# Feladatok közepek közötti egyenlőtlenségekre

1. Legyen a, b, c pozitív valós szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ba}$

b) b) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq a+b+c$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha *x, y, z* pozitív valós számok, akkor

$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2}$ !

3. Legyen a, b, c, d pozitív valós számok szorzata 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(c+b)} \geq 6$ !

4. Három pozitív szám négyzetösszege 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor reciprokaik összege legalább $3\sqrt{3}$ !

5. Legyen az a, b, c, d pozitív valós számok szorzata1! Bizonyítsuk be, hogy

$\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{bc}+\mathrm{cd}+\mathrm{bd}+\mathrm{ad}+\mathrm{ac} \geq 10$ !

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely *x, y, z* pozitív valós számra fennáll az $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x} \geq \frac{3}{2}$

(Nesbitt-egyenlőtlenség)

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek, ahol *a, b, c* a háromszög oldalai, *s* a félkerülete!

a) $8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$ b) $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}$

c) $\sqrt{s} < \sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c} \leq \sqrt{3s}$

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely három a, b, c pozitív valós számra fennáll az

a) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$ b) $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geq \frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}$

c) $\left(\frac{3abc}{ab+bc+ca}\right)^{a^2+b^2+c^2} \geq a^{bc}\cdot b^{ca}\cdot c^{ab}$ (a, b, c>1)!

9. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, akkor

a) $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$ b) $a^3+b^3+c^3 \geq a^2c+b^2a+c^2b$

c) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c, d* pozitív valós számok, akkor

$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b} \geq a^2+b^2+c^2+d^2$ !

11. Legyen a, b, c, pozitív valós számok! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+\mathrm{c}^3 \geq \mathrm{a}^2\sqrt{\mathrm{bc}}+\mathrm{b}^2\sqrt{\mathrm{ac}}+\mathrm{c}^2\sqrt{\mathrm{bc}}$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, akkor
a) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ b) $a^5+b^5+c^5 \geq abc(ab+bc+ca)$
c) $a^6+b^6+c^6 \geq a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3$

13. Legyen *x, y, z* pozitív valós szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
a) $x^4y+y^4z+z^4x \geq x^3yz+y^3zx+z^3xy \geq x^2y^2z+xy^2z^2+x^2yz^2$
b) $x^5y+y^5z+z^5x \geq x^4yz+y^4zx+z^4xy \geq x^3y^2z+xy^3z^2+x^2yz^3$

14. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, akkor!
$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c} \leq \frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}{2\mathrm{c}}+\frac{\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2}{2\mathrm{a}}+\frac{\mathrm{c}^2+\mathrm{a}^2}{2\mathrm{b}} \leq \frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{bc}}+\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{ac}}+\frac{\mathrm{c}^3}{\mathrm{ba}}$

15. * Legyen *a, b, c* pozitív valós szám! Bizonyítsuk be, hogy ha *abc*=1, akkor
$a+b+c \leq a^2+b^2+c^2$ !

16. Legyen $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4,\mathrm{x}_5 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ! Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) $\frac{\mathrm{x}_1^2}{\mathrm{x}_2^2}+\frac{\mathrm{x}_2^2}{\mathrm{x}_3^2}+\frac{\mathrm{x}_3^2}{\mathrm{x}_1^2} \geq \frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2}+\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_3}+\frac{\mathrm{x}_3}{\mathrm{x}_1}$

b) $\frac{\mathrm{x}_1^2}{\mathrm{x}_2^2}+\frac{\mathrm{x}_2^2}{\mathrm{x}_3^2}+\frac{\mathrm{x}_3^2}{\mathrm{x}_1^2} \geq \frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_1}+\frac{\mathrm{x}_3}{\mathrm{x}_2}+\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_3}$

c) $\frac{\mathrm{x}_1^4}{\mathrm{x}_2^4}+\frac{\mathrm{x}_2^4}{\mathrm{x}_3^4}+\frac{\mathrm{x}_3^4}{\mathrm{x}_4^4}+\frac{\mathrm{x}_4^4}{\mathrm{x}_5^4}+\frac{\mathrm{x}_5^4}{\mathrm{x}_1^4} \geq \frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2}+\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_3}+\frac{\mathrm{x}_3}{\mathrm{x}_4}+\frac{\mathrm{x}_4}{\mathrm{x}_5}+\frac{\mathrm{x}_5}{\mathrm{x}_1}$

17. *Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, melyek összege 3, akkor
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$ !

18. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén fennáll a
$\sqrt{\mathrm{a}^2+(1-\mathrm{a})^2}+\sqrt{\mathrm{b}^2+(1-\mathrm{b})^2}+\sqrt{\mathrm{c}^2+(1-\mathrm{c})^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ !

19. *Legyen a, b, c ∈ ]0;1[! Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sqrt{\mathrm{abc}}+\sqrt{(1-\mathrm{a})(1-\mathrm{b})(1-\mathrm{c})}<1$!

20. *Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c*>0, akkor $\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$ !

21. **Legyen *x*, *y*, *z* pozitív valós szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+2\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$ !

## n-tagú közepek közötti egyenlőtlenség

1. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

a) $n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ b) $(n!)^2\leq\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$ c) $(n!)^3\leq\left(\frac{(n+1)^2 n}{4}\right)^n$

d) $(3n+1)^3>8\sqrt[n]{(3n)!}$

2. Legyen n 2-nél nagyobb egész szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$n\sqrt[n]{n+1}-n\leq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\leq n-\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}}$

3. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[n]{n}\leq 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$, ha n legalább 2 egész szám!

4. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton növekvő!

5. Bizonyítsuk be, hogy az $b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton növekvő!

6. Bizonyítsuk be, hogy a $c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ szigorúan monoton csökkenő!

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely n és m pozitív egész szám esetén $a_n<c_m$ !

8. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén 2< $a_n$ <4!

9. *Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{4n}\right)$ sorozat szigorúan monoton növekvő!

## Szélsőérték feladatok közepekkel

1. Határozzuk meg az alábbi függvények minimumát és minimumhelyét!

a) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=\frac{x^2+a}{x}$ $(a\in\mathbb{R}^+)$

b) $g:(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x^6+4}{x^2}$

c) $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ h(x)=\frac{2x^5+3}{x^3}$

d) $i:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ i(x)=\frac{x^4+6\sqrt{3}}{x^3}$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények maximumát és maximumhelyét!

a) $f:\left[-\frac{1}{3};1\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-x)^3(1+3x)$

b) $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(1+x)^3(1-x)$

3. Egy 20x20-as négyzet négy sarkából vágjunk le egybevágó négyzeteket úgy, hogy a lap négy szélének a felhajtásával a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk!

4. Készítsünk négyzet alapú, felül nyitott, oldalt négy téglalappal határolt 100cm$^3$ térfogatú dobozt! Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy az alaplap és a négy oldallap területének az összege minimális legyen!

5. Milyen méretei vannak a legkisebb felszínű 1dm$^3$ térfogatú, henger alakú konzervdoboznak?

6. Határozzuk meg annak a maximális térfogatú egyenes hengernek a méreteit, amelynek a tengelymetszete 6m kerületű!

7. Határozzuk meg azt a maximális kerületű téglalapot, amelynek két csúcsa adott félkör átmérőjére, a másik kettő a félkör ívére illeszkedik!

8. Egy téglalap alakú plakáton 600cm$^2$ felületre szeretnének nyomtatni. A plakát tetején és alján 9cm, a két oldalán 6cm széles margót hagynak. Milyenek legyenek a plakát méretei, ha a legkevesebb anyagot szeretnék felhasználni a gyártásához?