Szoldatics József
Rekurzió

57. Rátz László Vándorgyűlés
Székesfehérvár
2017. július 4-7.

2017. szeptember 1.

Tartalomjegyzék

1. Előadás **2**

1.1. Másodrendű, homogén megoldása 2

1.2. Megoldási módszerek 2

1.3. Feladatok 3

1.3.1. Feladatok rejtett rekurzióra (feladatok alacsonyabb korosztály számára) 3

1.3.2. Feladatok indukcióra (azaz vegyük észre . . .) 3

1.3.3. Feladatok teleszkopikus összegre 3

1.3.4. Feladatok teleszkopikus szorzatra 4

1.3.5. Feladatok index léptetésre 4

1.3.6. Feladatok új sorozat (új ismeretlen) bevezetésére 4

1.3.7. Feladatok vegyesen (oldjuk meg „bármi áron és módszerrel”) 4

1.4. Feladatok forrásai 6

2. Végeredmények **7**

2.1. Feladatok rejtett rekurzióra (feladatok alacsonyabb korosztály számára) . . . 7

2.2. Feladatok indukcióra (azaz vegyük észre . . .) 7

2.3. Feladatok teleszkopikus összegre 7

2.4. Feladatok teleszkopikus szorzatra 7

2.5. Feladatok index léptetésre 7

2.6. Feladatok új sorozat (új ismeretlen) bevezetésére 8

2.7. Feladatok vegyesen (oldjuk meg „bármi áron és módszerrel”) 8

3. Megoldások **10**

3.1. Feladatok rejtett rekurzióra (feladatok alacsonyabb korosztály számára) . . 10

3.2. Feladatok indukcióra (azaz vegyük észre ...) 15

3.3. Feladatok teleszkopikus összegre 16

3.4. Feladatok teleszkopikus szorzatra 18

3.5. Feladatok index léptetésre 20

3.6. Feladatok új sorozat (új ismeretlen) bevezetésére 23

3.7. Feladatok vegyesen (oldjuk meg „bármi áron és módszerrel”) 25

4. Melléklet **49**

4.1. A feladatok megoldása során használt összefüggések 49

4.2. „Sima” számtani sorozat rekurzív kezelése 50

4.3. „Sima” mértani sorozat rekurzív kezelése 50

4.4. Másodrendű, $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ homogén rekurzió megoldása 51

4.4.1. Generátor-függvény módszerrel 51

4.4.2. Karakterisztikus egyenlettel 51

4.5. Periodikus, $a_n = \dfrac{a \cdot a_{n-1} + b}{c \cdot a_{n-1} + d}$ alakú sorozatok 53

4.5.1. Periódus hossza = 1 53

4.5.2. Periódus hossza = 2 53

4.5.3. Periódus hossza = 3 53

4.5.4. Periódus hossza = 4 54

4.5.5. Periódus hossza = 5 54

1. Előadás

Nagyon sok esetben felbukkan rekurziós összefüggés, egyenlet feladatok megoldása közben. Ezen egyenletek megoldása egy kicsit másképpen történik, mint a többi esetben. Ezeknek a megoldásához szeretnék segítséget adni.

1.1. Másodrendű, homogén megoldása

Röviden ismertetem a másodrendű homogén rekurzió általános megoldását:

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$$

Rekurzió karakterisztikus egyenlete:

$$r^2 = \alpha r + \beta \qquad \Rightarrow \qquad r^2 - \alpha r - \beta = 0.$$

Ennek gyökei

$$r_1 \quad \text{és} \quad r_2,$$

A sorozat

$$a_n = C_1 \cdot r_1^{n-1} + C_2 \cdot r_2^{n-1}$$

alakban írható fel, ahol a konstansok az első és második elemből kiszámíthatók.

Például:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 8; \quad a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2};\ n \geq 2$$

$$r^2 = 8r - 15 \qquad \Rightarrow \qquad r^2 - 8r + 15 = 0$$

$$r_1 = 3; \quad r_2 = 5$$

$$a_n = C_1 \cdot 3^{n-1} + C_2 \cdot 5^{n-1}$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 8 = 3C_1 + 5C_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = C_2 = 1$$

Tehát a sorozat alakja

$$a_n = 3^{n-1} + 5^{n-1}$$

1.2. Megoldási módszerek

Tetszőleges módon, akár több úton is meg lehet oldani a feladatokat. Néhány gyakran használt módszer:

- **Teljes indukció (azaz vegyük észre . . .)**
  Megpróbáljuk kitalálni a végeredményt, majd ezt teljes indukció segítségével igazoljuk.
- **Teleszkopikus összeg**
  A keresett összefüggést felírva, majd az index léptetésével 1-ig (illetve a legkisebb értékig) léptetve – esetleg megfelelő konstansokkal szorozva – összeadjuk őket.
- **Teleszkopikus szorzat**
  A keresett összefüggést felírva, majd az index léptetésével 1-ig (illetve a legkisebb értékig) léptetve – esetleg megfelelő konstansokkal szorozva – összeszorozzuk őket. Nagyon fontos ezen módszernél arról meggyőződni, hogy nincs a felírt összefüggések között nulla értékű sor.

- **Index léptetés**
  Index le (esetleg fel) léptetésével és az eredeti összefüggés felhasználásával egy „kezesebb” sorozat kialakítása.

- **Új sorozat (új ismeretlen) bevezetése**
  Mint az elnevezés mutatja, egy „kezesebb” sorozat elérése a cél.

A megoldási módszerek ezek teljes kombinációja lehet, azaz egy feladatban akár több módszer egymás utáni vagy akáregyidejű alkalmazása.

1.3. Feladatok

Minden feladat esetén adjuk meg a sorozat n-edik elemét n függvényében, ha csak a feladat mást nem ír elő.

1.3.1. Feladatok rejtett rekurzióra (feladatok alacsonyabb korosztály számára)

1. Hányféleképpen lehet egy 10 szintes (15; 20; ... szintes) lépcső tetejére felmenni, ha
   a) egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk?
   b) egyszerre 1, 2 vagy 3 lépcsőt léphetünk?
   c) egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk, de két 2-est egymás után nem léphetünk?
   d) egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk, de két egyformát egymás után nem léphetünk?

2. Piros és kék színű üveggolyókból 10 golyó (15; 20; ... golyó) hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha
   a) nem akarjuk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?
   b) nem akarjuk, hogy egyforma golyókból 2-nél több kerüljön egymás mellé?

3. Piros, kék és zöld színű üveggolyókból 10 golyó (15; 20; ... golyó) hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha
   a) nem akarjuk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?
   b) nem akarjuk, hogy kék és zöld kerüljön egymás mellé?

1.3.2. Feladatok indukcióra (azaz vegyük észre ...)

1. $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

2. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2 - a_{n-1}}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = \dfrac{1}{2}$

3. $a_n = \dfrac{n-1}{n}\left(a_{n-1} + 1\right); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 0$

1.3.3. Feladatok teleszkopikus összegre

1. $a_n = a_{n-1} + 5; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

2. $a_n = a_{n-1} + n; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

3. $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n(n-1)}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

1.3.4. Feladatok teleszkopikus szorzatra

1. $a_n = 3a_{n-1}$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$;

2. $a_n = 3a_{n-1} + 2$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$;

3. $a_n = 3a_{n-1} + 1$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$;

1.3.5. Feladatok index léptetésre

1. $a_n = 4 + 4\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$

2. $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}\right)$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$

3. $a_n = \dfrac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}\right)$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$
   Igazoljuk, hogy a sorozat racionális számokból áll.

1.3.6. Feladatok új sorozat (új ismeretlen) bevezetésére

1. $a_n = 3a_{n-1} + n$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$

2. $a_n = (n-1)\,a_{n-1} + n^2 - 3n + 1$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 1$

3. $a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 2$

1.3.7. Feladatok vegyesen (oldjuk meg „bármi áron és módszerrel")

1. Az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; ...) hosszú számsorozatot, de minden számjegyet csak tőle 1-gyel eltérő számjegy követhet, azaz ($1 \to 2$; $2 \to$ 1,3; $3 \to 2$). Hány ilyen sorozat van?

2. Az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; ...) hosszú számsorozatot, de minden számjegyet csak tőle legfeljebb 1-gyel eltérő számjegy követhet, azaz ($1 \to$ 1, 2; $2 \to$ 1,2,3; $3 \to$ 2, 3) . Hány ilyen sorozat van?

3. Az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; ...) hosszú számsorozatot, de minden számjegyet csak tőle legfeljebb 1-gyel eltérő számjegy követhet, de 2-t 2-es nem követhet, azaz ($1 \to$ 1, 2; $2 \to$ 1,3; $3 \to$ 2, 3). Hány ilyen sorozat van?

4. Az 1, 2 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; ... hosszú) számsorozatot, de 1-es csak legalább 2db 2-es után állhat (vagy 1-es után), azaz ($1 \to$ 1, 2; $12 \to 2$, $22 \to$ 1, 2) . Hány ilyen sorozat van?

5. Kettes számrendszerbeli 10 (15; 20; ...) hosszú számok száma, ha 0-s csak dupla 1-es után állhat, azaz ($01 \to 1$; $11 \to$ 0,1; $0 \to 1$)

6. $a_n = \dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+4)\,(n+3)\,(n+2)}\left(a_{n-1} + 1\right)$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = 0$

7. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \dfrac{1}{n-1}$; $\quad n \geq 2$; $\qquad a_1 = A$

8. $a_n = 1 - \frac{n-1}{n} a_{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

9. $a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} a_{n-2}; \quad n \geq 3; \qquad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{2}$

10. $na_n = 2(2n-1)\,a_{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 2$
    Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

11. $a_n = \frac{1}{2}\left(3a_{n-1} + \sqrt{5a_{n-1}^2 - 4}\right); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$
    Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

12. $a_n = 3a_{n-1} + \sqrt{8a_{n-1}^2 - 8}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$
    Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

13. $a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1} + 1); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 0$

14. $a_n = a_{n-1} + 4\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 2 \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 2$
    Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

15. $a_n = \frac{2a_{n-1} - 4}{a_{n-1}} \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1; \qquad a_{2017} = ?$

16. $a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

17. $a_n = 25 + 10\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

18. $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}{a_{n-3}}; \quad n \geq 4; \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 1;$
    Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll:

19. $x = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4x}}}}$
    Oldjuk meg az egyenletet!

20. $a_n = \frac{1}{1 - a_{n-1}} - \frac{1}{1 + a_{n-1}}$
    A sorozat periodikus. Mi lehet az első elem?

21. $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ és $a_1 < a_2$ pozitív egész szám.
    Igazoljuk, hogy $a_{45} > 3^{43}$.

22. $a_n = a_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}; \quad n \geq 2. a_1 = 2;$

23. $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$
    Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyik nagyobb $\frac{1}{100}$-nál?

24. $a_n = a_{n-1} + n^2, \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$
    Hány 5-tel osztható szám van a sorozat első 100 tagja között?

25. $a_n = 3a_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$

26. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

27. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 3$

28. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}, \quad n \geq 4; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_2 = 2; \quad a_{2017} = ?$

29. $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = \dfrac{1}{2}; \quad a_2 = \dfrac{1}{3}$

30. $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = -3; \quad a_2 = 2$

31. $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{cases} \quad n \geq 2; \quad a_1 = 2; \quad b_1 = 0$

32. $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = 5a_{n-1} - 3b_{n-1} \end{cases} \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1; \quad b_1 = -1$

33. $\mathrm{na}_n = (2n-2)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2}; \quad n \geq 3; \quad a_1 = 5; \quad a_2 = 4$

34. $a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2; \quad n \geq 2; 0 < a_1 < 1;$
    Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_k^2 < 1$

35. $\dfrac{a_n}{a_{n-2}} + 6 \cdot \dfrac{a_{n-3}}{a_{n-1}} = 5 \cdot; \quad n \geq 4; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_3 = \dfrac{5}{2}$

1.4. Feladatok forrásai

- Arany Dániel Matematikaverseny feladatai
- Internet
- KÖMAL folyóirat feladatai
- Kvant folyóirat feladatai
- OKTV feladatai
- Orosz Gyula: Rekurzív sorozatok, Matematika Oktatási Portál (http://matek.fazekas.hu)
- Szoldatics József: Rekurzió, Matematika Oktatási Portál (http://matek.fazekas.hu)

2. Végeredmények

2.1. Feladatok rejtett rekurzióra (feladatok alacsonyabb korosztály számára)

1. a) $a_{10} = 89$; $a_{15} = 987$; $a_{20} = 10946$
   b) $a_{10} = 274$; $a_{15} = 5768$; $a_{20} = 121415$
   c) $a_{10} = 41$; $a_{15} = 277$; $a_{20} = 1873$
   d) $a_{10} = 1$; $a_{15} = 2$; $a_{20} = 1$

2. a) $a_{10} = 24960$; $a_{15} = 3799168$; $a_{20} = 1873$
   b) $a_{10} = 2$; $a_{15} = 2$; $a_{20} = 2$

3. a) $a_{10} = 41$; $a_{15} = 277$; $a_{20} = 578272256$
   b) $a_{10} = 8119$; $a_{15} = 665857$; $a_{20} = 54608393$

2.2. Feladatok indukcióra (azaz vegyük észre ...)

1. $a_n = \sqrt{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2. $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}+1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

3. $a_n = \dfrac{n-1}{2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2.3. Feladatok teleszkopikus összegre

1. $a_n = 5n - 4; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

3. $a_n = \dfrac{2n-1}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2.4. Feladatok teleszkopikus szorzatra

1. $a_n = 3^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

3. $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2.5. Feladatok index léptetésre

1. $a_1 = 1; \ a_n = 8(n-1); \qquad n \in \mathbb{N}^+; \ n \geq 2$

2. $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

3. $a_n = \dfrac{\left[3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right]^2 - 1}{24}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2.6. Feladatok új sorozat (új ismeretlen) bevezetésére

1. $a_n = \dfrac{3^{n+1} - 2n - 3}{4}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
2. $a_n = 2 \cdot n! - n; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
3. $a_n = 3^n - 2^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

2.7. Feladatok vegyesen (oldjuk meg „bármi áron és módszerrel”)

1. $a_{10} = 64;\ a_{15} = 384;\ a_{20} = 2048$
2. $a_{10} = 8119;\ a_{15} = 665857;\ a_{20} = 54608393$
3. $a_{10} = 1536;\ a_{15} = 49152;\ a_{20} = 1572846$
4. $a_{10} = 465;\ a_{15} = 7739;\ a_{20} = 128801$
5. $a_{10} = 28;\ a_{15} = 189;\ a_{20} = 1278$
6. $a_n = \dfrac{(n-1)\,n}{10\,(n+2)}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
7. $a_1 = A;\ a_n = \dfrac{n}{2(n-1)}; \qquad n \geq 2; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
8. $a_n = \begin{cases} \dfrac{k}{2k-1} & n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{2} & n = 2k \end{cases} \qquad n; k \in \mathbb{N}^+$
9. $a_n = \dfrac{1}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
10. $a_n = 2^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} = \dbinom{2n}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
11. $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}; \qquad n \geq 2; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
12. $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}; \qquad n \geq 2; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
13. $a_n = \dfrac{(n-1)\,(2n+1)}{10\,(n+1)}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
14. $a_n = 2n^2; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
15. $a_{2017} = a_1 = 1$
16. $a_n = 18n - 3; \qquad n \geq 2; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
17. $a_n = 50n - 65; \qquad n \geq 3; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
18. $a_n = 3a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
19. $x = 1$ vagy $x = 3$

20. $a_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2^{n-1}-1}\pi\right); \qquad n \in \mathbb{N}^+$

21. $a_n = 3^{n-2}(a_2 - a_1) + a_{n-1} > 3^{n-2} \cdot 1 + 0 = 3^{n-2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

22. $a_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{(n+1)!}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

23. Az első 50 elemre teljesük a feltétel.

24. 60 ilyen szám van.

25. $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

26. $a_n = \frac{3^{n-1} - (-2)^{n-1}}{5}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

27. $a_n = \frac{1-2i}{2}(1+i)^{n-1} + \frac{1+2i}{2}(1-i)^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

28. $a_{2017} = a_1 = 1$

29. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

30. $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

31. $a_n = (-1)^{n-1} + 5^{n-1}; \qquad b_n = 5^{n-1} - (-1)^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

32. $a_n = \left(\frac{89+3\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1+\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{89-3\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1-\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1}$

$b_n = \left(\frac{-89+17\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1+\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{-89-17\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1-\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1}$

$n \in \mathbb{N}^+$

33. $a_n = \frac{3n+2}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$

34. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_1 - a_{k+1} < 1; \qquad k \in \mathbb{N}^+$

35. $$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \\ \dfrac{(1+1)(2^2+3^2)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)}{(2+3)(2^3+3^3)\ldots\left(2^{2k-3}+3^{2k-3}\right)} & n = 2k;\ k \geq 2 \\ \dfrac{(2+3)(2^3+3^3)\ldots\left(2^{2k-1}+3^{2k-1}\right)}{(1+1)(2^2+3^2)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)} & n = 2k+1;\ k \geq 1 \end{cases}$$

3. Megoldások

A feladatoknak csak 1 megoldását írtam le. Természetesen – sok esetben – akár több megoldás is létezik.

A feladatoknál megjelöltem a feladatok – általam ismert – származási helyét. amennyiben nincs megjelölés, az vagy
– a „matematikai folklór” része, eredete ismeretlen
– nem tudom a feladat származási helyét.

3.1. Feladatok rejtett rekurzióra (feladatok alacsonyabb korosztály számára)

1. Hányféleképpen lehet egy 10 szintes (15; 20; ... szintes) lépcső tetejére felmenni, ha a) egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk?

....

Klasszikus felírás:

Lépcső	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
Összes		1	2	3	5	...	89	...	987	...	10946

Módosított felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Lépcső	···	$n-2$	$n-1$	n
1	···	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	···	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
Összes	···	s_{n-2}	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva:

Lépcső	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	1	2	3	5	...	55	...	610	...	6765
2	0	1	1	2	3	...	34	...	377	...	4181
Összes	1	2	3	5	8	...	89	...	987	...	10946

$$\text{Lepcső}(n-2) + \text{Lepcső}(n-1) = \text{Lepcső}(n) = \text{Fibonacci}(n+1)$$

---

b) egyszerre 1, 2 vagy 3 lépcsőt léphetünk?

....

Klasszikus felírás:

Lépcső	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
Összes	1	2	4	7	13	...	274	...	5768	...	121415

Módosított felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Lépcső	⋯	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
1	⋯	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	⋯	b_{n-3}	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
3	⋯	c_{n-3}	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n
Összes	⋯	s_{n-3}	s_{n-2}	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva:

Lépcső	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	1	2	4	7	...	149	...	3136	...	66012
2	0	1	1	2	4	...	81	...	1705	...	35890
3	0	0	1	1	2	...	44	...	927	...	19513
Összes	1	2	4	7	13	...	274	...	5768	...	121415

$$\text{Lepcső}(n-3) + \text{Lepcső}(n-2) + \text{Lepcső}(n-1) = \text{Lepcső}(n)$$

---

c) egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk, de két 2-est egymás után nem léphetünk?

(Feladat: Szoldatics József)

Felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Lépcső	⋯	$n-2$	$n-1$	n
1	⋯	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	⋯	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
Összes	⋯	s_{n-2}	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva:

Lépcső	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	1	2	3	4	...	28	...	189	...	1278
2	0	1	1	1	2	...	13	...	88	...	595
Összes	1	2	3	4	6	...	41	...	277	...	1873

$$\text{Lepcső}(n-3) + \text{Lepcső}(n-1) = \text{Lepcső}(n)$$

---

d) egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk, de két egyformát egymás után nem léphetünk?

(Feladat: Szoldatics József)

Felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Lépcső	···	$n-2$	$n-1$	n
1	···	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	···	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
Összes	···	s_{n-2}	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva:

Lépcső	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	0	1	1	0	...	1	...	1	...	0
2	0	1	1	0	1	...	0	...	1	...	1
Összes	1	1	2	1	1	...	1	...	2	...	1

$$\text{Lepcso}(n)\begin{cases} 2 & n = 3k \\ 1 & n = 3k+1 \\ 1 & n = 3k+2 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

2. Piros és kék színű üveggolyókból 10 golyó (15; 20; ... golyó) hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha

(Feladat: Szoldatics József)

a) nem akarjuk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?

Felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Darab	···	$n-2$	$n-1$	n
Piros	···	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
Kék	···	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
Összes	···	s_{n-2}	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva:

Darab	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
Piros	1	1	2	3	4	...	28	...	189	...	1278
Kék	0	1	1	1	2	...	13	...	88	...	595
Összes	1	2	3	4	6	...	41	...	277	...	1873

$$\text{Darab}(n-3) + \text{Darab}(n-1) = \text{Darab}(n)$$

b) nem akarjuk, hogy egyforma golyókból 2-nél több kerüljön egymás mellé?

Felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Darab	⋯	$n-1$	n
PP	⋯	a_{n-1}	a_n
PK	⋯	b_{n-1}	b_n
KK	⋯	c_{n-1}	c_n
KP	⋯	d_{n-1}	d_n
Összes		s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva:

Darab	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
PP	1	1	2	3	...	34	...	377	...	4181
PK	1	2	3	5	...	55	...	610	...	6765
KK	1	1	2	3	...	34	...	377	...	4181
KP	1	2	3	5	...	55	...	610	...	6765
Összes	4	6	10	16	...	178	...	1974	...	21892

$$\text{Darab}(n-2) + \text{Darab}(n-1) = \text{Darab}(n) = 2 \cdot \text{Fibonacci}(n-1)$$

---

3. Piros, kék és zöld színű üveggolyókból 10 golyó (15; 20; … golyó) hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha

(Feladat: Szoldatics József)

a) nem akarjuk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?

Felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Darab	⋯	$n-1$	n
Piros	⋯	a_{n-1}	a_n
Kék	⋯	b_{n-1}	b_n
Zöld	⋯	c_{n-1}	s_n
Összes	⋯	s_{n-1}	

Ezt végigfuttatva:

Darab	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
Piros	1	3	8	22	60	...	9136	...	1390592	...	211662336
Kék	1	2	6	16	44	...	6688	...	1017984	...	154947584
Zöld	1	3	8	22	60	...	9136	...	1390592	...	211662336
Összes	3	8	22	60	164	...	24960	...	3799168	...	578272256

$$2 \cdot \mathrm{Darab}(n-2) + 2 \cdot \mathrm{Darab}(n-1) = \mathrm{Darab}(m)$$

---

b) nem akarjuk, hogy kék és zöld kerüljön egymás mellé?

Felírás, ahol a nyilak mutatják, hogy melyik fokra honnan lehet lépni:

Darab	$\cdots$	$n-1$	n
Piros	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
Kék	$\cdots$	b_{n-1}	b_n
Zöld	$\cdots$	c_{n-1}	s_n
Összes	$\cdots$	s_{n-1}	

Ezt végigfuttatva:

Darab	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
Piros	1	3	7	17	41	...	3363	...	275807	...	22919537
Kék	1	2	5	12	29	...	2378	...	195025	...	15994428
Zöld	1	2	5	12	29	...	2378	...	195025	...	15994428
Összes	3	7	17	41	99	...	8119	...	665857	...	54608393

$$\mathrm{Darab}(n-2) + 2\mathrm{Darab}(n-1) = \mathrm{Darab}(m)$$

3.2. Feladatok indukcióra (azaz vegyük észre ...)

1. $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

(Feladat: Orosz Gyula)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1 = \sqrt{1}$; $a_2 = \sqrt{2}$; $a_3 = \sqrt{3}$; $a_4 = 2 = \sqrt{3}$; $a_5 = \sqrt{5}$
Sejtés: $a_n = \sqrt{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
Az indukciós lépést végrehajtva

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{n})^2} = \sqrt{1+n}$$

---

2. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2 - a_{n-1}}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = \dfrac{1}{2}$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; $a_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$; $a_3 = \frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$; $a_4 = \frac{1}{9} = \frac{1}{8+1}$; $a_5 = \frac{1}{17} = \frac{1}{16+1}$
Sejtés: $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}+1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
Az indukciós lépést végrehajtva

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}+1}}{2 - \frac{1}{2^{n-1}+1}} = \frac{1}{2(2^{n-1}+1) - 1} = \frac{1}{2^n + 1}$$

---

3. $a_n = \dfrac{n-1}{n}\left(a_{n-1} + 1\right); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 0$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 0 = \frac{0}{2}$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = 1 = \frac{2}{2}$; $a_4 = \frac{3}{2}$; $a_5 = 2 = \frac{4}{2}$
Sejtés: $a_n = \dfrac{n-1}{2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
Az indukciós lépést végrehajtva

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(a_n + 1\right) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

3.3. Feladatok teleszkopikus összegre

1. $a_n = a_{n-1} + 5; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

   A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =6; a_3 =11; a_4 =16; a_5 =21
   Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 5 \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 5 \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 5 \\ a_2 &= a_1 + 5 \end{aligned}$$

   Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 5\,(n-1) \\ a_n &= 1 + 5\,(n-1) \\ a_n &= 5n - 4; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

   Megjegyzés
   Ez a „jól ismert” számtani sorozat.

---

2. $a_n = a_{n-1} + n; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

   A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =3; a_3 =6; a_4 =10; a_5 =15
   Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + (n) \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1) \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \end{aligned}$$

   Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 2 + ... + n \\ a_n &= 1 + 2 + ... + n \\ a_n &= \frac{n\,(n+1)}{2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

---

3. $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n\,(n-1)}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_3 = \frac{5}{3}$; $a_4 = \frac{7}{4}$; $a_5 = \frac{9}{5}$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} = a_{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n};$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \\
&\dots \\
a_3 &= a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
a_2 &= a_1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \\
a_n &= 2 - \frac{1}{n} \\
a_n &= \frac{2n-1}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

3.4. Feladatok teleszkopikus szorzatra

1. $a_n = 3a_{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1;$

....

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =3; a_3 =9; a_4 =27; a_5 =81
Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} \\ a_{n-1} &= 3a_{n-2} \\ &\dots \\ a_3 &= 3a_2 \\ a_2 &= 3a_1 \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot 3^{n-1} \\ a_n &= 1 \cdot 3^{n-1} \\ a_n &= 3^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

Megjegyzés
Ez a „jól ismert” mértani sorozat.

---

2. $a_n = 3a_{n-1} + 2; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1;$

(Feladat: Szoldatics József)

....

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =5; a_3 =17; a_4 =53; a_5 =161
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n + 1 = 3\left(a_{n-1} + 1\right)$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= 3\left(a_{n-1} + 1\right) \\ a_{n-1} + 1 &= 3\left(a_{n-2} + 1\right) \\ &\dots \\ a_3 + 1 &= 3\left(a_2 + 1\right) \\ a_2 + 1 &= 3\left(a_1 + 1\right) \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= \left(a_1 + 1\right) \cdot 3^{n-1} \\ a_n + 1 &= 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_n &= 2 \cdot 3^{n-1} - 1; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

---

3. $a_n = 3a_{n-1} + 1; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1;$

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n + \frac{1}{2} = 3\left(a_{n-1} + \frac{1}{2}\right)$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}
a_n + \frac{1}{2} &= 3\left(a_{n-1} + \frac{1}{2}\right) \\
a_{n-1} + \frac{1}{2} &= 3\left(a_{n-2} + \frac{1}{2}\right) \\
&\dots \\
a_3 + \frac{1}{2} &= 3\left(a_2 + \frac{1}{2}\right) \\
a_2 + \frac{1}{2} &= 3\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned}
a_n + \frac{1}{2} &= (a_1 + \frac{1}{2}) \cdot 3^{n-1} \\
a_n + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} \\
a_n &= \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{3^n - 1}{2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

3.5. Feladatok index léptetésre

1. $a_n = 4 + 4\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 =1$; $a_2 =1$; $a_3 =8$; $a_4 =24$; $a_5 =32$
Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + 4\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \\ a_{n-1} &= 4 + 4\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}} \qquad n \geq 3 \end{aligned}$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\left(\frac{a_{n-1} - 4}{4}\right)^2 = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}$$

$$a_n = 4 + 4\sqrt{\left(\frac{a_{n-1} - 4}{4}\right)^2 + a_{n-1}}$$

$$a_n = 4 + 4\sqrt{\left(\frac{a_{n-1} + 4}{4}\right)^2}$$

$$a_n = a_{n-1} + 8; \;\; n \geq 3$$

Ez pedig egy „sima” számtani sorozat

$$a_1 = 1; \;\; a_n = 8\,(n-1)\,; \;\; n \geq 2$$

---

2. $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}\right); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

(Feladat: KÖMAL 1998/október Gy.3225)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 =1$; $a_2 =3$; $a_3 =8$; $a_4 =20$; $a_5 =96$
Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n-1}\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}\right) \\ a_{n-1} &= \frac{n}{n-2}\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}\right) \qquad n \geq 3 \end{aligned}$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\frac{n-2}{n}a_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{n-2}{n}a_{n-1} + a_{n-1}\right)$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{2n-2}{n}a_{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot \frac{n+1}{n} a_{n-1};\ \ n \geq 3$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 \cdot \frac{n+1}{n} a_{n-1} \\
a_{n-1} &= 2 \cdot \frac{n}{n-1} a_{n-2} \\
&\dots \\
a_3 &= 2 \cdot \frac{4}{3} a_2 \\
a_2 &= 2 \cdot \frac{3}{2} a_1
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^{n-1} \frac{n+1}{2} a_1 \\
a_n &= (n+1) \cdot 2^{n-2}; \qquad n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

---

3. $a_n = \dfrac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}\right);\quad n \geq 2. a_1 = 1$
Igazoljuk, hogy a sorozat racionális számokból áll.

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = \dfrac{5}{8}$; $a_3 = \dfrac{9}{32}$; $a_4 = \dfrac{51}{128}$; $a_5 = \dfrac{187}{512}$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}\right) \\
16a_n &= 1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}} \\
96a_n &= 6 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1 + 24a_{n-1}} \\
4 + 96a_n &= 1 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1 + 24a_{n-1}} + 9 \\
4\left(1 + 24a_n\right) &= \left(\sqrt{1 + 24a_{n-1}} + 3\right)^2 \\
2\sqrt{1 + 24a_n} &= \sqrt{1 + 24a_{n-1}} + 3 \\
\sqrt{1 + 24a_n} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 24a_{n-1}}
\end{aligned}$$

Ez pedig az állítást bizonyítja, hiszen ha a_{n-1} és $\sqrt{1 + 24a_{n-1}}$ is racionális, akkor a_n és $\sqrt{1 + 24a_n}$ is az lesz, tehát ha a_n racionális, akkor a_{n+1} is az.

Megjegyzés
A sorozat zárt alakját is meghatározhatjuk

$$\sqrt{1 + 24a_n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 24a_{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1+24a_n} &= \sqrt{1+24a_{n-1}}+3\\
2\sqrt{1+24a_n}-6 &= \sqrt{1+24a_{n-1}}-3\\
2\left(\sqrt{1+24a_n}-3\right) &= \sqrt{1+24a_{n-1}}-3
\end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}
2\left(\sqrt{1+24a_n}-3\right) &= \sqrt{1+24a_{n-1}}-3\\
2\left(\sqrt{1+24a_{n-1}}-3\right) &= \sqrt{1+24a_{n-2}}-3\\
&\dots\\
2\left(\sqrt{1+24a_3}-3\right) &= \sqrt{1+24a_2}-3\\
2\left(\sqrt{1+24a_2}-3\right) &= \sqrt{1+24a_1}-3
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned}
2^{n-1}\left(\sqrt{1+24a_n}-3\right) &= \sqrt{1+24a_1}-3\\
2^{n-1}\left(\sqrt{1+24a_n}-3\right) &= 2\\
\sqrt{1+24a_n}-3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
\sqrt{1+24a_n} &= 3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
1+24a_n &= \left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]^2\\
a_n &= \frac{\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]^2-1}{24} \qquad n\in\mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

3.6. Feladatok új sorozat (új ismeretlen) bevezetésére

1. $a_n = 3a_{n-1} + n; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_3 = 18$; $a_4 = 59$; $a_5 = 183$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} + n \\
a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} &= 3a_{n-1} + \frac{3}{2}n + \frac{3}{4} \\
a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} &= 3a_{n-1} + \frac{3}{2}(n-1) + \frac{9}{4} \\
a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} &= 3\left(a_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

Új sorozatot bevezetve

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \\
b_n &= 3b_{n-1} \\
b_1 &= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Ez egy „sima” mértani sor

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{9}{4}3^{n-1} \\
b_n &= \frac{1}{4}3^{n+1} \\
a_n &= b_n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} \\
a_n &= \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4}; \qquad n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

---

2. $a_n = (n-1)\,a_{n-1} + n^2 - 3n + 1; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 9$; $a_4 = 44$; $a_5 = 235$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned}
a_n &= (n-1)\,a_{n-1} + n^2 - 3n + 1 \\
a_n + n &= (n-1)\,a_{n-1} + (n-1)^2 \\
a_n + n &= (n-1)\,(a_{n-1} + (n-1))
\end{aligned}$$

Új sorozatot bevezetve

$$b_n = a_n + n$$

$$b_1 = 2$$
$$b_n = (n-1)\, b_{n-1}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} b_n &= (n-1)\, b_{n-1} \\ b_{n-1} &= (n-2)\, b_{n-2} \\ &\dots \\ b_3 &= 2 \cdot b_2 \\ b_2 &= 1 \cdot b_1 \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 \cdot n! \\ b_n &= 2 \cdot n! \\ a_n &= b_n - n \\ a_n &= 2 \cdot n! - n; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

---

3. $a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 2$

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 2$; $a_2 = 7$; $a_3 = 23$; $a_4 = 73$; $a_5 = 227$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 3^{n-1} \\ a_n - 3^n &= 2a_{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_n - 3^n &= 2\left(a_{n-1} - 3^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Új sorozatot bevezetve

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - 3^n \\ b_1 &= -1 \\ b_n &= 2b_{n-1} \end{aligned}$$

Ez egy „sima” mértani sorozat

$$\begin{aligned} b_n &= -2^{n-1} \\ a_n &= b_n + 3^n \\ a_n &= 3^n - 2^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

3.7. Feladatok vegyesen (oldjuk meg „bármi áron és módszerrel”)

1. Az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; ...) hosszú számsorozatot, de minden számjegyet csak tőle 1-gyel eltérő számjegy követhet, azaz ($1 \to 2$; $2 \to 1{,}3$; $3 \to 2$). Hány ilyen sorozat van?

(Feladat: Szoldatics József)

....

Felírva, hogy honnan hova történhet a lépés

Darab	$\cdots$	$n-1$	n
1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	$\cdots$	b_{n-1}	b_n
3	$\cdots$	c_{n-1}	c_n
Összes	$\cdots$	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva

Darab	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	1	2	2	4	...	6	...	128	...	512
2	1	2	2	4	4	...	32	...	128	...	1024
3	1	1	2	2	4	...	16	...	128	...	512
Összes	3	4	6	8	12	...	64	...	384	...	2048

$$\text{Darab}(n) = \begin{cases} 2^{k+1}; & n = 2k \\ 3 \cdot 2^k; & n = 2k+1 \end{cases}$$

---

2. Az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; ...) hosszú számsorozatot, de minden számjegyet csak tőle legfeljebb 1-gyel eltérő számjegy követhet, azaz ($1 \to 1, 2$; $2 \to 1{,}2{,}3$; $3 \to 2, 3$) . Hány ilyen sorozat van?

(Feladat: Szoldatics József)

....

Felírva, hogy honnan hova történhet a lépés

Darab	$\cdots$	$n-1$	n
1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	$\cdots$	b_{n-1}	b_n
3	$\cdots$	c_{n-1}	c_n
Összes	$\cdots$	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva

Darab	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	2	5	12	29	...	2378	...	195025	...	15994428
2	1	3	7	17	41	...	3363	...	275807	...	22619537
3	1	2	5	12	29	...	2378	...	195025	...	15994428
Összes	3	7	17	41	99	...	8119	...	665857	...	54608393

$$\text{Darab}(n) = 2 \cdot \text{Darab}(n-1) + \text{Darab}(n-2)$$

---

3. Az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; . . .) hosszú számsorozatot, de minden számjegyet csak tőle legfeljebb 1-gyel eltérő számjegy követhet, de 2-t 2-es nem követhet, azaz (1 → 1, 2; 2 → 1,3; 3 → 2, 3).Hány ilyen sorozat van?

(Feladat: Szoldatics József)

....

Felírva, hogy honnan hova történhet a lépés

Darab	$\cdots$	$n-1$	n
1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	$\cdots$	b_{n-1}	b_n
3	$\cdots$	c_{n-1}	c_n
Összes	$\cdots$	s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva

Darab	1	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
1	1	2	4	8	16	...	512	...	16384	...	524288
2	1	2	4	8	16	...	512	...	16384	...	524288
3	1	2	4	8	16	...	512	...	16384	...	524288
Összes	3	6	12	24	48	...	1536	...	49152	...	1572864

$$\text{Darab}(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$$

---

4. Az 1, 2 számjegyek felhasználásával képezzünk 10 (15; 20; . . . hosszú) számsorozatot, de 1-es csak legalább 2db 2-es után állhat (vagy 1-es után), azaz (1 → 1, 2; 12 → 2, 22 → 1, 2). Hány ilyen sorozat van?

(Feladat: Szoldatics József)

....

Felírva, hogy honnan hova történhet a lépés

Darab	···	$n-1$	n
11	···	a_{n-1}	a_n
12	···	b_{n-1}	b_n
21	···	c_{n-1}	c_n
22	···	d_{n-1}	d_n
Összes		s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva

Darab	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
11	1	1	2	4	...	114	...	1897	...	31572
12	1	1	2	4	...	114	...	1897	...	31572
21	0	1	2	3	...	86	...	1432	...	23833
22	1	2	3	5	...	151	...	2513	...	41824
Összes	3	5	9	16	...	465	...	7739	...	128801

---

5. Kettes számrendszerbeli 10 (15; 20; . . .) hosszú számok száma, ha 0-s csak dupla 1-es után állhat, azaz (01 $\to$ 1; 11 $\to$ 0,1; 0 $\to$ 1)

(Feladat: Szoldatics József)

Felírva, hogy honnan hova történhet a lépés

Darab	···	$n-1$	n
00	···	0	0
01	···	b_{n-1}	b_n
10	···	c_{n-1}	c_n
11	···	d_{n-1}	d_n
Összes		s_{n-1}	s_n

Ezt végigfuttatva

Darab	2	3	4	5	...	10	...	15	...	20
00	0	0	0	0	...	0	...	0	...	0
01	0	0	1	1	...	6	...	41	...	277
10	0	1	1	1	...	9	...	60	...	406
11	1	1	1	2	...	13	...	88	...	595
Összes	1	2	3	4	...	28	...	189	...	1278

---

6. $a_n = \dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+4)\,(n+3)\,(n+2)}\,(a_{n-1}+1)\,;\quad n \geq 2;\qquad a_1 = 0$

(Feladat: Csorba Ferenc, Kvant)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{1}{20}$; $a_3 = \frac{3}{25}$; $a_4 = \frac{1}{5}$; $a_5 = \frac{2}{7}$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+4)\,(n+3)\,(n+2)}\,(a_{n-1}+1)\\
(n+4)\,(n+3)\,(n+2)\,a_n &= (n+1)\,n\,(n-1)\,a_{n-1} + (n+1)\,n\,(n-1)\\
(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n &= (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)\,a_{n-1}+\\
&\quad + (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)
\end{aligned}
$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$
\begin{aligned}
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n =\\
&= (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)\,a_{n-1}+\\
&+n^9 + 9n^8 + 30n^7 + 42n^6 + 9n^5 - 39n^4 - 40n^3 - 12n^2
\end{aligned}
$$

Index léptetést végrehajtva

$$
\begin{aligned}
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n =\\
&\qquad = (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)\,a_{n-1}+\\
&\qquad\quad + n^9 + 9n^8 + 30n^7 + 42n^6 + 9n^5 - 39n^4 - 40n^3 - 12n^2\\
&(n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3 n^2\,(n-1)\,a_{n-1} =\\
&\qquad = (n+2)\,(n+1)^2\,n^3\,(n-1)^2\,(n-2)\,a_{n-2}+\\
&\qquad\quad + (n-1)^9 + 9\,(n-1)^8 + 30\,(n-1)^7 + 42\,(n-1)^6 +\\
&\qquad\quad + 9\,(n-1)^5 - 39\,(n-1)^4 - 40\,(n-1)^3 - 12\,(n-1)^2\\
&\qquad\ldots\\
7\cdot 6^2\cdot 5^3\cdot 4^2\cdot 3a_3 &= 6\cdot 5^2\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2a_2 + 3^9 + 9\cdot 3^8 + 30\cdot 3^7 + 42\cdot 3^6+\\
&\quad + 9\cdot 3^5 - 39\cdot 3^4 - 40\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2\\
6\cdot 5^2\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2a_2 &= 5\cdot 4^2\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 1a_1 + 2^9 + 9\cdot 2^8 + 30\cdot 2^7 + 42\cdot 2^6+\\
&\quad + 9\cdot 2^5 - 39\cdot 2^4 - 40\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2
\end{aligned}
$$

Összeadva és rendezve

$$
\begin{aligned}
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n = 8640a_1+\\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} i^9 + 9\sum_{i=2}^{n} i^8 + 30\sum_{i=2}^{n} i^7 + 42\sum_{i=2}^{n} i^6 + 9\sum_{i=2}^{n} i^5 - 39\sum_{i=2}^{n} i^4 - 40\sum_{i=2}^{n} i^3 - 12\sum_{i=2}^{n} i^2\\
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n = 8640a_1+\\
&\quad + \frac{(n-1)\,n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2\,(n+3)^2\,(n+4)}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n &= \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{10} \\
(n+2)a_n &= \frac{(n-1)n}{10} \\
a_n &= \frac{(n-1)n}{10(n+2)}; \qquad n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}
$$

---

7. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = A$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = A$; $a_2 = 1$; $a_3 = \frac{3}{4}$; $a_4 = \frac{2}{3}$; $a_5 = \frac{5}{8}$
Rendezve a rekurziós összefüggést

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1} \\
(n-1)^2 a_n &= (n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)
\end{aligned}
$$

Index léptetést végrehajtva

$$
\begin{aligned}
(n-1)^2 a_n &= (n-2)^2 a_{n-1} + (n-1) \\
(n-2)^2 a_{n-1} &= (n-3)^2 a_{n-2} + (n-2) \\
&\dots \\
3^2 a_4 &= 2^2 a_3 + 3 \\
2^2 a_3 &= 1^2 a_2 + 2
\end{aligned}
$$

Összeadva és rendezve

$$
\begin{aligned}
(n-1)^2 a_n &= a_2 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \\
(n-1)^2 a_n &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \\
(n-1)^2 a_n &= \frac{n(n-1)}{2} \\
a_n &= \frac{n}{2(n-1)}; \qquad n \geq 2
\end{aligned}
$$

$$a_1 = A; \ a_n = \frac{n}{2(n-1)}; \qquad n \geq 2; \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

---

8. $a_n = 1 - \frac{n-1}{n} a_{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{2}{3}$; $a_4 = \frac{1}{2}$; $a_5 = \frac{3}{5}$; $a_6 = \frac{1}{2}$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = 1 - \frac{n-1}{n}a_{n-1}$$
$$na_n + (n-1)a_{n-1} = n$$

Új sorozatot bevezetve

$$b_n = na_n$$
$$b_1 = b_2 = 1$$

Index léptetést végrehajtva

$$b_n + b_{n-1} = n$$
$$b_{n-1} + b_{n-2} = n-1; \qquad n \geq 3$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$b_n - b_{n-2} = 1$$
$$b_n = 1 + b_{n-2}$$
$$b_{2n-1} = b_{2n} = n$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{k}{2k-1} & n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{2} & n = 2k \end{cases} \qquad n; k \in \mathbb{N}^+$$

---

9. $a_n = -\frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}a_{n-2}$; $\quad n \geq 3$; $\quad a_1 = 1$; $\quad a_2 = \frac{1}{2}$

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_4 = \frac{1}{4}$; $a_5 = \frac{1}{5}$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$(n-1)\,na_n = -\,(n-1)\,a_{n-1} + n\,(n-2)\,a_{n-2}$$

Új sorozatot bevezetve

$$b_n = na_n$$
$$b_1 = b_2 = 1$$
$$(n-1)\,b_n = -b_{n-1} + nb_{n-2}$$

Index léptetést végrehajtva

$$(n-1)\,[b_n - b_{n-2}] = b_{n-2} - b_{n-1}$$
$$(n-2)\,[b_{n-1} - b_{n-3}] = b_{n-3} - b_{n-2}$$
$$\ldots$$

$$3\,[b_4 - b_2] = b_3 - b_2$$
$$2\,[b_3 - b_1] = b_2 - b_1$$

Mivel az utolsó egyenlet jobb oldala nulla ($b_1 = b_2 = 1$), ezért a bal is ($b_1 = b_3 = 1 = b_2$) és ez végigfut az egyenleteken, azaz

$$b_n = 1$$
$$a_n = \frac{1}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

---

10. $na_n = 2(2n-1)a_{n-1}; \quad n \geq 2; \quad a_1 = 2$
Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

(Feladat: KÖMAL, 1995/május, Gy.2992)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =2; a_2 =6; a_3 =20; a_4 =70; a_5 =252
Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} na_n &= 2(2n-1)a_{n-1} \\ (n-1)a_{n-1} &= 2(2n-3)a_{n-2} \\ &\dots \\ 3a_3 &= 2 \cdot 5 \cdot a_2 \\ 2a_2 &= 2 \cdot 3 \cdot a_1 \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned} n!a_n &= 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)a_1 \\ a_n &= 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} \end{aligned}$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \frac{n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n! \cdot n!} \\ a_n &= \frac{1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (3 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{n! \cdot n!} \\ a_n &= \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \\ a_n &= \binom{2n}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

Ez pedig egész.

---

11. $a_n = \frac{1}{2}\left(3a_{n-1} + \sqrt{5a_{n-1}^2 - 4}\right); \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$
Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 5$; $a_4 = 13$; $a_5 = 34$
Rendezve a rekurziós összefüggést

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3a_{n-1} + \sqrt{5a_{n-1}^2 - 4}\right)$$

$$2a_n - 3a_{n-1} = \sqrt{5a_{n-1}^2 - 4}$$

$$4a_n^2 - 12a_n a_{n-1} + 9a_{n-1}^2 = 5a_{n-1}^2 - 4$$

$$4a_n^2 - 12a_n a_{n-1} + 4a_{n-1}^2 = -4$$

$$\begin{cases} 4a_n^2 - 12a_n a_{n-1} + 4a_{n-1}^2 = -4 \\ 4a_{n-1}^2 - 12a_{n-1}a_{n-2} + 4a_{n-2}^2 = -4; \quad n \geq 3 \end{cases}$$

$$4a_n^2 - 4a_{n-2}^2 + 12a_{n-1}a_{n-2} - 12a_n a_{n-1} = 0$$

$$(a_n - a_{n-2})(4a_n + 4a_{n-2} - 12a_{n-1}) = 0$$

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}; \quad n \geq 3$$

Ez azt mutatja, hogy ha a sorozatban van két egymás utáni egész szám, akkor a következő is egész, azaz innentől minden szám egész. Az adott sorozat első két eleme egész, tehát a sorozat minden eleme egész szám.

---

12. $a_n = 3a_{n-1} + \sqrt{8a_{n-1}^2 - 8}; \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$
Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 17$; $a_4 = 99$; $a_5 = 577$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n - 3a_{n-1} = \sqrt{8a_{n-1}^2 - 8}$$

$$a_n^2 - 6a_n a_{n-1} + 9a_{n-1}^2 = 8a_{n-1}^2 - 8$$

$$a_n^2 - 6a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 = -8$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{cases} a_n^2 - 6a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 = -8 \\ a_{n-1}^2 - 6a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}^2 = -8; \quad n \geq 3 \end{cases}$$

$$a_n^2 - a_{n-2}^2 + a_{n-1}a_{n-2} - 6a_n a_{n-1} = 0$$

$$(a_n - a_{n-2})(a_n + a_{n-2} - 6a_{n-1}) = 0$$

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}; \quad n \geq 3$$

Ez azt mutatja, hogy ha a sorozatban van két egymás utáni egész szám, akkor a következő is egész, azaz innentől minden szám egész. Az adott sorozat első két eleme egész, tehát a sorozat minden eleme egész szám.

---

13. $a_n = \dfrac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1}+1); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 0$

(Feladat: Csorba Ferenc, Kvant)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1}+1) \\ (n+2)(n+1)\,a_n &= n(n-1)\,a_{n-1} + n(n-1) \\ (n+2)(n+1)^2\,na_n &= (n+1)\,n^2(n-1)\,a_{n-1} + n^2\left(n^2-1\right) \end{aligned}$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$(n+2)(n+1)^2\,na_n = (n+1)\,n^2(n-1)\,a_{n-1} + n^4 - n^2$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)^2\,na_n &= (n+1)\,n^2(n-1)\,a_{n-1} + n^4 - n^2 \\ (n+1)\,n^2(n-1)\,a_{n-1} &= n(n-1)^2(n-2)\,a_{n-2} + (n-1)^4 - (n-1)^2 \\ &\dots \\ 5\cdot 4^2\cdot 3a_3 = 5\cdot 4^2\cdot 3a_3 &= 4\cdot 3^2\cdot 2a_2 + 3^4 - 3^2 \\ 4\cdot 3^2\cdot 2a_2 = 4\cdot 3^2\cdot 2a_2 &= 3\cdot 2^2\cdot 1a_1 + 2^4 - 2^2 \end{aligned}$$

Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)^2\,na_n &= 12a_1 + \sum_{i=2}^{n} i^4 - \sum_{i=2}^{n} i^2 = 12a_1 + \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ (n+2)(n+1)^2\,na_n &= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[\frac{3n^2+3n-1}{5} - 1\right] = \\ &= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-6)}{30} = \\ &= 12a_1 + \frac{(n+2)(n+1)\,n(n-1)(2n+1)}{10} \\ (n+2)(n+1)^2\,na_n &= \frac{(n+2)(n+1)\,n(n-1)(2n+1)}{10} \\ a_n &= \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}; \qquad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

---

14. $a_n = a_{n-1} + 4\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{2}} + 2; \quad n \geq 2; \quad a_1 = 2$

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =2; a_2 =8; a_3 =18; a_4 =32; a_5 =50

$$a_n = a_{-1n} + 4\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 2 > 0$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 4\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 2 \\
\frac{a_n}{2} &= \frac{a_{n-1}}{2} + 2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 1 \\
\frac{a_n}{2} &= \left(\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 1\right)^2 \\
\sqrt{\frac{a_n}{2}} &= \sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 1
\end{aligned}$$

Teleszkopikus összeget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a_n}{2}} &= n \\
a_n &= 2n^2
\end{aligned}$$

---

15. $a_n = \dfrac{2a_{n-1} - 4}{a_{n-1}}; \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =-2; a_3 =4; a_4 =1; a_5 =-2
Tehát a sorozat periodikus, ezért

$$2017 = 3 \cdot 672 + 1$$

$$a_{2017} = a_1 = 1$$

---

16. $a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}; \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =15; a_3 =33; a_4 =51; a_5 =69
A sorozat elemeit vizsgálva

$$a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} > 9; \quad n \geq 2$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$

$$\frac{a_n - 9}{6} = \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$
$$\left(\frac{a_n - 9}{6}\right)^2 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{cases} \left(\frac{a_n - 9}{6}\right)^2 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\ \left(\frac{a_{n-1} - 9}{6}\right)^2 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}; \qquad n \geq 3 \end{cases}$$
$$\left(\frac{a_n - 9}{6}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1} - 9}{6}\right)^2 + a_{n-1}; \qquad n \geq 2$$
$$\left(\frac{a_n - 9}{6}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1} + 9}{6}\right)^2$$
$$\frac{a_n - 9}{6} = \frac{a_{n-1} + 9}{6}$$
$$a_n = a_{n-1} + 18; \qquad n \geq 3$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 18 \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 18 \\ &\ldots \\ a_4 &= a_3 + 18 \\ a_3 &= a_2 + 18 \end{aligned}$$

Összeadva és rendezve

$$a_n = a_2 + 18(n-2) = 18n - 3; \qquad n \geq 2$$

---

17. $a_n = 25 + 10\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}; \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$

(Feladat: Szoldatics József)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =15; a_2 =35; a_3 =85; a_4 =135; a_5 =185
A sorozat elemeit vizsgálva

$$a_n = 25 + 10\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} > 25; \quad n \geq 2$$

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = 25 + 10\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$
$$\frac{a_n - 25}{10} = \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$

$$\left(\frac{a_n-25}{10}\right)^2 = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{cases} \left(\frac{a_n-25}{10}\right)^2 = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1} \\ \left(\frac{a_{n-1}-25}{10}\right)^2 = a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}; \qquad n\geq 3 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a_n-25}{10}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1}-25}{10}\right)^2 + a_{n-1}$$

$$\left(\frac{a_n-25}{10}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1}+25}{10}\right)^2$$

$$\frac{a_n-25}{10} = \frac{a_{n-1}+25}{10}$$

$$a_n = a_{n-1}+50; \qquad n\geq 3$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}+50 \\ a_{n-1} &= a_{n-2}+50 \\ &\ldots \\ a_4 &= a_3+50 \\ a_3 &= a_2+50 \end{aligned}$$

Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned} a_n &= a_2+(n-2)50 \\ a_n &= 50n-65; \qquad n\geq 2 \end{aligned}$$

---

18. $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2+a_{n-2}^2}{a_{n-3}}; \quad n\geq 4; \quad a_1=a_2=a_3=1$

(Feladat: KÖMAL, 2001/április A.265)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =1; a_3 =1; a_4 =2; a_5 =5
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2+a_{n-2}^2}{a_{n-3}}$$

$$a_na_{n-3} = a_{n-1}^2+a_{n-2}^2$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{cases} a_na_{n-3} &= a_{n-1}^2+a_{n-2}^2 \\ a_{n-1}a_{n-4} &= a_{n-2}^2+a_{n-3}^2 \qquad n\geq 5 \end{cases}$$

$$a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-4} = a_{n-1}^2 - a_{n-3}^2$$
$$a_n a_{n-3} + a_{n-3}^2 = a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_{n-4}$$
$$a_{n-3}\left(a_n + a_{n-3}\right) = a_{n-1}\left(a_{n-1} + a_{n-4}\right)$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}
a_{n-3}\left(a_n + a_{n-3}\right) &= a_{n-1}\left(a_{n-1} + a_{n-4}\right)\\
a_{n-4}\left(a_{n-1} + a_{n-4}\right) &= a_{n-2}\left(a_{n-2} + a_{n-5}\right)\\
a_{n-5}\left(a_{n-2} + a_{n-5}\right) &= a_{n-3}\left(a_{n-3} + a_{n-6}\right)\\
a_{n-6}\left(a_{n-3} + a_{n-6}\right) &= a_{n-4}\left(a_{n-4} + a_{n-7}\right)\\
&\dots\\
a_3\left(a_6 + a_3\right) &= a_5\left(a_5 + a_2\right)\\
a_2\left(a_5 + a_2\right) &= a_4\left(a_4 + a_1\right)
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned}
a_3 a_2\left(a_n + a_{n-3}\right) &= a_{n-1}a_{n-2}\left(a_4 + a_1\right)\\
a_n &= 3a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3} \qquad n \geq 5
\end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy ha a sorozatban van három egymás utáni egész szám, akkor a következő is egész, azaz innentől minden szám egész. Az adott sorozat első három eleme egész, tehát a sorozat minden eleme egész szám.

---

19. $x = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4x}}}}$

Oldjuk meg az egyenletet!

(Feladat: KÖMAL, 2002/október B.3579)

Legyen $a_1 = x$ $\left(x \geq \frac{3}{4}\right)$; és $a_n = \sqrt{-3 + 4a_{n-1}}$.
Megoldandó a $a_5 = a_1$ egyenlet.
Ha $x = 1$ vagy $x = 3$, akkor nyilvánvaló, hogy megoldás.
Ha $\frac{3}{4} \leq x < 1$

$$\begin{aligned}
x = a_1 &< 1\\
4a_1 &< 4\\
-3 + 4a_1 &< 1\\
\sqrt{-3 + 4a_1} &< 1\\
a_2 &< 1
\end{aligned}$$

azaz minden $a_i < 1$,
és $a_1 > \sqrt{-3 + 4a_1} = a_2$, hiszen $a_1^2 - 4a_1 + 3 > 0$.
Ezekből következik, hogy

$$1 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \dots$$

Ha $1 < x < 3$

$$\begin{aligned} 1 < x = a_1 &< 3 \\ 4 < 4a_1 &< 12 \\ 1 < -3 + 4a_1 &< 9 \\ 1 < \sqrt{-3 + 4a_1} &< 9 \\ 1 < a_2 &< 3 \end{aligned}$$

azaz minden $1 < a_i < 3$,
és $a_1 < \sqrt{-3+4a_1} = a_2$, hiszen $a_1^2 - 4a_1 + 3 < 0$.
Ezekből következik, hogy

$$1 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < \ldots < 3$$

Ha $3 < x$

$$\begin{aligned} 3 &< x = a_1 \\ 12 &< 4a_1 \\ 9 &< -3 + 4a \\ 3 &< \sqrt{-3 + 4a} \\ 3 &< a_2 \end{aligned}$$

azaz minden $3 < a_i$,
és $a_1 > \sqrt{-3+4a_1} = a_2$, hiszen $a_1^2 - 4a_1 + 3 > 0$.
Ezekből következik, hogy

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \ldots > 3$$

Összefoglalva, csak $x = 1$ vagy $x = 3$ a megoldás.

Megjegyzés
Ha n gyököt alkalmaztunk, azaz az $a_n = a_1$ egyenlet megoldását keressük, akkor is erre az eredményre jutunk.

---

20. $a_n = \dfrac{1}{1 - a_{n-1}} - \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$
A sorozat periodikus. Mi lehet az első elem?

(Feladat: KÖMAL, 2003/február B.3620)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1 - a_{n-1}} - \frac{1}{1 + a_{n-1}} \\ a_n &= \frac{2a_{n-1}}{1 - a_{n-1}^2} \\ a_1 &= \mathrm{tg}\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \text{tg}2\alpha \\
a_3 &= \frac{2\text{tg}2\alpha}{1-\text{tg}^2 2\alpha} = \text{tg}4\alpha \\
&\dots \\
a_n &= \frac{2\text{tg}2^{n-2}\alpha}{1-\text{tg}^2 2^{n-2}\alpha} = \text{tg}2^{n-1}\alpha
\end{aligned}$$

Ha periodikus, akkor

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_n \\
\text{tg}\alpha &= \text{tg}2^{n-1}\alpha \\
2^{n-1}\alpha &= \alpha + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \\
\alpha &= \frac{k}{2^{n-1}-1}\pi
\end{aligned}$$

$$a_1 = \text{tg}\left(\frac{k}{2^{n-1}-1}\pi\right); \qquad n \geq 2$$

---

21. $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ és $a_1 < a_2$ pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy $a_{45} > 3^{43}$.

(Feladat: KÖMAL 2004/szeptember B.3750)

....

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned}
a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \\
a_n - a_{n-1} &= 3a_{n-1} - 3a_{n-2}
\end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= 3\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= 3\left(a_{n-2} - a_{n-3}\right) \\
a_{n-2} - a_{n-3} &= 3\left(a_{n-3} - a_{n-4}\right) \\
&\dots \\
a_4 - a_3 &= 3\left(a_3 - a_2\right) \\
a_3 - a_2 &= 3\left(a_2 - a_1\right)
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= 3^{n-2}\left(a_2 - a_1\right) \\
a_n &= 3^{n-2}\left(a_2 - a_1\right) + a_{n-1} > 3^{n-2} \cdot 1 + 0 = 3^{n-2} \\
a_n &> 3^{n-2}
\end{aligned}$$

---

22. $a_n = a_{n-1} - \dfrac{n}{(n+1)!}; \quad n \geq 2. a_1 = 2;$

(Feladat: KÖMAL 2006/január B.3874)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = a_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}$$
$$a_n = a_{n-1} - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$
$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

Index léptetést végrehajtva

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$
$$a_{n-2} = a_{n-3} - \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$
$$\ldots$$
$$a_3 = a_2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$
$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

Összeadva és rendezve

$$a_n = a_1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{(n+1)!}$$
$$a_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{(n+1)!}$$

---

23. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$

Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyik nagyobb $\dfrac{1}{100}$-nál?

(Feladat: OKTV I.)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$$
$$\frac{1}{a_n} = \frac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$$

$$\frac{1}{a_n} = 2 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= 2 + \frac{1}{a_{n-1}} \\ \frac{1}{a_{n-1}} &= 2 + \frac{1}{a_{n-2}} \\ &\dots \\ \frac{1}{a_3} &= 2 + \frac{1}{a_2} \\ \frac{1}{a_2} &= 2 + \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= 2(n-1) + \frac{1}{a_1} = 2n - 1 \\ a_n &= \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

A feladat kérdésére válaszolva

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2n-1} &> \frac{1}{100} \\ 2n - 1 &< 100 \\ n &< \frac{101}{2} \end{aligned}$$

Tehát az első 50 elemre teljesük a feltétel.

---

24. $a_n = a_{n-1} + n^2, \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$
Hány 5-tel osztható szám van a sorozat első 100 tagja között?

(Feladat: Orosz Gyula)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =5; a_3 =14; a_4 =30; a_5 =55
Nézzük az osztási maradékok sorozatát:
$m_1 = 1;\ m_2 = 0;\ m_3 = 4;\ m_4 = 0;\ m_5 = 0;\ m_6 = 1;\ m_7 = 0$
és ez ismétlődik, ugyanis

$$\begin{aligned} m_{5k+1} &= 1 \\ m_{5k+2} &= 1 + (5k+2)^2 = 0 \\ m_{5k+3} &= 0 + (5k+3)^2 = 4 \\ m_{5k+4} &= 4 + (5k+4)^2 = 0 \\ m_{5k+5} &= 0 + (5k+5)^2 = 0 \\ m_{5k+6} &= m_{5(k+1)+1} = 0 + (5k+6)^2 = 1 \end{aligned}$$

Így $20 \cdot 3 = 60$ ilyen szám van.

25. $a_n = 3a_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$

(Feladat: Orosz Gyula)

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =7; a_3 =29; a_4 =103; a_5 =341
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2^n \\ a_n + 2^{n+1} &= 3a_{n-1} + 2^n + 2^{n+1} = 3a_{n-1} + 3 \cdot 2^n \\ a_n + 2^{n+1} &= 3\left(a_{n-1} + 2^n\right) \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n + 2^{n+1} &= 3\left(a_{n-1} + 2^n\right) \\ a_{n-1} + 2^n &= 3\left(a_{n-2} + 2^{n-1}\right) \\ a_{n-2} + 2^{n-1} &= 3\left(a_{n-3} + 2^{n-2}\right) \\ &\dots \\ a_3 + 2^4 &= 3\left(a_2 + 2^3\right) \\ a_2 + 2^3 &= 3\left(a_1 + 2^2\right) \end{aligned}$$

Összeadva és rendezve

$$\begin{aligned} a_n + 2^{n+1} &= 3^{n-1}\left(a_1 + 2^2\right) \\ a_n &= 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

26. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

(Feladat: Orosz Gyula)

Megoldva

$$\begin{aligned} r^2 - r - 6 = 0 \qquad &\Rightarrow \quad r_1 = -2;\ r_2 = 3 \\ a_n &= C_1 \cdot (-2)^{n-1} + C_2 \cdot 3^{n-1} \\ a_1 &= C_1 + C_2 = 0 \\ a_2 &= -2C_1 + 3C_2 = 1 \\ C_1 = -\frac{1}{5}; \quad C_2 = \frac{1}{5} \\ a_n &= -\frac{1}{5} \cdot (-2)^{n-1} + \frac{1}{5} \cdot 3^{n-1} \\ a_n &= \frac{3^{n-1} - (-2)^{n-1}}{5} \end{aligned}$$

---

27. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 3$

(Feladat: Orosz Gyula)

Karakterisztikus egyenlet

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1 + i;\ r_2 = 1 - i$$

Ezt felhasználva

$$a_n = \frac{1-2i}{2}(1+i)^{n-1} + \frac{1+2i}{2}(1-i)^{n-1}$$

---

28. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}, \quad n \geq 4; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_2 = 2; \ a_{2017} =?$

(Feladat: AD, 1985)

$a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 2;\ a_4 = 1;\ a_5 = 1;\ a_6 = 2;\ a_7 = 2;\ a_8 = 1$
Periódikus a sorozat, tehát $a_{2017} = a_1 = 1$

---

29. $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}, \quad n \geq 3; \ a_1 = \dfrac{1}{2}; \quad a_2 = \dfrac{1}{3}$

(Feladat: NMMV, 1992)

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{3};\ a_3 = \frac{1}{5};\ a_4 = \frac{1}{9};\ a_5 = \frac{1}{17}$
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}$$
$$\frac{1}{a_n} = \frac{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}{a_{n-1}a_{n-2}}$$
$$\frac{1}{a_n} = \frac{3}{a_{n-1}} - \frac{2}{a_{n-2}}$$

Új sorozatot bevezetve

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$
$$b_1 = 2$$
$$b_2 = 3$$
$$b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$$

Megoldva

$$b_n = 2^{n-1} + 1$$

Ezt felhasználva

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}; \qquad n \geq 2$$

30. $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = -3; \quad a_2 = 2$

(Feladat: Orosz Gyula)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \\ a_n a_{n-2} &= a_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} a_n a_{n-2} &= a_{n-1}^2 \\ a_{n-1} a_{n-3} &= a_{n-2}^2 \\ a_{n-2} a_{n-4} &= a_{n-3}^2 \\ &\dots \\ a_5 a_3 &= a_4^2 \\ a_4 a_2 &= a_3^2 \\ a_3 a_1 &= a_2^2 \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned} a_1 a_n &= a_{n-1} a_2 \\ a_n &= a_{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Ez egy mértani sorozat

$$a_n = -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

31. $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{cases} \quad n \geq 2; \quad a_1 = 2; \quad b_1 = 0$

(Feladat: Szoldatics József)

$a_1 = 2; \quad a_2 = 4; \quad a_3 = 26; \quad a_4 = 124$
$b_1 = 0; \quad b_2 = 6; \quad b_3 = 24; \quad b_4 = 126$
Az első egyenletből

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ 3b_{n-1} &= a_n - 2a_{n-1} \end{aligned}$$

$$3b_n = a_{n+1} - 2a_n$$

Ezt felhasználva a második egyenletbe

$$\begin{aligned} b_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ 3b_n &= 9a_{n-1} + 6b_{n-1} \\ a_{n+1} - 2a_n &= 9a_{n-1} + 2\left(a_n - 2a_{n-1}\right) \\ a_{n+1} &= 4a_n + 5a_{n-1} \\ a_n &= 4a_{n-1} + 5a_{n-2} \end{aligned}$$

Ugyanezt kapnánk a b_n sorozatra is, azaz

$$b_n = 4b_{n-1} + 5b_{n-2}$$

A rekurziós összefüggést megoldva

$$r^2 - 4r - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1;\ r_2 = 5$$

A megoldva kapjuk, hogy

$$a_n = (-1)^{n-1} + 5^{n-1}; \qquad b_n = 5^{n-1} - (-1)^{n-1}$$

---

32. $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = 5a_{n-1} - 3b_{n-1} \end{cases} \qquad n \geq 2; \qquad a_1 = 1; \qquad b_1 = -1$

(Feladat: Orosz Gyula)

$a_1 = 1; \qquad a_2 = 2; \qquad a_3 = 24; \qquad a_4 = 68$
$b_1 = -1; \qquad b_2 = 8; \qquad b_3 = -14; \qquad b_4 = 162$
Az első egyenletből

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ 2b_{n-1} &= a_n - 4a_{n-1} \\ 2b_n &= a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a második egyenletbe

$$\begin{aligned} b_n &= 5a_{n-1} - 3b_{n-1} \\ 2b_n &= 10a_{n-1} - 6b_{n-1} \\ a_{n+1} - 4a_n &= 10a_{n-1} - 3\left(a_n - 4a_{n-1}\right) \\ a_{n+1} &= a_n + 22a_{n-1} \\ a_n &= a_{n-1} + 22a_{n-2} \end{aligned}$$

Ugyanezt kapnánk a b_n sorozatra is, azaz

$$b_n = b_{n-1} + 22b_{n-2}$$

A rekurziós összefüggést megoldva

$$r^2 - r - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{1+\sqrt{89}}{2};\ r_2 = \frac{1-\sqrt{89}}{2}$$

A megoldva kapjuk, hogy

$$a_n = \left(\frac{89+3\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1+\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{89-3\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1-\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \left(\frac{-89+17\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1+\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{-89-17\sqrt{89}}{178}\right)\left(\frac{1-\sqrt{89}}{2}\right)^{n-1}$$

---

33. $na_n = (2n-2)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2};\quad n \geq 3;\qquad a_1 = 5;\qquad a_2 = 4$

(Feladat: Szoldatics József)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\begin{aligned} na_n &= (2n-2)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2} \\ na_n - na_{n-1} &= (n-2)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2} \\ n\,(a_n - a_{n-1}) &= (n-2)\,(a_{n-1} - a_{n-2}) \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned} n\,(a_n - a_{n-1}) &= (n-2)\,(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ (n-1)\,(a_{n-1} - a_{n-2}) &= (n-3)\,(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ (n-2)\,(a_{n-2} - a_{n-3}) &= (n-4)\,(a_{n-3} - a_{n-4}) \\ &\dots \\ 4\,(a_4 - a_3) &= 2\,(a_3 - a_2) \\ 3\,(a_3 - a_2) &= 1\,(a_2 - a_1) \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$\begin{aligned} n(n-1)\,(a_n - a_{n-1}) &= 2\,(a_2 - a_1) \\ a_n - a_{n-1} &= -\frac{2}{n(n-1)} \\ a_n &= a_{n-1} - \frac{2}{n(n-1)} \\ a_n &= a_{n-1} - \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva

$$a_n = a_{n-1} - \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n}$$

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} &= a_{n-2} - \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} \\
a_{n-2} &= a_{n-3} - \frac{2}{n-3} + \frac{2}{n-2} \\
&\dots \\
a_3 &= a_2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} \\
a_2 &= a_1 - \frac{2}{1} + \frac{2}{2}
\end{aligned}
$$

Összeadva és rendezve

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 - 2 + \frac{2}{n} \\
a_n &= 3 + \frac{2}{n} = \frac{3n+2}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}
$$

---

34. $a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2; \quad n \geq 2; 0 < a_1 < 1;$
Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_k^2 < 1$

(Feladat: KÖMAL, 1998/október Gy.3246)

.....

$a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2 = a_{n-1}(1 - a_{n-1})$; ezért $0 < a_n < 1$.
Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} - a_{n-1}^2 \\
a_{n-1}^2 &= a_{n-1} - a_n
\end{aligned}
$$

Index léptetést végrehajtva

$$
\begin{aligned}
a_k^2 &= a_k - a_{k+1} \\
a_{k-1}^2 &= a_{k-1} - a_k \\
a_{k-2}^2 &= a_{k-2} - a_{k-1} \\
&\dots \\
a_2^2 &= a_2 - a_3 \\
a_1^2 &= a_1 - a_2
\end{aligned}
$$

Összeadva és rendezve

$$
a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_1 - a_{k+1} < a_1 < 1; \qquad k \in \mathbb{N}^+
$$

---

35. $\dfrac{a_n}{a_{n-2}} + 6 \cdot \dfrac{a_{n-3}}{a_{n-1}} = 5; \quad n \geq 4; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_3 = \dfrac{5}{2}$

(Feladat: Szoldatics József)

Rendezve a sorozat képzési szabályát

$$\frac{a_n}{a_{n-2}}+6\cdot\frac{a_{n-3}}{a_{n-1}}=5$$
$$a_na_{n-1}+6a_{n-2}a_{n-3}=5a_{n-1}a_{n-2}$$

Vezessünk be új sorozatot

$$\begin{aligned}b_n&=a_na_{n+1}\\ b_1&=a_1a_2=2\\ b_2&=a_2a_3=5\\ b_n&=5b_{n-1}-6b_{n-2}\end{aligned}$$

ennek megoldása

$$b_n=2^{n-1}+3^{n-1}$$

Index léptetést végrehajtva

$$\begin{aligned}1+1&=a_1a_2\\ 2+3&=a_2a_3\\ 2^2+3^2&=a_3a_4\\ 2^3+3^3&=a_4a_5\\ &\dots\\ 2^{n-1}+3^{n-1}&=a_na_{n+1}\end{aligned}$$

Ha $n=2k$

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdot a_3a_4\cdot\ldots\cdot a_{2k-1}a_{2k}&=(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)\\ a_2a_3\cdot a_4a_5\cdot\ldots\cdot a_{2k-2}a_{2k-1}&=(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-3}+3^{2k-3}\right)\\ a_1a_{2k}(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-3}+3^{2k-3}\right)&=(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)\\ a_{2k}&=\frac{(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)}{(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-3}+3^{2k-3}\right)}\end{aligned}$$

Ha $n=2k+1$

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdot a_3a_4\cdot\ldots\cdot a_{2k-1}a_{2k}&=(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)\\ a_2a_3\cdot a_4a_5\cdot\ldots\cdot a_{2k}a_{2k+1}&=(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-1}+3^{2k-1}\right)\\ a_1a_{2k+1}(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)&=(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-1}+3^{2k-1}\right)\\ a_{2k+1}&=\frac{(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-1}+3^{2k-1}\right)}{(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)}\end{aligned}$$

$$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 2 & n=2\\ \dfrac{(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)}{(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-3}+3^{2k-3}\right)} & n=2k;\ k\ge 2\\ \dfrac{(2+3)\left(2^3+3^3\right)\ldots\left(2^{2k-1}+3^{2k-1}\right)}{(1+1)\left(2^2+3^2\right)\ldots\left(2^{2k-2}+3^{2k-2}\right)} & n=2k+1;\ k\ge 1\end{cases}$$

4. Melléklet

4.1. A feladatok megoldása során használt összefüggések

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\left(n+1\right)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} = \frac{2n^2+3n2+n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\left(n+1\right)^2}{2} = \frac{n4+2n^3+n^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2\left(n+1\right)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12} = \frac{2n^6+6n^5+5n^3-n^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^4+6n^3-3n+1\right)}{42} = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^2\left(n+1\right)^2\left(3n^4+6n^3-n^2-4n+2\right)}{24} = \frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3\right)}{90} =$$

$$= \frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{n^2\left(n+1\right)^2\left(n^2+n-1\right)\left(2n^4+4n^3-n^2-3n+3\right)}{20} =$$

$$= \frac{2n^10+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$$

4.2. „Sima” számtani sorozat rekurzív kezelése

Index léptetést végrehajtva

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + d \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\
&\dots \\
a_3 &= a_2 + d \\
a_2 &= a_1 + d
\end{aligned}
$$

Összeadva és rendezve

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$

4.3. „Sima” mértani sorozat rekurzív kezelése

Index léptetést végrehajtva

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} \cdot q \\
a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\
&\dots \\
a_3 &= a_2 \cdot q \\
a_2 &= a_1 \cdot q
\end{aligned}
$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

4.4. Másodrendű, $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ homogén rekurzió megoldása

$a_1 = 7$; $a_2 = 17$; $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

4.4.1. Generátor-függvény módszerrel

$$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots + a_nx^n - 1 + \cdots$$

Használjuk ezt a konkrét sorozatra:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots + a_nx^n - 1 + \cdots \\ 5xf(x) &= 5a_1x + 5a_2x^2 + 5a_3x^3 + 5a_4x^4 + \cdots + 5a_nx^n + \cdots \\ 6x^2f(x) &= 6a_1x^2 + 6a_2x^3 + 6a_3x^4 + 6a_4x^5 + \cdots + 6a_nx^n + 1 + \cdots \end{aligned}$$

A képzési szabályt figyelembe véve:

$$\begin{aligned} f(x)\left(1 - 5x + 6x^2\right) =& a_1 + x(a_2 - 5a_1) + x^2(a_3 - 5a_2 + 6a_1) + \\ & \cdots + x^{n-1}(a_n - 5a_{n-1} + 6_{n-2}) + \cdots \\ f(x)\left(1 - 5x + 6x^2\right) =& a_1 + x(a_2 - 5a_1) = 7 - 18x \\ f(x) =& \frac{7 - 18x}{1 - 5x + 6x^2} \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontva

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{7 - 18x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{4}{1 - 2x} + \frac{3}{1 - 3x} = \\ =& 4\left(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots + 2^{n-1}x^{n-1} + \cdots\right) + \\ & + 3\left(1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + 3^{n-1}x^{n-1} + \cdots\right) = \\ =& (4 + 3) + x(4 \cdot 2 + 3 \cdot 3) + x^2\left(4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2\right) + \\ & + \cdots + x^{n-1}\left(4 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Együtthatót azonosítva:

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 2^n + 3^n$$

4.4.2. Karakterisztikus egyenlettel

Keressük a megoldást $a_n = C \cdot q^{n-1}$ alakban! Ekkor:

$$\begin{aligned} C \cdot q^{n-1} =& 5 \cdot C \cdot q^{n-2} - 6 \cdot C \cdot q^{n-3} \\ q^2 =& 5q - 6 \\ q^2 - 5q + 6 =& 0 \end{aligned}$$

Itt q=2 és q=3 is megoldás.
A végleges megoldást keressük e két megoldás lineáris kombinációjaként:

$$a_n = C_1 \cdot 2^{n-1} + C_2 \cdot 3^{n-1}n$$

$$\begin{cases} 7 = C_1 + C_2 \\ 17 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = 3$$

$$a_n = 2 \cdot 2^n + 3^n$$

Ha megegyeznek a gyökök

Legyen $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$
Megoldva a két gyök egybeesik (=2). Ekkor sorozatot keressük

$$a_n = C_1 \cdot q^{n-1} + n \cdot C_2 \cdot q^{n-1} = q^{n-1}\left(C_1 + nC_2\right)$$

Konkretizálva:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 5 = 2C_1 + 4C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{3}{2}$$

A sorozat így:

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} + \frac{3}{2} n \cdot 2^{n-1} = (3n-1)\, 2^{n-2}$$

4.5. Periodikus, $a_n = \dfrac{a \cdot a_{n-1} + b}{c \cdot a_{n-1} + d}$ alakú sorozatok

A sorozat képzési szabályát alkalmazva azt akarjuk, hogy $a_n = a_{n+hossz}$ legyen igaz minden elemre.

4.5.1. Periódus hossza = 1

Feltétel: $a = d$; $b = c = 0$
Példa:

- $a_n = a_{n-1}$
  $\Rightarrow \quad a_1;\ a_2 = a_1;\ \dots$

4.5.2. Periódus hossza = 2

Feltétel: $a + d = 0$
Példa:

- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + 3}{2a_{n-1} - 1}$
  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{8}{9};\ a_3 = 5 = a_1;\ \dots$
  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = -\dfrac{1}{5};\ a_3 = -2 = a_1;\ \dots$
- $a_n = \dfrac{2a_{n-1} + 5}{7a_{n-1} - 2}$
  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{5}{11};\ a_3 = 5 = a_1;\ \dots$
  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = -\dfrac{1}{16};\ a_3 = -2 = a_1;\ \dots$

4.5.3. Periódus hossza = 3

Feltétel: $a^2 + ad + d^2 + bd = 0$
Példa:

- $a_n = \dfrac{a_{n-1} - 1}{7a_{n-1} + 2}$
  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{4}{37};\ a_3 = -\dfrac{11}{34};\ a_4 = 5 = a_1;\ \dots$
  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = \dfrac{1}{4};\ a_3 = -\dfrac{1}{5};\ a_4 = -2 = a_1;\ \dots$
- $a_n = \dfrac{a_{n-1} - 3}{a_{n-1} + 1}$
  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{1}{3};\ a_3 = -2;\ a_4 = 5 = a_1;\ \dots$
  $\Rightarrow \quad a_1 = 2;\ a_2 = -\dfrac{1}{3};\ a_3 = -5;\ a_4 = 2 = a_1;\ \dots$

- $a_n = \dfrac{2a_{n-1}-4}{7a_{n-1}+4}$

  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{2}{13};\ a_3 = -\dfrac{24}{33};\ a_4 = 5 = a_1;\ \ldots$

  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = \dfrac{4}{5};\ a_3 = -\dfrac{1}{4};\ a_4 = -2 = a_1;\ \ldots$

4.5.4. Periódus hossza = 4

Feltétel: $a^2 + 2bc + d^2 = 0$
Példa:

- $a_n = \dfrac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}$

  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{2}{3};\ a_3 = -\dfrac{1}{5};\ a_4 = -\dfrac{3}{2};\ a_5 = 5 = a_1;\ \ldots$

  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = 3;\ a_3 = \dfrac{1}{2};\ a_4 = -\dfrac{1}{3};\ a_5 = -2 = a_1;\ \ldots$

- $a_n = \dfrac{2a_{n-1}-1}{4a_{n-1}+2}$

  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{9}{22};\ a_3 = -\dfrac{1}{20};\ a_4 = -\dfrac{11}{18};\ a_5 = 5 = a_1;\ \ldots$

  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = \dfrac{5}{6};\ a_3 = \dfrac{1}{8};\ a_4 = -\dfrac{3}{10};\ a_5 = -2 = a_1;\ \ldots$

4.5.5. Periódus hossza = 5

Feltétel: $b^2c^2 + bc(3a^2 + 4ad + 3d^2) + (a^4 + a^3d + a^2d^2 + ad^3 + d^4) = 0$
Példa:

- $a_n = \dfrac{a_{n-1}+\sqrt{20}-5}{a_{n-1}+1}$

  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{3};\ a_3 = 9\sqrt{5}-20;\ a_4 = \dfrac{5-4\sqrt{5}}{11};\ a_5 = \dfrac{\sqrt{5}-5}{2};$
  $a_6 = 5 = a_1;\ \ldots$

  $\Rightarrow \quad a_1 = -2;\ a_2 = 7-2\sqrt{5};\ a_3 = \dfrac{\sqrt{5}+4}{11};\ a_4 = \dfrac{9\sqrt{5}-20}{5};\ a_5 = \dfrac{3-2\sqrt{5}}{3};$
  $a_6 = -2 = a_1;\ \ldots$

- $a_n = \dfrac{\sqrt{20}-6}{a_{n-1}+2}$

  $\Rightarrow \quad a_1 = 5;\ a_2 = \dfrac{2\sqrt{5}-6}{7};\ a_3 = \dfrac{49\sqrt{5}-119}{11};\ a_4 = -\dfrac{25\sqrt{5}+23}{59};$
  $a_5 = \dfrac{2\sqrt{5}-16}{5};\ a_6 = 5 = a_1;\ \ldots$

  $\Rightarrow \quad a_1 = -1;\ a_2 = 2\sqrt{5}-6;\ a_3 = -\sqrt{5}-1;\ a_4 = \sqrt{5}-1;\ a_5 = 4-2\sqrt{5};$
  $a_6 = -1 = a_1;\ \ldots$