Csakvonalzós szerkesztések

1. Előzmények

A 9. osztályos matematika tanórán egy érdekes problémakört érintettünk. Geometriából éppen a síkbeli alapszerkesztéseket tekintettük át, és a kérdések két (alap)feladat tárgyalásakor vetődtek fel. A továbbiakban először ismertetjük a két (nagyon egyszerű) alapfeladat egy lehetséges megoldását és a kapcsolódó tanulói kérdést, majd megadjuk a felvetett problémakör néhány eredményét.

Az eszközkorlátozott szerkesztések témaköre önállóan is érdekes. Általában nem igényel mélyebb előismereteket, ezért a tanulók kedvelni szokták, a dinamikus geometriai szoftverekkel pedig maga a szerkesztés technikai végrehajtása sem túl fáradságos.

1. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Szerkesszünk a P pontból merőlegest az e egyenesre!

Megoldás:

1°: P középpontú k_1 kört rajzolunk úgy, hogy a kör sugara a Pe távolságnál nagyobb legyen. k_1 és e metszéspontjait jelölje A és B.

2°: A középpontú k_2 kört rajzolunk „elég nagy" sugárral (azaz a kör sugarára $r_2 > \frac{AB}{2}$ teljesüljön).

3°: B középpontú k_3 kört szerkesztünk ugyanakkora r_2 sugárral.

4°: k_2 és k_3 egyik metszéspontját P-vel összekötve megkapjuk a kért f egyenest, mely merőleges e-re.

2. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre!

Megoldás:

1°. Felhasználjuk az 1. feladat megoldását, megszerkesztjük az e-re merőleges f egyenest.

2°. Jelölje C az e és f egyenesek metszéspontját. Felvesszük a C középpontú, CP sugarú k_4 kört.

3°. k_2 és f egymást P-ben és P'-ben metszik, a P pont keresett tükörképe P'.

Ebben a megoldásban a P pont tengelyes tükrözés végrehajtásához 4 kört vettünk fel. Természetes módon adódik a kérdés: el lehet-e végezni a szerkesztést ügyesebben, kevesebb kör segítségével?

Három körrel szinte minden tanuló tudta a megoldást, 2 körrel már némi kreativitásra is szükség volt.

3. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak három kört rajzolhatunk!

Megoldás:

Az 1. feladatbeli szerkesztést annyiban módosítjuk, hogy a k_1, k_2 és k_3 körök sugara egyenlő legyen. Ekkor k_2 és k_3 egyik metszéspontja P, míg a másik metszéspontja P', ami P tükörképe e-re. ($APBP'$ rombusz.)

4. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak két kört rajzolhatunk!

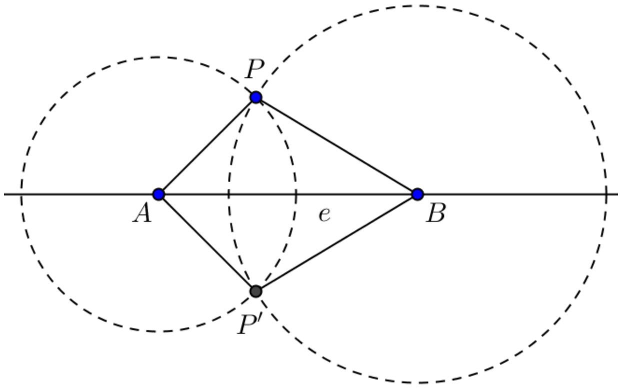
Megoldás:

1°. Legyen A az e egyenes tetszőleges pontja. Felvesszük az A középpontú, AP sugarú k_1 kört.

2°. Hasonlóan ha B az e egyenes egy (A-tól különböző) tetszőleges pontja, akkor megrajzoljuk a B középpontú, BP sugarú k_2 kört.

3°. Ekkor k_1 és k_2 P-től különböző metszéspontja P', ami P tükörképe e-re.

Indoklásul arra hivatkozhatunk, hogy $APBP'$ deltoid, és ennek PP' átlóját az AB átló merőlegesen felezi.



Ezután következett a nehéz kérdés: vajon a szerkesztés (P tükrözése e-re) elvégezhető-e egyetlen kör felvételével?

Hasonló, korlátozott szerkesztésekkel kapcsolatos kérdések a 11. osztályos tanórán és szakkörön is felvetődtek. A továbbiakban ezekből a kérdésekből és a rájuk adott válaszokból gyűjtöttünk össze néhányat.

2. Pont tükrözése egyenesre egyetlen kör felhasználásával

Először segédfeladatként P-ből merőlegest szerkesztünk.

5. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Szerkesszünk a P pontból merőlegest az e egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak egyetlen kört rajzolhatunk!

1°. Kijelölünk egy O pontot ez e egyenesen, és az ábra szerint felveszünk egy k kört. A kör A és B pontokban metszi az egyenest. (A kör mindig felvehető úgy, hogy P körön kívüli pont legyen, és e-re vonatkozó merőleges vetülete A és B közé essen.)

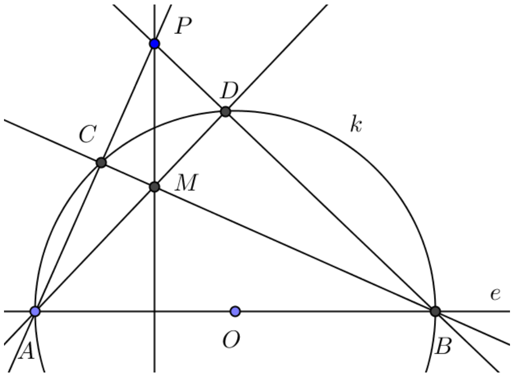
2°. Felvesszük a PA egyenest, ez k-t C-ben metszi.

3°. Hasonlóan felvesszük a PB egyenest, ez k-t D-ben metszi.

4°. Felvesszük a BC egyenest. Thalész tétele miatt ez merőleges AP-re.

5°. Felvesszük az AD egyenest. Thalész tétele miatt ez BP-re merőleges; BC és AD metszéspontját jelölje M.

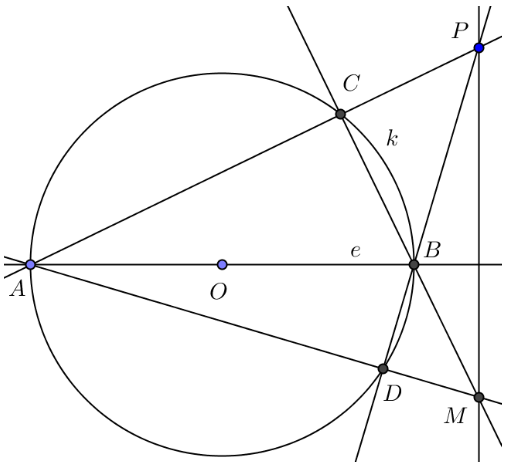
6°. Felvesszük a PM egyenest, ez a feladat megoldása. Ugyanis M az ABP háromszög BC és AD magasságainak metszéspontja, azaz magasságpont; akkor pedig PM is magasságvonal a háromszögben.



Megjegyzések:

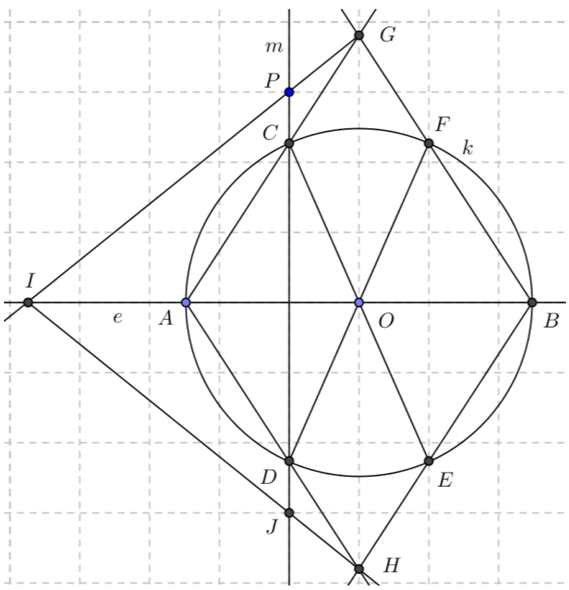
A szerkesztés akkor is végrehajtható, ha P a körön belüli pont (ekkor P és M szerepet cserél).

És a szerkesztés akkor is „működik”, ha *ABP* tompaszögű háromszög (pl. *P* merőleges vetülete az *AB* szakasz *B*-n túli meghosszabbítására esik), a szerkesztési lépések ugyanazok maradnak.



6. feladat: Adott egy *e* egyenes és rajta kívül egy *P* pont. Tükrözzük a *P* pontot az *e* egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak egyetlen kört rajzolhatunk!

Első megoldás (Korinek Ádám 11.a):



1°. Az 5. feladat alapján P-ből az $e(AB)$ egyenesre megszerkesztjük az m merőlegest. Ez a k kört C-ben és D-ben metszi.

2°. Felvesszük a CO és DO egyeneseket, ezek k-t E-ben, illetve F-ben metszik.

3°. Felvesszük a BF és BE egyeneseket, ezek AC-t G-ben, AD-t H-ban metszik.

4°. Felvesszük a GP egyenest, ez az I pontban metszi e-t.

5°. Végül IH és m metszéspontja legyen J, ez a keresett P' pont, P tükörképe.

Indoklás: G és H szimmetrikus helyzetű e-re, így IPJ is szimmetrikus háromszög.

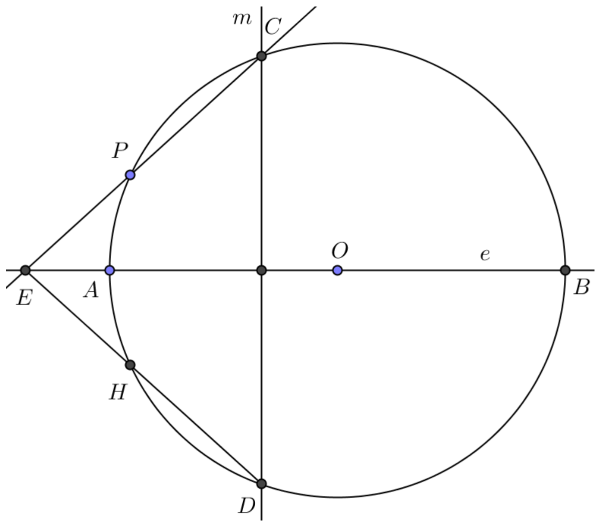
Megjegyzések:

Általános módszert kaptunk: P tengelyes tükrözéséhez elegendő egy G és H tükörkép-pontpár megszerkesztése (a tengelyes szimmetria ***közvetítő szerepe***).

Problémát jelenthet, ha GP párhuzamos e-vel (I nem áll elő). Azonban a módszerünk alapján már E és F tükrös helyzetűek, a szerkesztés velük is befejezhető (a 3. és 4. szerkesztési lépés felesleges). Gyorsabban célt érünk tehát, ha a PF és e metszéspontját vesszük fel (K), ekkor KE és m metszéspontja jelöli ki P'-t.

A két lehetőség közül az egyik biztosan végrehajtható, I vagy K valamelyike mindig létezik.

Második megoldás (Szepessy Hajnalka 11.a):



1°. O középpontú, P-n átmenő k kört rajzolunk. A kör A és B pontokban metszi e-t ($OA = OB = OP$).

2°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk. A kört m metszi C-ben és D-ben.

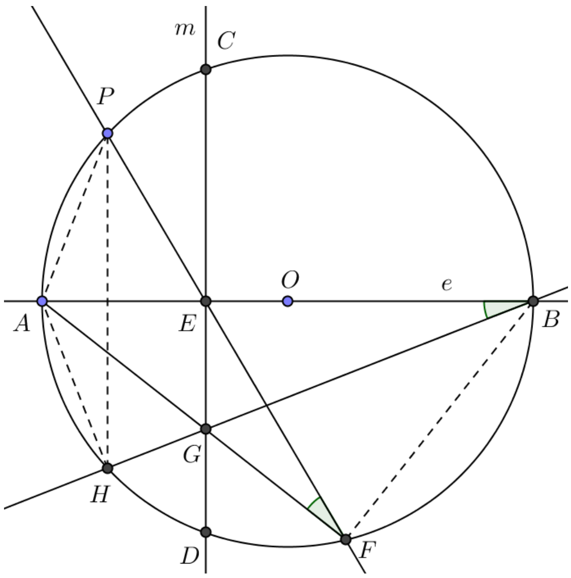
3°. CP metszi e-t E-ben.

4°. ED metszi k-t H-ban. Készen vagyunk: $P' \equiv H$.

Megjegyzések:

Ebben a megoldásban is a pontpárok tengelyes szimmetriáját használtuk fel (és a ***kör közvetítő szerepét***).

Harmadik megoldás (Kotán Tamás 11.a):



1°. O középpontú, P-n átmenő k kört rajzolunk. A kör A és B pontokban metszi e-t ($OA = OB = OP$).

2°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk. A kört m metszi C-ben és D-ben, az e egyenest E-ben.

3°. PE metszi k-t F-ben.

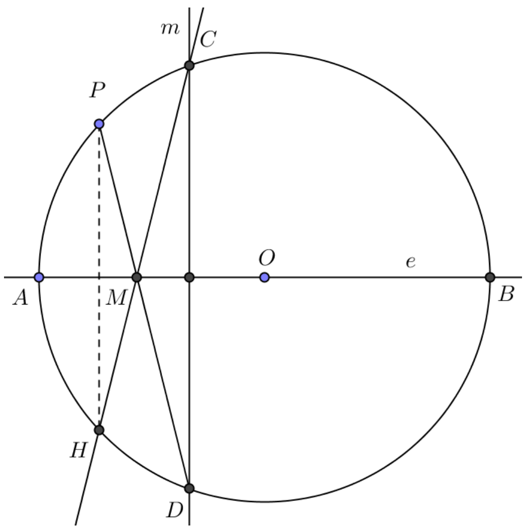
4°. AF metszi m-et G-ben.

5°. BG metszi k-t H-ban.

Állítás: $P' \equiv H$.

Bizonyítás (Dobos Sándor): $EGFB$ húrnégyszög, mert $GEB\angle = GFB\angle = 90°$. ($GFB\angle = AFB\angle$.) Ezért $EFG\angle = EBG\angle$ (kerületi szögek). Ekkor a szögekhez tartozó ívek egyenlők k-ban: $PA = AH$. Vagyis H valóban P tükörképe e-re.

Negyedik megoldás (Kotán Tamás 11.a):



1°. O középpontú, P-n átmenő k kört rajzolunk. A kör A és B pontokban metszi e-t ($OA = OB = OP$).

2°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk. A kört m metszi C-ben és D-ben.

3°. PD metszi e-t M-ben.

4°. CM metszi k-t H-ban.

Állítás: $P' \equiv H$.

Bizonyításként arra hivatkozhatunk, hogy $PCDH$ az e-re tengelyesen szimmetrikus alakzat, azaz húrtrapéz.

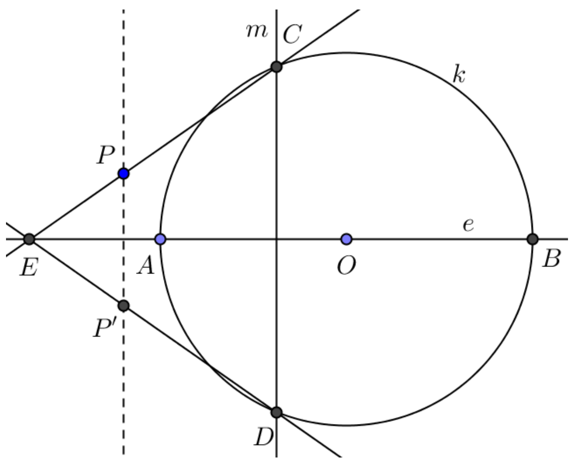
3. Pont tükrözése egyenesre egyetlen kör felhasználásával – de a kört más rajzolja meg

Az eddigi szerkesztésekben megszorító feltétel volt, hogy csak egyetlen kör rajzolható. Igaz, ezt úgy vehettük fel, ahogy szükségünk volt rá. Érdekes kérdés vetődött fel az órákon, további szigorításként: mi a helyzet akkor, ha (az egyetlen) kört más rajzolja meg? Azaz ha a kör, a P pont és az egyenes helyzete már rögzített.

Ha az egyenes a kör átmérője, és a P pont a körön van, akkor pl. a fenti második megoldás most is alkalmazható.

7. feladat: Adott egy e egyenes és egy kör, amelynek O középpontja az egyenesen van. Továbbá legyen az adott P pont például a körön kívül. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk!

Megoldás:



A k kör és e két metszéspontja legyen A és B.

1°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk, ez a kört metszi C-ben és D-ben.

2°. CP metszi e-t E-ben.

3°. Felvesszük az ED egyenest.

4°. P-ből merőlegest húzunk e-re, ez kimetszi ED-ből a keresett pontot.

Megjegyzések: Ismét az ábra tengelyes szimmetriáját használtuk ki, csak most a külső P pont miatt két merőlegest kellett szerkesztenünk. De a szerkesztés ugyanígy lépésenként végrehajtható akkor is, ha a P pont a körön belül van.

A kör középpontjának szerepe

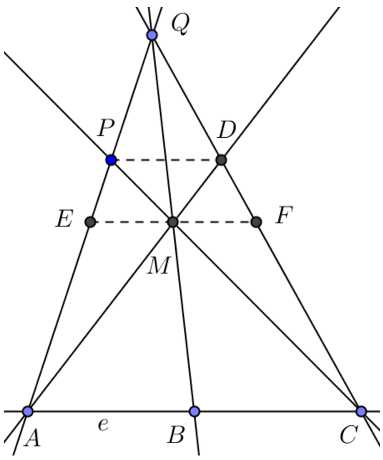
Nehezebb a szerkesztési feladat akkor, ha az e egyenes nem átmérője az adott körnek. Ekkor új ötletre van szükség (ez lesz a ***trapéztrükk***).

Először figyeljük meg, hogy az eddigi szerkesztések során egyedül a 6. feladat első megoldása használta fel az O pontot, az adott kör középpontját. A többi megoldásban O-ra nem volt szükség, a körközéppont ismerete nélkül is végrehajthatók voltak a szerkesztések.

A továbbiakban egy olyan módszert mutatunk, amely három ekvidisztáns helyzetű pont esetén alkalmazható. (*A, B, C* egy egyenesen lévő pontok ekvidisztáns helyzetűek, ha pl. $AB = BC$.) Ha a korábbi szerkesztésekben ismerjük az *O* pontot, akkor ez alapján további megoldási lehetőségekhez jutunk, mert ekkor az adott *A, O, B* pontok ekvidisztáns helyzetűek.

8. feladat (**segédfeladat – trapéztrükk**): Adott az *e* egyenesen három ekvidisztáns helyzetű *A, B, C* pont ($AB = BC$). Szerkesztendő csak vonalzóval külső *P* ponton keresztül *e*-vel párhuzamos egyenes.

Megoldás:



1°. Az *AP* egyenesen felveszünk egy tetszőleges *Q* pontot.
2°. Felvesszük a *QB* egyenest.
3°. Felvesszük a *PC* egyenest, ez metszi *QB*-t *M*-ben.
4°. Felvesszük a *QC* egyenest.
5°. Az *AM* egyenes metszi *QC*-t *D*-ben.
Állítás: *PD* párhuzamos *e*-vel.

Igazolás: A trapézok egy ismert tulajdonságát használjuk fel. Bármely *ACDP* trapézban ha az átlók *M* metszéspontján át párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor a szárakkal vett *E, F* metszéspontokra $EM = MF$. Emiatt az *ACQ* kiegészítő háromszög *QB* súlyvonalán rajta van *M*; a szerkesztés során ennek a tételnek a megfordítását használtuk fel.

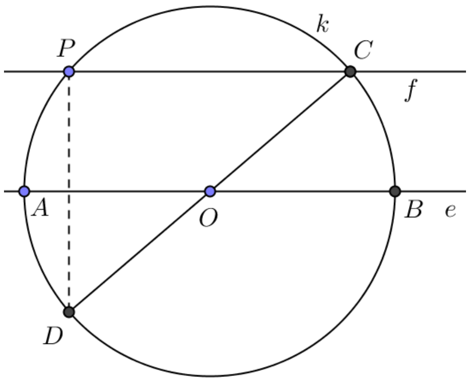
Alkalmazhatjuk Ceva tételét is az *ACQ* háromszögben. Az *AD, BQ, CP* transzverzálisok egy ponton mennek át, ezért $PA \cdot BC \cdot DQ = QP \cdot AB \cdot CD$. Innen $\dfrac{QP}{QD} = \dfrac{PA}{DC}$, és a párhuzamos szelők tételének megfordításához ennyi elég, *AC* és *PD* párhuzamosak.

Bevezetünk egy új definíciót: ha egy egyenesen adott három ekvidisztáns helyzetű pont, akkor ***irányegyenesnek*** nevezzük. (A trapéztrükkel azt mutattuk meg, hogy külső pontból adott irányegyenessel tudunk párhuzamost szerkeszteni úgy, hogy csak vonalzót használunk.)

A trapéztrükk segítségével a 7. feladat szerkesztését akkor is el tudjuk végezni, ha a P pont az adott körön van.

9. feladat: Adott egy *e* egyenes és egy kör, amelynek *O* középpontja az egyenesen van. Továbbá legyen az adott *P* pont a körön. Tükrözzük a *P* pontot az *e* egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk!

Megoldás:



A k kör és e két metszéspontja legyen A és B. Mivel A, O, B ekvidisztáns pontok, így e irányegyenes.

1°. P-n keresztül párhuzamost szerkesztünk e-vel. Az így kapott f egyenes másodszor C-ben metszi k-t.

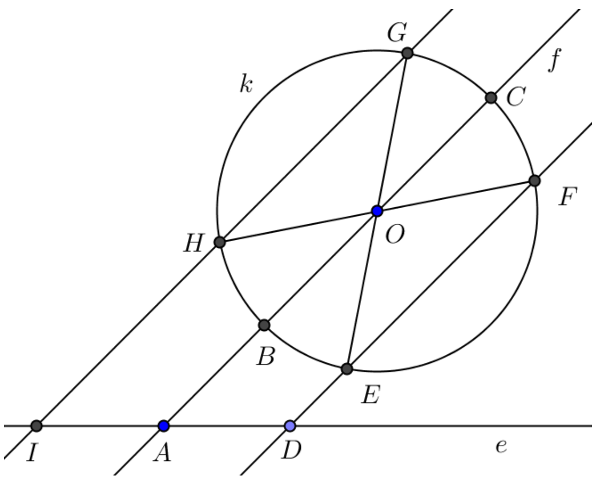
2°. Felvesszük a CO egyenest, ami D-ben metszi a kört.

Készen vagyunk: Thalész tétele miatt $CPD\angle = 90°$, így P-nek e-re vonatkozó tükörképe D.

Még megoldunk két segédfeladatot.

10. feladat (segédfeladat – párhuzamos húzása): Adott az O középpontú k kör. Szerkesszünk csak vonalzó felhasználásával külső P ponton keresztül adott e egyenessel párhuzamos egyenest!

Megoldás:



A feladat tulajdonképpen három ekvidisztáns pont szerkesztése e-re, mert így akkor e irányegyenes lesz. (És vele párhuzamos egyenes már szerkeszthető a trapéztrükkel.)

1°. Az e egyenes tetszőleges A pontját összekötjük O-val. Az így kapott f egyenes metszéspontjai k-val B és C.

2°. $f(B,O,C)$ irányegyenes, így az e egyenes egy D pontjából párhuzamost húzunk f-fel úgy, hogy az egyenes két pontban metssze k-t. A metszéspontokat jelölje E és F.

3°. Az EO egyenes metszi k-t G-ben, az FO egyenes pedig metszi k-t H-ban.

4°. A GH egyenes metszi e-t I-ben.

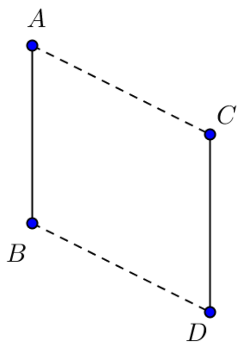
Állítás: $IA = AD$. Ugyanis $EFGH$ téglalap, melyben f középvonal, így a három párhuzamos egyenes ekvidisztáns pontokban metszi e-t.

Készen vagyunk: *e* irányegyenes lett, a trapéztrükk alkalmazható.
5°. Az *e* irányegyenes segítségével megszerkesztjük a *P*-n átmenő párhuzamos egyenest.

Megjegyzés:
A 2. lépésben fordítva is eljárhatunk: az *f*(*B*,*O*,*C*) irányegyenessel párhuzamost húzhatunk a kör egy tetszőleges pontján át. Ha pl. az ábra szerinti *E* ponton keresztül húzunk párhuzamost, akkor ez kijelöli a *D* pontot.

11. feladat (segédfeladat – *AB* szakasz eltolása): Adott az *O* középpontú *k* kör, valamint az *A*, *B*, *C* pontok. Toljuk el az *AB* szakaszt úgy, hogy az *A* pont *C*-be kerüljön!

Megoldás:



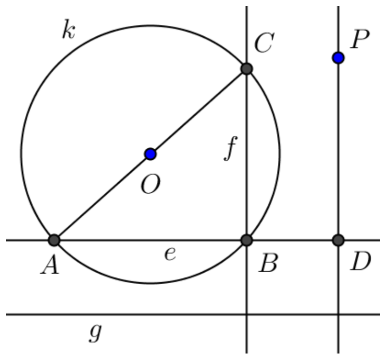
A *B* pont képét jelölje *D*.
I. eset: Ha *A*, *B*, *C* háromszöget alkot, akkor *ABDC* paralelogramma, melynek szemközti oldalai párhuzamosak.
Ekkor a 10. segédfeladat alapján párhuzamost húzunk *AB*-vel *C*-n keresztül, és *AC*-vel *B*-n keresztül. A két egyenes metszéspontja *D*.
II. eset: Ha *A*, *B*, *C* egy egyenesbe esik.
Ekkor viszont az egyenesen kívül eső tetszőleges pontba eltolhatjuk az *AB* szakaszt (I. eset). Az így kapott *A'B'* szakasz és *C* már nem esik egy egyenesre, alkalmazhatjuk az I. eset szerkesztését: az *A'B'* szakaszt eltoljuk úgy, hogy *A' C*-be kerüljön.

4. Ha tehát a kör már adott a szerkesztés kezdetekor

A 8., 10. és 11. segédfeladatokkal most már elvégezhetjük a kitűzött szerkesztésünket.

12. feladat: Adott egy egyenes, egy külső *P* pont és egy *O* középpontú kör. Tükrözzük a *P* pontot az egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk!

Megoldás:



I. eset: Ha az adott e egyenes metszi a k kört, akkor a metszéspontokat jelölje A, B. (Feltehetjük, hogy AB nem átmérő; ezt az esetet a fentiekben már részletesen tárgyaltuk.)

1°. Az AO egyenes metszi k-t C-ben.

2°. Felvesszük az $f(CB)$ egyenest. Ez merőleges e-re Thalész tétele miatt.

3°. P-ből párhuzamost szerkesztünk f-fel (10. segédfeladat), ez az egyenes D-ben metszi e-t.

4°. Végül PD szakaszt két lépésben eltoljuk úgy, hogy a P pont D-be kerüljön (11. segédfeladat).

Az így kapott DP' szakasz P' pontja lesz P tükörképe.

II. eset: Ha az adott g egyenes nem metszi a k kört.

Ekkor a kör tetszőleges A pontjából párhuzamost húzunk g-vel. Így megkapjuk az előző I. eset e egyenesét, a feladatot visszavezettük I. megoldására. (És persze akkor is végrehajthatjuk a szerkesztést, ha g éppen érinti a kört.)

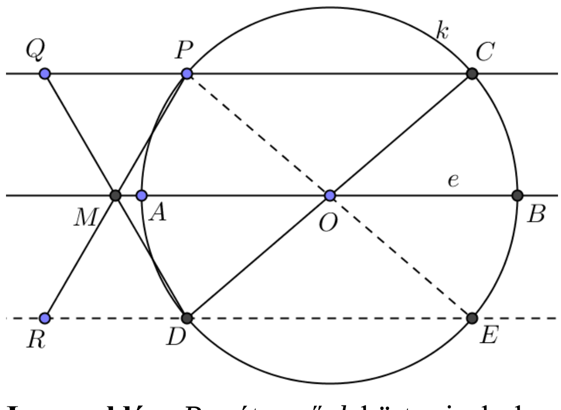
5. Néhány további lehetőség

A feladattal tehát készen vagyunk, egyetlen kör segítésével tudunk pontot tükrözni egyenesre.

Természetesen a tanulóinknak számtalan ügyes ötletük van, az alábbiakban néhányat összegyűjtöttem a kiindulási feladattal kapcsolatban. (Ezekben már a trapéztrükköt alkalmazzuk, azaz nem használjuk fel a magasságpont-féle merőleges szerkesztését.)

Az elemi szerkesztések (párhuzamos szerkesztése, merőleges szerkesztése külső pontból, eltolás) definiálása után is adódnak további lehetőségek, de ezekkel most már nem foglalkozunk. Az alábbiakban felsorolt néhány egyszerűbb szerkesztés nem (vagy csak részben) használja ezeket a „nagyágyúkat”.

13. feladat (a 6. feladat újratárgyalása): Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak egyetlen kört rajzolhatunk!



I. megoldás: P-n átmenő k kört rajzolunk, e és k metszéspontjait jelölje A és B ($OA = OB = OP$). P-ből párhuzamost húzunk az e irányegyenessel, ez C-ben metszi a kört. Végül CO metszi k-t a keresett D pontban.

(Ez lényegében megegyezik a 9. feladat megoldásával, csak most mi vettük fel a kört.)

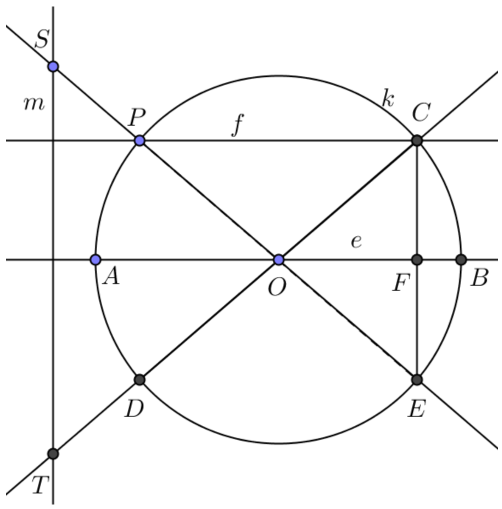
További megoldások, ha a megrajzolt k kör nem megy át az adott ponton (az előző ábrát használjuk, az adott pontot most Q jelöli):

II. megoldás: Q-ból párhuzamost húzunk az e irányegyenessel (a körrel vett metszéspontok P és C). CO metszi k-t D-ben, PO metszi k-t E-ben. A $QPDR$ téglalap hiányzó R csúcsát pl. az átlók M metszéspontja segítségével határozhatjuk meg: QD metszi e-t M-ben, PM metszi a DE egyenest R-ben.

III. megoldás: Hasonlóan, most a $QCER$ téglalap hiányzó csúcsát szerkesztjük meg.

IV. megoldás: A befejezés eltér: Q-ból merőlegest állítunk a DE egyenesre, a metszéspont adja meg R-et. (PD vagy CE irányegyenes, mert az e egyenessel való metszéspont ekvidisztáns ponthármast határoz meg.)

Végül ha az adott pont olyan külső pont, amelyből nem tudunk e-vel párhuzamos, k-t metsző egyenest húzni (az adott pontot S jelöli):



V. megoldás: Összekötjük S-t O-val, az egyenes a k kört P-ben és E-ben metszi. P-n keresztül párhuzamost húzunk e-vel (f), ez k-t C-ben metszi. CE metszi e-t F-ben. S-ből merőlegest bocsátunk e-re (CE irányegyenessel húzunk párhuzamost, CFE ekvidisztáns ponthármas). Ezt az m merőlegest CO a keresett T pontban metszi: $S' = T$.

6. Zárás

Ha már eddig eljutottunk a szakkörön, akkor talán érdemes Steiner nevezetes szerkesztési tételét is megbeszélni. A „csakvonalzós” tétel szerint az euklideszi szerkesztések (két egyenes metszéspontjának, egyenes és kör metszéspontjainak, két kör metszéspontjainak szerkesztése) elvégezhetők csak vonalzó használatával is, ha adott a síkon egy kör. (A kör középpontját ismerjük.)