $2^x - 1 = \sqrt{x}$ egyenletet kell megoldani, amelynél a baloldali függvény szigorúan konvex, míg a jobboldali szigorúan konkáv, így legfeljebb két megoldása van. Ezek a 0 és az 1.

III. A monotonitás szerepe a megoldásban

a) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto 3^{x+1}+5^{x+1}$ függvény az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő, így a 8-at legfeljebb egyszer veheti fel. Ezt x=0 esetén meg is teszi, így ez a megoldás.

b) Asz egyenletet megoldjuk az előző feladat b) részéhez hasonlóan. Ekkor kapjuk, hogy $5^x=6-x$ és $5^x=3$. Az első egyenlet baloldalán egy szigorúan monoton növekvő, míg a jobboldalán egy szigorúan monoton csökkenő függvény szerepel, így az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Ez pedig az 1. A másik egyenletből a megoldás $\log_5 3$.

c) Osszuk le mindkét oldalt 7^x-nel, így a baloldalon szigorúan monoton csökkenő, míg a jobboldalon szigorúan monoton növekvő függvény jelenik meg. Ebből jön, hogy legfeljebb egy megoldás van, mely az 1.

d) A megoldás x=2.

e) A baloldal nevezőjének gyöktelenítése után már jól látszanak a monotonitási viszonyok. A megoldás x=4.

f) Bizonyítsuk be, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=2^x+3^x+6^x-x^2$ szigorúan monoton növekvő! A megoldás x=-1.

IV. Inverz függvény használata az egyenlet megoldásában

1. a) Az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza. Az $f:[0;\infty[\ \to[-2;\infty[;\ f(x)=\sqrt{x}-2$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ g(x)=\sqrt[3]{x-8}$ függvény bijektív. Így létezik inverzük, mely a bijektív $f^{-1}:[-2;\infty[\ \to[0;\infty[;\ f^{-1}(x)=\left(x+2\right)^2$ ill. a bijektív $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ g^{-1}(x)=x^3+8$.

   Legyen $y=\sqrt{x}-2$ és $y=\sqrt[3]{x-8}$, melyből $x=\left(y+2\right)^2$ és $x=y^3+8$, így oldjuk meg a $[-2;\infty[$ halmazon oldjuk meg a $\left(y+2\right)^2=y^3+8$ egyenletet. Ebből kapjuk a $0=y^3-y^2-4y+4$, azaz $0=(y-2)(y+2)(y-1)$. A megoldások y=2, -2, 1, amiből x=16, 0, 9.

   b) Átalakítás után azt kapjuk, hogy $\log_2\left(5^x-21\right)=\log_5\left(2^x+21\right)$. Legyen $y=\log_2\left(5^x-21\right)=\log_5\left(2^x+21\right)$, amiből kapjuk, hogy $2^y=5^x-21\ \textit{és}\ 5^y=2^x+21$. A két egyenlet összeadásával kapjuk, hogy $2^y + 5^y = 2^x + 5^x$. Az injektivitást felhasználva kapjuk, hogy y=x, azaz a $2^x + 21 = 5^x$. Leosztva 2^x-nel, monotonitás vizsgálat után kapjuk, hogy csak az x=2 a megoldás.

2. a) Az egyenlet értelmezési tartománya a $\left[-5;-\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5};\infty\right[$ halmaz. Legyen $y = \sqrt{x+5} = x^2 - 5$, amiből kapjuk, hogy $y^2 = x + 5$ és $y = x^2 - 5$. A két egyenletet összeadva és rendezve kapjuk, hogy $(y-x)(y+x+1) = 0$. Ebből y=x ill. =-x-1. Így az $x^2 - x - 5 = 0$ és az $x^2 + x - 4 = 0$ egyenlethez jutunk. Az első megoldásai $\frac{1 \pm \sqrt{26}}{2}$, a másodiké $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Az elsőből a pozitív a másodikból a negatív lesz az eredeti egyenlet megoldása.

b) A feladat az előzőhöz hasonló módon megoldható.

c) Átalakítás után kapjuk, hogy $(x+3)^2 - 2 = \sqrt{x+3+2}$. Legyen z=x+3, ekkor a $z^2 - 2 = \sqrt{z+2}$ egyenlethez jutunk, ami az a) részhez hasonlóan megoldható.

d) Rendezzük az egyenletet $(2+x)^{\log_2 3} - 3 = (3+x)^{\log_3 2} - 2$ alakra! Az $f:]-2;\infty[\to]-3;\infty[;\ x\ \mathbf{a}\ (2+x)^{\log_2 3} - 3$ függvény szigorúan monoton növekvő és szürjektív, így bijektív is. Az inverz függvénye a $f^{-1}:]-3;\infty[\to]-2;\infty[;\ x\ \mathbf{a}\ (3+x)^{\log_3 2} - 2$, így az egyenlet $f(x) = f^{-1}(x)$ alakú. Mivel az szigorúan monoton növekvő, ezért az egyenlet megoldásai azonosak az f(x)=x egyenlet megoldásaival., tehát az $(2+x)^{\log_2 3} = x + 3$ egyenletet kell megoldani. Vegyük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát majd rendezzük, így a $\log_2(2+x) = \log_3(x+3) = y$ egyenlethez jutunk. Ebből kapjuk, hogy $3^t - 2^t = 1$, melyet leosztva 2^t-nel és monotonitási viszonyokat vizsgálva kapjuk, hogy csak a t=1 a megoldás. Ebből x=0.

e) Az előzőhöz hasonló módon megoldható.

f) Hozzuk $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}}}$ alakra! A $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x) = \sqrt[3]{x+6}$ szigorúan monoton növekvő és az egyenlet x=f(f(f(x))) alakú, így megoldásai megegyeznek az x=f(x) egyenlet megoldásaival. Tehát $x = \sqrt[3]{x+6}$ egyenletet kell megoldani. Ebből kapjuk a $x^3 - x - 6 = 0$. Ezt szorzattá alakítva kapjuk a $(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$. Ennek csak az x=2 megoldása.

g) Az előzőhöz hasonlóan oldható meg.