Gondolatok az egyenletek tanításáról I.

Írta: dr. Majoros Mária

Amikor egy általános iskolás korú kisgyereknek felteszik a kérdést - Na és tudsz-e már egyenletet megoldani? – akkor biztosak lehetünk abban, hogy a bűvös tudás, amire a kérdés irányul, a mérlegelv ismerete. Az emberek többségének tudatában a mérlegelv úgy él, mint valami különleges tudás, ami az egyenletek megoldásának alapvető eszköze.

A mérlegelv, mint a lineáris egyenletek megoldásának egy lehetséges módja, nem is olyan régen terjedt el általánosan a magyarországi iskolákban. 1977-től – a Varga Tamás által kidolgozott matematika tanítási koncepció óta – magyarázzuk a lineáris egyenletek megoldásának lépéseit a mérlegelvvel. Előtte az egyenletek megoldása során bekövetkezett algebrai átalakításokat úgy magyarázták, hogy a tagokat vagy tényezőket a megoldás során ellentétes művelettel kell átvinni az egyenlet másik oldalára. Európa számos országában ma is ezt a magyarázatot kapják a gyerekek.

Akár az egyik, akár a másik módon magyarázzuk a megoldás lépéseit, tudnunk kell, hogy egy technikai eljárást adunk a gyerekek kezébe. Mindkét eljárás megtanulásának és helyes alkalmazásának alapvető nehézségét az okozza, hogy erősen feltételez egy fejlett absztrakt gondolkodást, és a műveletek hierarchiájának az éppen alkalmazott szimbólumoktól független nagyon biztos tudását.

A mérlegelvnek a fent említett okokból fakadó megértésbeli nehézségét tovább fokozza, hogy az egyenletek megoldásának ez a módja feltételezi, hogy az egyenletnek van megoldása. Ennél a feltételesen létező megoldásnál van a mérleg egyensúlyban. Amennyiben tehát létezik az egyenletnek megoldása, akkor a kiindulásnál feltételezett egyensúlyt úgy tudjuk megőrizni, ha a mérlegelv által megengedett változtatásokat végezzük el. Az egyenleteknek a mérlegelvvel történő megoldása tehát egy indirekt bizonyítási eljárás.

A jelenlegi tantervek szerint a gyerekek 6. osztályos korukban, tehát 11-12 évesen találkoznak a mérlegelvvel először. A tanítás azt az elvet követi, hogy az első egyenletek nagyon egyszerűek. Feltételezem, hogy a tankönyvek és tantervek szerzői abból indultak ki, hogy olyan bonyolult szimbolikát kell a gyerekeknek elsajátítaniuk, hogy ezt csak nagyon egyszerű feladatokkal lehet kezdeni.

Nézzük meg, hogyan néznek ki az első, a bűvös mérlegelvvel megoldandó egyenletek?

a) $x + 3 = 4 + 2$
b) $8 = x + 4 + x$
c) $x \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 17$
d) $x + 30 = 4 \cdot x + 21$

Az összes eddigi feladat elképzelhető valódi mérésként. Nézzük például a c) feladatot. A mérleg baloldali serpenyőjében két egyenlő súlyú ismeretlen van, és mellette 3 darab 3 egységnyi súly, amit a jobb oldali serpenyőbe elhelyezett 17 egységnyi súly tart egyensúlyban. Mindkét oldalról leveszünk 9 egységet, ekkor a jobb oldali serpenyőben ott marad a két ismeretlen, amit 8 egységnyi súllyal tartunk egyensúlyban. Tehát egy-egy ismeretlen 4-4 egység súlyú.
Amikor végiggondoljuk ezt a megoldást, felvetődik a kérdés, milyen tapasztalatokra alapozzuk az egyenletek formális megoldását. Igazából semmilyen tapasztalat nem előzi meg. Nem a tapasztalathoz rendelünk képzetet, majd a képzethez szimbolikus leírást, hanem fordítva: a szimbólumokhoz próbálunk értelmezésként gyakorlati szituációkat rendelni. Az egyenletek mérlegelvvel történő tanításának első lépéseként valódi ismeretlenek súlyát

kellene meghatározni, és a mérés menetét kellene szimbólumokkal leírni. Ennek általánosításaként jöhetne létre az egyenletek mérlegelvvel történő megoldásának módszere a hozzá kapcsolódó szimbolikus megjelenéssel.

Az első négy egyenletet követő e) feladat azonban már nem elvégezhető mérés, hiszen a valóságos méréseknél nem képzelhető el negatív súlyok használata. Ez a feladat tehát a matematikai absztrakció egy magasabb szintjét várja el:

e) $2 \cdot x + 3 + 5 \cdot x = 4 \cdot x - 21$

A gyerekeknek értelmezni kell, hogy a jobb oldalon lévő „negatív súly levétele” súlynövekedést okoz, tehát a másik serpenyőben lévő súlyt meg kell növelni 21-gyel, ha a feltételezett egyensúlyt nem akarjuk felborítani.

Ezután nem sokkal egy új, nagyon nehéz gondolatot tartalmazó feladat következik, ami az egyenlőséget, mint indirekt feltevést használja, ami ellentmondásra vezet.

f) $5 \cdot x + 3 = 5 \cdot x + 2$

Ennek megoldásaként azt kapjuk, hogy $1 = 0$, ami ellentmondás, tehát a kiinduló indirekt feltevés, az egyenlőség hamis volt. Itt megint érdemes elgondolkodni azon, hogy miről is szól ez a feladat. Ha egy gyerek képes értelmesen gondolkodni, el sem kezdi a „megoldást”, mert ránéz a feladatra, és azt mondja, ha ugyanazt a dolgot (itt $5 \cdot x$) megnövelem egyszer kettővel, másszor hárommal, akkor a hárommal történő növelés 1-gyel nagyobbat fog eredményezni, tehát az egyenlőség soha nem lesz igaz.

A mérlegelv tanításának kezdetén egy ilyen feladat zavaró, mert nem tartozik a lényeghez. Később az egyenletek megoldása során a gyerekek többször találkoznak azzal, hogy egy egyenletnek nincs megoldása, és ezt a tapasztalatot szeretnénk itt megelőlegezni. Úgy gondolom, fölösleges ennyire előreszaladni az időben, és bíznunk kell a tanítványaink intellektuális képességeiben, a megfelelő időben képesek lesznek ezt a gondolatot megérteni.

Végül nézzük meg, a feladatsor utolsó példáját:

i) $x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + 12 = 6 \cdot (x + 2)$

A kilencedik feladatban eljutottunk a szimbólumok értelmezéséig, egy azonosság felismeréséig, és mellékesen az egyenlet megoldásának szintjén a végtelen sok megoldás gondolatáig.

A feladatok egyszerűek, de a mögöttük lévő matematikai gondolatok mélyek és nagyon sokrétűek.

A szöveges egyenletek szintjén egy kicsit rosszabb a helyzet. Tanítás szempontjából egy ellentmondásos helyzet jön létre. A szimbólumokkal történő lejegyzés nehéz feladat, ezért csak egyszerű összefüggéseket tudunk mutatni a gyerekeknek. Ugyanakkor ezeket könnyű megoldani egyenlet nélkül. Tehát a gyerekek egy távoli jövőbeli nehéz alkalmazás miatt a jelenben egy fölösleges dolgot tanulnak.

A szöveges feladatok egyenlettel történő megoldását bevezető feladatot fogom idézni:
„Piroska nagyi most 17-szer annyi idős, mint Zsombor nevű unokája. Együtt 54 évesek.

a) Hány évesek külön-külön?
b) Tíz év múlva mennyi lesz köztük a korkülönbség, és egy évvel ezelőtt mennyi volt?
c) Hány év múlva lesz ötször annyi idős a nagymama, mint az unokája?
d) Hány évvel ezelőtt volt a nagymama 25-ször annyi idős, mit az unokája?”

Ez tipikusan az a feladat, amit sokkal könnyebb fejben végiggondolni, mint a megoldást szimbólumokkal leírni, és egyenletként megoldani.

A d) kérdés megoldását szeretném elemezni. Miután az 54-t 18 egyenlő részre osztottuk, és megkaptuk, hogy Zsombor 3 éves, a nagymama pedig 51, ezért Zsombor vagy 2 vagy 1 éves volt, amikor a nagymama 25-ször idősebb lehetett nála. Az egyet kizárhatjuk rögtön az elején a nagy korkülönbség miatt, tehát egyetlen lehetséges megoldásként marad a 2. Amikor Zsombor 2 éves volt, akkor a nagymama 50, és ez tényleg megfelel a feltételnek. A helyes válasz tehát 1 évvel ezelőtt volt a nagymama 25-ször annyi idős.

Nézzük ennek az egyszerű gondolatmenetnek a tankönyvben közölt algebrai változatát:

$$
\begin{aligned}
(3-y)\cdot 25 &= 51-y\\
3\cdot 25 - y\cdot 25 &= 51-y\\
75 - y\cdot 25 &= 51-y\\
75 &= 51 + 24\cdot y\\
24 &= 24\cdot y\\
1 &= y
\end{aligned}
$$

Az egyenletek mérlegelvvel történő megoldásának ilyen módon történő korai bevezetése fölösleges. Ezt az eszközt akkor kell a gyerekek kezébe adni, amikor egyrészt már nagyon sok megelőző tapasztalattal rendelkeznek, másrészt a feladatok megoldása e nélkül az eszköz nélkül átláthatatlan. Ekkor az egyenlet és a mérlegelv nem nyűg lesz, hanem a problémák megoldását segítő eszköz.

Nem a tankönyvet akartam bírálni, hanem a tantervet. Tartalmilag és módszertanilag is jól és igényesen van megoldva az egyenletek mérlegelvvel történő megoldásának bevezetése. 11-12 éves korban csak ezt lehet csinálni. A problémát az jelenti, hogy a tanterv előírja az egyenletek formális megoldásának tanítását, tehát a megfelelő évfolyamon a tankönyvbe be kell kerülnie egy ilyen fejezetnek.

Ugyanebből a tankönyvből megpróbáltam összegyűjteni néhány példát azokra a feladatokra, ahol a gyerekek igazából egyenleteket oldanak meg, de az eszköz, amire támaszkodhatnak, az algebrai kifejezések felépítése, a felépítésben résztvevő műveletek sorrendje, a műveletek tulajdonságai, megfordíthatósága. Ezeket a kérdéseket az egyenletek formális megoldási szabályainak alkalmazása nélkül akkor lehet sikeresen megválaszolni, ha a megoldást megelőzi az algebrai kifejezések és a kérdésfeltevések helyes értelmezése.

1. Melyik számból kell kivonni +8-at, hogy (-1)-t kapjunk eredményül?

A feladat megoldása során több gondolatmenetet is követhet egy 5. osztályos kisgyerek:

a) Az első a kivonás értelmezésére támaszkodik. Ha tudjuk, hogy két szám különbsége -1, és a kivonandó 8, akkor a kisebbítendő ennél 1-gyel kisebb szám.
b) A második a kivonás ellenőrzésére épül. A kisebbítendőt megkapjuk, ha a különbséghez hozzáadjuk a kivonandót.
c) Végül fel is írhatja magának a megfelelő összefüggést szimbólumok segítségével: □ - (+8) = (-1). A feladat megoldásához a megelőző két értelmezés valamelyike vezet el.

2. f – (+8) = - 4

Ez a feladat matematikai tartalmát tekintve teljesen megegyezik a megelőzővel, csak itt szimbolikus formában tettük fel a kérdést, amit természetesen ugyanúgy értelmezni kell, és a megelőző feladatban ismertetett két gondolat valamelyikét alkalmazhatjuk. Amikor szimbólumokat használ egy feladat, nagyon fontos, hogy kiolvastassuk a gyerekekkel, mi van leírva: „Valamilyen ismeretlen számból kivontunk (+8)-at, a különbség (-4).”

3. $|h+3| = +5$

Ennél a feladatnál is nagyon fontos a szöveges értelmezés, ami rögtön tartalmazni fogja a műveletek hierarchiáját, amennyiben az abszolút érték képzését egy egyváltozós műveletnek tekintjük. „Egy ismeretlen számhoz 3-at adtunk, majd a kapott számnak vettük az abszolút értékét, és az eredmény (+5) lett.” Nézzük, milyen gondolatmeneteket követhetünk:

a) A legegyszerűbb megoldás a próbálgatás. Általában rövid véletlen kísérletezés után megjelenik a tervszerűség a megoldás keresésében.
b) A második megoldás alapja az abszolút érték definíciója. Ha valaminek +5 az abszolút értéke, akkor az kétféle módon állhat elő. Vagy (-5) vagy (+5) volt a mennyiség, aminek az abszolút értékét vettük. A mi esetünkben tehát olyan számokat keresünk, amihez 3-at adva egyszer (+5)-t, míg a másik alkalommal (-5)-öt kapunk. Tehát a
h + 3 = 5 és
h + 3 = -5 nyitott mondatokat kell megoldanunk. Itt ismét kétféle módon gondolkodhatunk:
i) Egyrészt támaszkodhatunk az összeadás értelmezésére.
ii) Másrészt az összeadás ellenőrzésére vonatkozó összefüggést használhatjuk.

Szintén az ötödikes tankönyvben fordul elő a következő feladat:

4. Két szám összege -1, abszolút értékük összege +3. Melyik ez a két szám?

Formálisan ez egy két ismeretlenes egyenletrendszer. Egy 10 éves kisgyerek szintjén azonban úgy értelmezzük, hogy két olyan számot keresünk, amelyeknek egyszerre kell két feltételnek megfelelni. Ismét a próbálgatással érdemes indulni. Arra kérjük a gyerekeket, hogy keressenek olyan számpárokat, amelyekre teljesül az első feltétel. Hamarosan rájönnek, hogy ezeknek a számpároknak közös tulajdonsága, hogy az abszolút értékük különbsége 1, és a nagyobb abszolút értékű szám negatív előjelű. Miután egész számokban gondolkodhatunk, ezért az abszolút értékek összegére vonatkozó állítás azt jelenti, hogy az összeg két különböző számpárból állítható elő: 0 + 3 = 3 vagy 1 + 2 = 3. Ebből a második felel meg az első feltételnek is.

A törtek bevezetése után a nyitott mondataink értelmezése és megoldása kibővül a közös nevezőre hozással. De ugyanúgy a műveletek definíciója és tulajdonságai adják a megoldás alapját.

5. $\frac{1}{4} + a = \frac{3}{4}$

6. $\frac{1}{3} + x = 2$

7. Írd le műveleti jelekkel, majd számold ki!
-39 és 15 összegének az egyharmada

Ehhez a feladathoz hasonlót találunk az ötödik osztályos tankönyvben és a hatodik osztályos tankönyvben is. Ez a feladat még jó képességű gyerekek számára is egy számolási utasítást tartalmaz. Ezért a következő tipikus megoldásokat láthatjuk:

(-39) + 15 = -24
(-24) : 3 = -8

A gyerekek nagyon nehezen értik meg, hogy azt akarjuk, hogy egyetlen egyenlőséget írjanak fel:

[(-24) + 15] : 3 = -8

Itt egy pillanatra emlékezzünk vissza arra, hogy milyen formális és szimbólumokban történő gondolkodást erőltet az egyenletek mérlegelvvel történő megoldása, illetve a szöveges feladatok szimbólumokkal történő lejegyzése. A 11-12 éves gyerekek többsége éretlen a feladatra, ezért az egész a gondolkodás merevségéhez vezet.

A következő egyenletek is tökéletesem megoldhatók a műveletek sorrendjének helyes értelmezése után a műveletek értelmezéséből, illetve a tulajdonságokból kiindulva.

8. $x \cdot (-4) - 6 = -50$

Egy ismeretlen számot megszoroztunk (-4)-gyel, majd a kapott számból kivontunk 6-ot, így -50 lett az eredmény. Amiből a 6-ot kivontuk -44 volt. A kérdés tehát az, milyen számot szorozunk (-4)-gyel, ha -44-t kapunk. Miután a szorzat előjele negatív, és az egyik szorzótényező is negatív, így a keresett szám biztosan pozitív. Az osztás műveleti tulajdonságából vagy az ellenőrzésre vonatkozó összefüggésből adódik a megoldás.

9. (-22) : (15 + x) = 1

Ebben a feladatban is a műveletek sorrendjének értelmezése után adódik, hogy (-22)-t elosztunk egy mennyiséggel, és egyet kapunk, tehát az osztónak meg kell egyezni az osztandóval. Ez a gondolat a 15 + x = -22 már jól ismert nyitott mondathoz vezet el.

10.
$$\frac{62}{35} - \left(\frac{b}{5} + \frac{4}{7}\right) = 0$$
$$\left(\frac{55}{33} - \frac{77}{66}\right) + \left(\frac{c}{5} - \frac{7}{8}\right) = 1$$

A 10. feladatban található első egyenletben szintén a műveletek sorrendjének helyes értelmezése után adódik a következtetés, hogy a különbség úgy lehet 0, ha a zárójelben lévő mennyiség 62/35. Ezért 7 · b + 20 = 62 nyitott mondat megoldására vezettük vissza a feladatot. Itt a 8. feladathoz hasonló gondolatmenetet követhetjük.

Számos példát lehetne még hozni, de azt hiszem fölösleges tovább elemezni, hogy a formális megoldások korai bevezetése nélkül tisztán a műveletek hierarchiájára, a műveletek értelmezésére és tulajdonságaira támaszkodva a feladatok megoldhatók. És ez a megközelítés tényleg a gyerekek matematikai szemléletének fejlődését szolgálja.

Felvetődik a kérdés, mikor tanítsuk az egyenletek formális megoldását. Úgy gondolom, 8. osztályban. Erre az időre a fent bemutatott megoldások nagyon megerősítik az algebrai kifejezések helyes értelmezésének képességét. A szimbolikus gondolkodás is sokkal fejlettebb, és ekkorra a feladatok nehézsége is olyan, hogy az átláthatóságot segíti a formális megoldás. A gyerekek nem nyűgként fogják használni az egyenleteket, hanem megkönnyíti számukra a problémák kezelését. Személyes tapasztalatom, hogy megfelelő előkészítés után 13-14 éves korban 1 hónap alatt nagyon jó szinten meg lehet tanítani mindazt, amire 6. osztálytól kezdődően elszórtan 5-6 hónapot szánunk, mégis a munkánk hatékonysága sokkal alacsonyabb.

Irodalomjegyzék

Dr. Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk?
Csahóczi Erzsébet - Csatár Katalin - Kovács Csongorné - Morvai Éva - Széplaki Györgyné - Szeredi Éva: Matematika 5-8. osztály, Apáczai Kiadó, Celldömölk
Dr. Majoros Mária: A mérés I-II.
http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/oktvagybukt/2006/feb.html
http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/oktvagybukt/2006/mar.html