RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus,
BME

A Matematika Tanítása
1976. augusztus
XXIII. évfolyam 3. szám

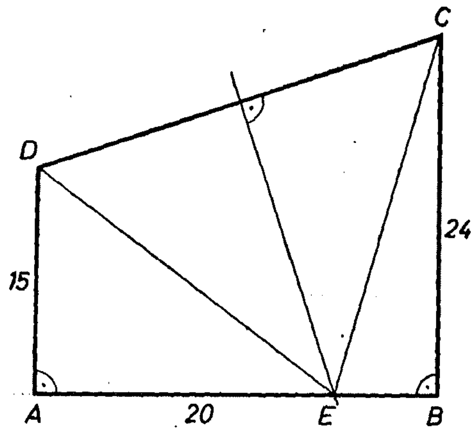
Van-e megoldás? Hány megoldás van? (Geometriai számítási feladatok megoldási módszereinek néhány problémája)

Előre is elnézést kérek a cikket olvasó kollégáktól, hiszen ismert dolgokról írok, s talán amit én problémának látok az egyetemi felvételi, valamint érettségizett tanulókkal a felvételire való előkészítés során, az egyesek számára a tanításban nem okoz problémát. Tapasztalatom szerint ez sok tanuló számára igen nagy gond. Ez indokolhatja a cikk létjogosultságát. A középiskolai matematikatanítás feladatai közé tartozik, hogy az egyetemi tanulásra, így az egyetemi felvételire készítsen elő. Az elmúlt évek egyetemi felvételi feladatai között igen sok geometriai számítási feladat volt található. Ezek javítása során megmutatkozott, hogy a tanulók nem eléggé járatosak a feladatok megoldási módszereiben.

A feladatok megoldási módszereinek problémáit néhány feladaton keresztül "közelítem" meg. Ezek egy részét az egyetemi előkészítőkön is gyakoroltatom. A megoldások során elkövetett gyakori hibákat is ott tapasztaltam.

1. *feladat. Az ABCD* négyszögben az A és a B csúcsoknál fekvő szögek derékszögek, *AD*=15 egység, *BC=24* egység. A *CD* oldal felező merőlegese az *AB* oldal egyenesét az E pontban metszi, *AE*=20 egység. Számítsuk ki az *AB* oldal hosszát!

(E feladatot megoldó tanulók közül a legtöbben a következő módon dolgoznak. Most tehát egy tanulói megoldás következik.)



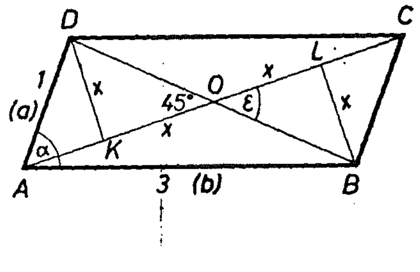
Megoldás: Készítsünk ábrát! Vegyük fel (1. ábrán látható) az *ABCD* derékszögű trapézt, és húzzuk meg a *CD* oldal felező merőlegesét. Az *EAD* derékszögű háromszög két befogója, *AD*=5· 3 egység, *AE*= 5· 4 egység, így az átfogója *DE*= 5· 5 egység. Az E pont a C és a D pontoktól egyenlő távolságra van, így az *EBC* derékszögű háromszög átfogója *EC*=25 egység, s mivel a *BC* befogó hossza. 24 egység, ezért $EB^2 = 25^2-24^2=(25-24)\cdot(25+24)=7^2$ egység. *EB*=7 egység. Válasz: Az *AB* oldal hossza 20+7=27 egység.(A feladat megoldásának vizsgálatára még visszatérek. Nézzünk most egy másik tanulságos feladatot.)

2. *feladat.* Egy paralelogramma két oldala 3 cm, illetve 1 cm hosszúságú, az átlók által bezárt hegyesszög 45°. Számítsuk ki e paralelogramma területét!

Megoldás: Készítsünk *vázlatot!* Legyen a 2. ábrán látható *ABCD* paralelogrammában *AD*=1 cm, *AB=3* cm, az *AC* és *BD* átlók metszéspontja O, az átlók hossza *AC*=2e, *BD*=2f. Az átlók, valamint az átlók által bezárt szög segítségével a paralelogramma területe meghatározható.

$$t=\frac{2e\cdot 2f\cdot \sin 45^o}{2}, \quad t=\sqrt{2}\cdot ef.$$

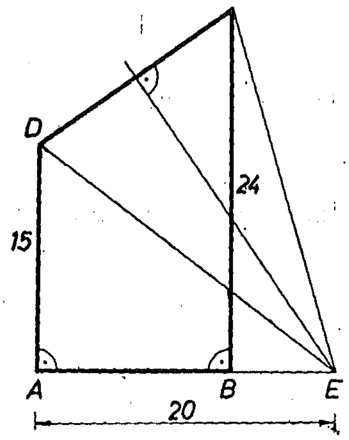
Alkalmazzuk a cosinustételt az *ADO* és az *ABO* háromszögekre.



$$9 = e^2 + f^2 + \sqrt{2}\cdot ef,$$
$$1 = e^2 + f^2 - \sqrt{2}\cdot ef.$$

(Felhasználtuk, hogy cos 45°= -cos 135°= $\frac{1}{\sqrt{2}}$.) A két egyenletet kivonva egymásból, kapjuk: $2\sqrt{2}\,ef = 8$, azaz $2t = 8$, $t = 4$ (cm^2).Válasz: A paralelogramma területe 4 cm^2(!)

Gondolom ez a két példa is mutatja, hogy a *probléma adott!* Térjünk hát vissza az első feladathoz.Van néhány olyan tanuló, aki a feladat *megértése(!)* után a következő ábrát készíti el:



Ezek közül többnek nem tetszik az ábra, visszalépnek, elvetik az ábrát, azaz áthúzzák. Marad azért olyan "bátor" is, aki az ábrát felhasználja a továbbiakban, és így kiszámolja az *AB* oldal hosszát. Mivel — mint láttuk — *EC*=25 egység és *EB*=7 egység, ezért *AB*=20-7=13 egység. Válasz: Az *AB* oldal hossza 13 egység.

Melyik a "jó" megoldás? A tanulókat meg kell győzni, hogy mindkettő "jó" megoldás, de önmagában egyik sem *teljes* megoldás.

Mit ajánljunk, milyen tanácsokat adjunk a tanulóknak a feladatok megoldásához? Hát azt, amit minden feladat megoldásához adhatunk, amit *Pólya György* professzor "*A gondolkodás iskolája", valamint "A problémamegoldás iskolája"* című könyveiben ajánl.

Emlékeztessük tanulóinkat, amit a szerkesztéseknél tanultak!

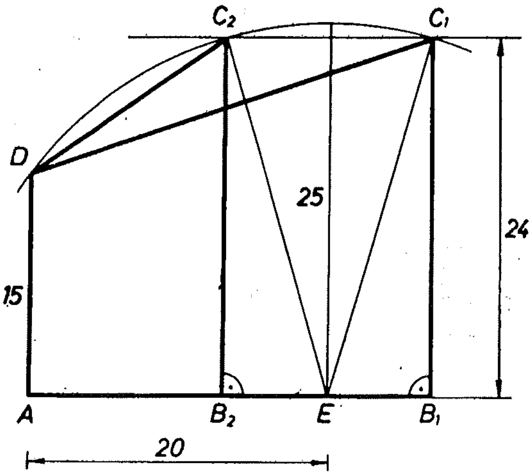
(1. A megoldottnak képzelt feladat ábráján *elemezzük* a szerkesztés módját. Ennek felhasználásával elkészítjük a megoldás tervét.

2. Végrehajtjuk a szerkesztést.

3. Igazoljuk a megoldás helyességét.

4. Megvizsgáljuk a megoldhatóság feltételeit, és a lehetséges megoldások számát.)

Az *első* tanács a következő lehet. *Tekintsük a feladatot szerkesztési feladatnak* (ha az adott adatokból a keresett alakzatot *könnyen* meg tudjuk szerkeszteni). *Az adott adatoknak megfelelően szerkesszük meg a keresett alakzathoz hasonlót. A szerkesztés vizsgálata megmutatja. hogy VAN-E MEGOLDÁS, s ha van, akkor HÁNY MEGOLDÁS VAN.*



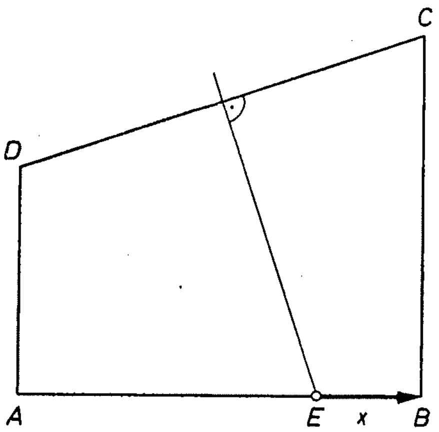
Nevezzük az először felvett ábránkat *elemző ábrának,* majd a vizsgálat után felvett ábrát *számító ábrának.* (A bemutatott tanulói megoldások hibája éppen az, hogy az *elemző* ábrát rögtön *számító* ábrának tekintik!)

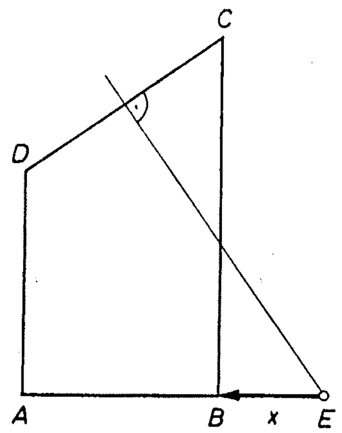
Nézzük feladatunk megoldását a tanácsolt "szerkesztési" módszerrel. Az 1. ábra *lehet* elemző ábra is. Ezek szerint az *EAD* derékszögű háromszög egyértelműen meghatározott. A C pont az *AB egyenestől* 24, az E ponttól 25 egység távolságra van, így a szerkesztésből két C pont, C_1 és C_2 adódik (az *AB* egyenes mindkét oldalán kapunk két-két pontot, de elegendő az egyik párt tekinteni), s így két B pont, B_1 és B_2, ami egyben azt is jelenti, hogy az eddig közölt két megoldás valóban megoldás, és csak ezek a megoldások. (4. ábra) [A feladat megértését elősegíthetjük, ha a feladat megoldása szempontjából lényeges szavakat (elismerem ez szubjektív) aláhúzatjuk a tanulókkal. Ebben a feladatban az "egyenesét" szót emelném ki, világos, hogy miért.]

Nézzük a feladatnak egy másik megoldását, ami egyben egy *második* tanács lehetőségét is tartalmazza.

Az EAD derékszögű háromszög ismeretében az AE egyenesen keresünk olyan B pontot, amelyre a már megismert feltételek (EC= 25, BC= 24 egység, EBC derékszögű háromszög) teljesülnek. Helyezzünk gondolatban az AE egyenesre egy számegyenest úgy, hogy ennek origója az E pontba essen. Jelöljük az $\overline{EB}$ **előjeles szakaszt** x-szel. (Jelölés: *EB szakasz* nem negatív mérőszámmal, $\overline{EB}$ **előjeles szakasz** valós szám mérőszámmal!)

Így akár az 1., akár a 3. ábra alapján számolunk, azt kapjuk, hogy $x^2=7^2$, amiből x=7 *vagy* x= -7, ami azt jelenti, hogy E-től az AE egyenesen mindkét irányban van egy-egy B pont, így a feladatnak két megoldása van.





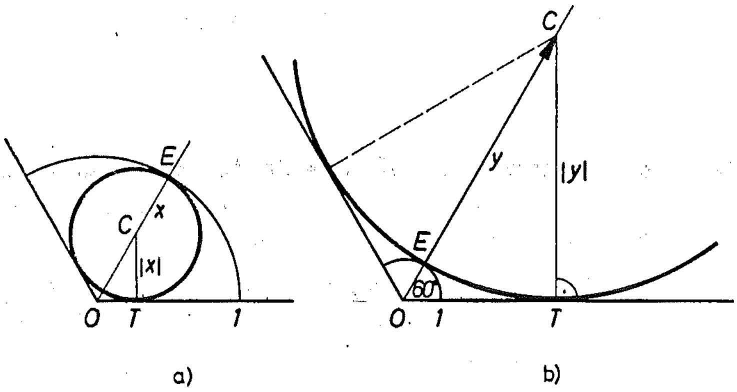
Természetesen a számegyenes felvétele felesleges, elegendő figyelni arra, hogy egy **előjeles szakasz** mérőszáma negatív is lehet.

Veszély a feladat egyik megoldásának elvesztésére az, ha "fejben" számolunk, hiszen a tanulók közül sokan (dicséretes módon) ismernek néhány pitagoraszi számhármast (pl: 3, 4, 5 vagy 7, 24, 25), így kapásból mondják az eredményeket Ajánljuk, hogy ilyenkor célszerű mindent leírni.(Érdemes összeoasonlítani az "előjeles szakasz alkalmazások módszerét" a koordináta-geometriai feladatok *paraméteres (analitikus)* megoldási módszerével !)

3. *feladat.* Egy 120°-os szög csúcsa körül egységkört rajzolunk. Számítsuk ki annak az egységkört érintő körnek a sugarát, amely a szög szárait érinti!

Megoldás: Ha az a) ábrának megfelelően kezdünk a számításhoz, akkor az $\overline{EC}$=x jelölést bevezetve $CT=|x|$, OC=1-x, OT=1/2·(1-x).

$(1-x)^2=1/4\cdot(1-x)^2+x^2$, amiből $x_1=2\sqrt{3}-3$, $x_2= -2\sqrt{3}-3$. Ez azt jelenti, hogy két ilyen kör van, a körök sugarának nagysága $|\overline{EC}|$, tehát r=$2\sqrt{3}-3$ egység, R=$2\sqrt{3}+3$.



a) b)

Ha a b) ábrának megfelelően dolgozunk, akkor legyen EC=y, CT= $|y|$, OC=1+y, OT=1/2·(1+y).

$(1+y)^2=1/4\cdot(1+y)^2+y^2$, amiből $y_1=3-2\sqrt{3}$, $y_2=3+2\sqrt{3}$, azaz $r=|y_1|=2\sqrt{3}-3$, $R=3+2\sqrt{3}$ egység.

Természetesen elegendő az egyik úton számolni, csupán mégegyszer érdemes felhívni a figyelmet arra, mindegy hogy melyiket választjuk. [A kör sugara helyett, az "r" jelölés helyett érdemes más betűt választani, mert az "r" csábít arra, hogy csak a pozitív gyököt vegyük figyelembe.

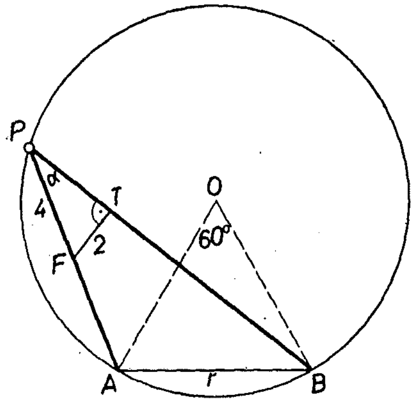
Most sem érdemes fejben számolni, azaz a 60°-os derékszögű háromszög oldalai közötti ismert összefüggést közvetlenül alkalmazni vizsgálat nélkül, pl: $x=\sqrt{3}/2\cdot(1-x)$.]

A szerkesztés vizsgálatából természetesen azonnal kiderül, hogy két megoldása van a feladatnak, és ekkor a megfelelő számításokat a 60°-os derékszögű háromszögekkel gyorsan elvégezhetjük.

4. *feladat.* Egy kör kerületének P pontjából megrajzoljuk az AP=8 cm és BP = 12 cm hosszú húrokat. Az AP húr F felezéspontjának *a BP egyenestől* mért távolsága 2 cm. Számítsuk ki a kör sugarát!

Megoldás: A szerkesztés vizsgálatából kiderül, hogy két megoldás van. (Lásd *Rábai Imre: Elemi matematikai példatár II.* Gondolat Könyvkiadó, 1973. 89. feladat 223-225. oldal.)

Itt most a trigonometria alkalmazására hívhatjuk fel tanulóink figyelmét, s ez a *harmadik* tanács.



Az elemző ábrán található PFT derékszögű háromszög átfogója PF=4 cm, a $TPF\angle=\alpha$ szöggel szemközti befogója PT=2 cm, így $\sin\alpha=1/2$.

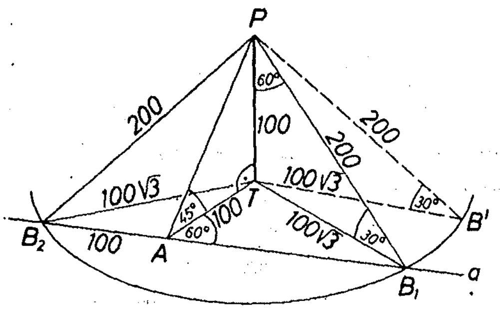
Ebben a trigonometrikus egyenlet megoldásában rejlik az, hogy a feladatnak két megoldása van, ha tekintetbe vesszük a lehetséges megoldásokat. Most $\alpha_1=30°$ és $\alpha_2=150°$.

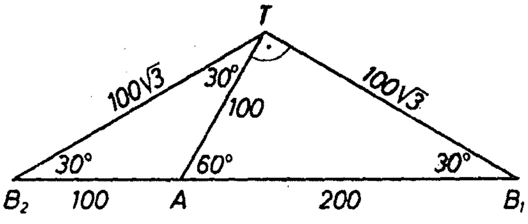
Mivel AB=r, ezért

$$r_1^2=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos 30°,$$
$$r_1\approx 6{,}5\text{ cm};$$
$$r_2^2=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos 150°,$$
$$r_2\approx 19{,}3\text{ cm}.$$

Most nézzük az 1975. évi egyik felvételi feladatot.

5. *feladat.* Sík terepen az A és B pontok közötti távolság kiszámításához a következő adatokat ismerjük:Az A ponttól 100 méterre álló gyárkémény az A pontból 45°-os, a B pontból 30°-os emelkedési szögben látszik. Az A pontot a kémény aljával összekötő egyenes 60°-os szöget zár be az *AB* egyenessel. Mekkora az *AB* távolság?





Megoldás: Legyen a kémény magassága *PT*, ahol T az alapsíkon van. Vegyünk fek *elemző* ábrát. *Az ATP* egyenlő szárú háromszög egyértelműen meghatározott Az *a* egyenes, amelyen a B pont található, az *AT egyenessel* 60°-os szöget zár be. (Két ilyen egyenes van, nyilván elegendő az egyikkel foglalkozni.) Legyen B' az alapsík egy olyan pontja, amelyből a *PT* szakasz 30°-os szögben látszik. A *B'TP* 30°-os derékszögű háromszögben *PT*=100 méter, így ez a háromszög meghatározott, a B' pont a T ponttól $100\sqrt{3}$ méter (a P ponttól 200 méter) távolságra van. Így a keresett B pont az a egyenes olyan pontja, amelyik a T ponttól $100\sqrt{3}$ méter távolságra van, azaz rajta van az alapsík T középpontú $100\sqrt{3}$ méter sugarú körén (a P középpontú 200 méter sugarú gömbfelületen). Mivel *TB'>TA,* ezért két, a feltételeknek megfelelő B pont van, B_1 és B_2.

Az előzőekben már láttuk, hogy *AT*=*TP*=100méter, $TB_1=TB_2=100\sqrt{3}$ méter, $PB_1=PB_2=200$ méter.

Mivel $ATB_1\,\Delta \cong PTB_1\,\Delta$ ezért $AB_1=PB_1=200$ méter. A B_1TB_2 egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek 30°-osak, az *ATB* háromszög derékszögű. Ezekből következik, hogy a TAB_2 háromszög is egyenlő szárú, így $AB_2=100$ méter.

Érdemes volt észrevenni az ATB_1 és PTB_1 háromszögek egybevágóságát, vagy célszerűbb a cosinustételt alkalmazni, azaz nem fejben számolni? Nézzük így a megoldást.

Legyen az $\overline{AB}$ *előjeles szakasz* hossza x.

$$(100\sqrt{3})^2 = 100^2 + x^2 - 2\cdot 100\cdot x\cdot \cos 60°, \qquad (1)$$

$x_1 = 200$, $x_2 = -100$.

A keresett távolság tehát: $AB_1=200$ méter, $AB_2=100$ méter.

Az (1) egyenlet a "másik" esetet is tartalmazza, hiszen ha x<0 és $B_2AT\angle=120°$, akkor

$$(100\sqrt{3})^2 = 100^2 + x^2 - 2\cdot 100\cdot(-x)\cdot \cos 120°$$

egyenlet ugyanazokat a megoldásokat szolgáltatja.

[Érdemesnek tartom felhívni a tanulók figyelmét, hogy egy nem diszkutált (vizsgált) feladat esetén ne számítsunk fejben, hanem az alkalmazott tétel (Pitagorasz, cosinus) után a negatív gyök figyelmeztethet a két megoldás lehetőségére.]

Hívjuk fel tanulóink figyelmét arra, hogy jól értsék meg a kitűzött feladatot. Ismerjék a feladat szövegében szereplő fogalmakat, hiszen sok esetben maga a feladat szövege magában hordozza a választ arra, hogy hány megoldása van a feladatnak. Nézzünk erre is egy példát.

6. *feladat.* Az R sugarú kör egyik húrja a kör középpontjától d távolságra van. Számítsuk ki annak a húrnak a középponttól mért távolságát, amelyhez fele akkora húr tartozik, mint az előbbi húrhoz.

Az első kérdés, melyik húrnak a hosszát? Hány ilyen húr van? A kör egy húrjához két ív tartozik; a feladatnak tehát két megoldása van. A keresett távolságok:

$$\sqrt{\frac{1}{2}R(R+d)}\text{, illetve }\sqrt{\frac{1}{2}R(R-d)}$$

(A feladat megoldását lásd *Rábai Imre: Elemi matematikai példatár* II. 56. feladat 211-212. oldal).

Bármely feladat megoldását tehát *elemzéssel* kezdjük, azaz *feltesszük, hogy a feladatnak van megoldása.* Ezen feltétel alapján készítünk *elemző* ábrát, melynek segítségével *vizsgáljuk* a feladatot, (ha szükséges *bizonyítunk,)* majd elvégezzük *a számítást,* kapunk valamilyen eredményt vagy eredményeket.

Kaptuk: ha a feladatnak van megoldása, akkor csak ez vagy *ezek lehetnek* a megoldások. Az, hogy ez (ezek) valóban megoldás (megoldások), ahhoz ellenőrzést kell végezni.

RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus,
BME

A Matematika Tanítása
1976. december
XXIII. évfolyam 4. szám

Van-e megoldás? Hány megoldás van? (Geometriai számítási feladatok megoldási módszereinek néhány problémája)

7. *feladat.* Egy háromszög két oldala a = 10 cm, b = 15 cm. Ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok összege egyenlő a harmadik magassággal. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalát!

Megoldás: Tegyük fel, hogy van ilyen háromszög. A feltétel szerint $m_c=m_a+m_b$. A magasságok a háromszög t területével és a megfelelő oldalakkal kifejezhetők.

$$\frac{2t}{c}=\frac{2t}{a}+\frac{2t}{b},$$

amiből $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Esetünkben így: c=6 cm.

Tehát, *ha van megoldás,* akkor csak ez lehet!

Ez pedig valóban megoldás, ami következik abból, hogy teljesül a feltétel és a háromszög-egyenlőtlenség. A háromszögek egybevágósági tétele alapján egy megoldása van a feladatnak. Válasz: a háromszög harmadik oldala c=6 cm.(A feladat természetesen más módon is megoldható.)

Most térjünk vissza a **2.** feladathoz. Az előzőkben elmondottak alapján a feladat megoldásában csak addig jutottunk, hogy ha van ilyen paralelogramma, akkor ennek területe 4 cm^2. Ha van! De nincs ilyen paralelogramma! Ugyanis ha $DAB\angle=\alpha$. akkor $t=3\cdot\sin\alpha\leq 3$! (Vagy $t(\alpha)=3\cdot\sin\alpha=4$-ből $\sin\alpha=4/3$, ami lehetetlen.)

Válasz a **2.** feladatra: A feladatnak nincs megoldása, ilyen paralelogramma nem létezik!

Azt, hogy ilyen paralelogramma nem létezik, más módon is megkaphatjuk, pl.: Tegyük fel, hogy van megoldás. Legyen a 2. ábra jelölése szerint *DK*=*BL*=x, ekkor *KO*=*OL*=x, $AK=\sqrt{1-x^2}$. Az *ALB* derékszögű háromszögben

$$(2x+\sqrt{1-x^2})^2+x^2=9,$$
$$2x^4-5x^2+4=0,$$

s mivel ennek az egyenletnek nincs valós megoldása, ezért az eredeti paralelogramma nem létezik. Vagy: Az első megoldásból következik, hogy

$$e^2+f^2=5,$$
$$2ef=4\sqrt{2},$$

azaz $(e-f)^2=5-4\sqrt{2}<0$, ami szintén azt jelenti, hogy nem létezik ilyen paralelogramma.

Egy ilyen feladattal indokolhatjuk tanulóinknak az ellenőrzés szükségességét! (Szakkörön a feladat általános vizsgálata is esetleg elvégezhető. Legyen a paralelogramma két oldala a és b, az átlók hegyesszöge ε ($a<b$, $0°<\varepsilon<90°$). Ekkor $4e^2+4f^2=2a^2+2b^2$, azaz $e^2+f^2=1/2\cdot(a^2+b^2)$. Másrészt $a^2=e^2+f^2-2ef\cdot\cos\varepsilon$, azaz $a^2=1/2\cdot a^2+1/2\cdot b^2-2ef\cdot\cos\varepsilon$, amiből $4ef\cdot\cos\varepsilon=b^2-a^2$. A számtani és a mértani közép közötti összefüggés szerint $\sqrt{e^2f^2}=ef\leq 1/2\cdot(e^2+f^2)$; $4ef\leq 2(e^2+f^2)$, $4ef\leq a^2+b^2$. Így $4ef\cdot\cos\varepsilon\leq(a^2+b^2)\cdot\cos\varepsilon$, azaz $b^2-a^2\leq(a^2+b^2)\cdot\cos\varepsilon$. Ahhoz tehát, hogy az adott adatok alapján létezzen ilyen paralelogramma, a következő feltételnek kell teljesülni: $\cos \varepsilon \geq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$. Ez az adott adatok szerint nem teljesül, hiszen $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = \frac{9-1}{9+1} = 0{,}8$, és $\frac{\sqrt{2}}{2} < 0{,}8$. Ilyen paralelogramma tehát nem létezik).

Néhány (megoldás nélküli) feladat megoldás nélkül.

a) Számítsuk ki az a sík A és B pontjainak a tér egy P pontjától való távolságát, ha *PA* 4 cm-tel hosszabb *PB*-nél, s ha *P'A*= 15 cm, *P'B*= 13 cm, ahol P' a P merőleges vetülete az a síkon.

b) Az *ABCD* trapéz (*AD* | | *BC*) érintőnégyszög, a beírható kör sugara r. A trapéz *BAD* szöge 60°-os, az *AC* átlója merőleges a *CD* oldalra, az *AC* átló felezi a *BAD* szöget. Számítsuk ki a trapéz területét!

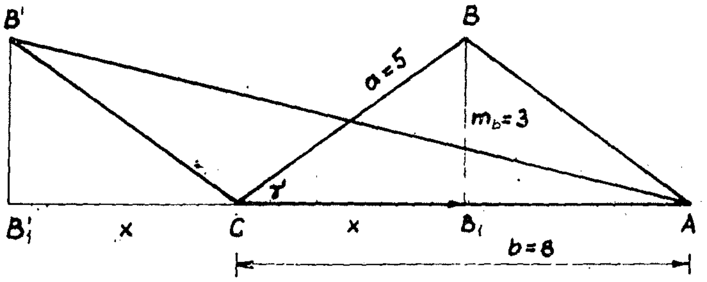
c) Egy gúla alaplapja 15 cm oldalú rombusz. A gúla minden oldallapja az alaplappal 45°-os szöget zár be. A gúla palástjának felszíne 4 dm^2. Számítsuk ki a gúla térfogatát, ha a gúla csúcsának merőleges vetülete a rombusz átlóinak metszéspontjára esik!

Elismerem, hogy az itt közölt feladatok, melyek többsége egyetemi írásbeli felvételi feladat volt, a tanórán való feldolgozásra nehéz lehet. A módszereket természetesen egyszerű feladatok megoldásán érdemes megismerni, gyakoroltatni. Befejezésül egy ilyen "példácskát".

8. *feladat.* Egy háromszög két oldalának hossza a = 5 cm, b = 8 cm, a háromszög területe $t = 12\ cm^2$. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalát!

1. megoldás előjeles szakasz alkalmazásával.

A háromszög b oldalához tartozó magasság $m_b = 2 \cdot 12/8 = 3$ cm. Legyen a B pont vetülete az *AC* egyenesen B_1, jelöljük x-szel a $\overline{CB_1}$ (irányított) *előjeles szakaszt* (a *CB* szakasz *előjeles vetületét* a *CA* irányított egyenesre). Mivel $x^2 = 4^2$, ezért x=4 vagy x = -4. Ha x=4, akkor $B_1A=4$, és így c=*BA*=5 cm, ha x= -4, akkor $B'_1A=12$, és így $c = BA = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153}$ cm.



2. megoldás trigonometria alkalmazásával.

Legyen *BCA* szög = γ. Ekkor $12 = 1/2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin\gamma$, azaz $\sin\gamma = 3/5$. Ebből $0 < \gamma < 90°$, vagy $90° < \gamma < 180°$, azaz $\cos\gamma = 4/5$, vagy $\cos\gamma = -4/5$.

Ha $\cos\gamma = 4/5$, akkor $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4/5 = 5^2$, c = 5 cm,

ha $\cos\gamma = -4/5$, akkor $c^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4/5 = 153$, $c = \sqrt{153}$ cm.

3. megoldás a szerkesztés segítségével való vizsgálat alapján.

Mivel m_b = 3 cm, ezért felvehetjük a *CB* szakaszt, és ettől 3 cm távolságra haladó párhuzamos egyenes párt, majd a C középpontú a=5 cm sugarú kört, és így két-két B pontot kapunk. Nyilván elegendő az egyik pontpárral, B és B'-vel tovább dolgozni. A harmadik oldal így is kiszámítható.

Remélem, hogy a kartársak is azon az állásponton vannak, hogy ezen egyszerű dolgok részletes megbeszélése nem felesleges, s ha a tanításban közös álláspontra tudunk jutni, annak haszna elsősorban a matematika oktatásában, így tanulóink tudásában fog mutatkozni.

SZIKSZAI JÓZSEF tanár
Miskolc

Hozzászólás a Matematika Tanítása egy cikkéhez

Az 1976. évi 3. és 4. számban olvasható Rábai Imre cikksorozata VAN-E MEGOLDÁS? HÁNY MEGOLDÁS VAN? címmel. A szerzővel lényegében egyetértek, és saját tapasztalataimat, gondolataimat összegyűjtve, a legfontosabbakat le is írom. Valóban sok nehézséggel találkozunk a tanórákon a címben fölvetett problémákkal kapcsolatosan, főleg az I. osztályban, és nem csak a geometriai számítási feladatoknál. A tanulók az eredmény felírása vagy a szerkesztés elvégzése után gyakran megfeledkeznek a feladat megoldásához nagyon is hozzá tartozó vizsgálatokról, vagy feleslegesnek tartják azt, a legjobb esetben szükséges rossznak, s elvétve olyan is akad, aki nehezen jut el annak megértéséig, hogy miről is van szó. Természetesen a bajokat a tanár is okozhatja, növelheti, ha saját maga is csak futólag intézi el az ún. diszkussziót, esetleg időhiány miatt. Az időzavar elkerülésére, a tanulók figyelmének felkeltésére gyakran építek be az óra anyagába olyan feladatokat is, amelyeknél a számátás vagy a szerkesztés egyszerű, rövid (lehetőleg minden tanuló számára azonnal érthető), és a fő cél a diszkusszió.

A geometriai számítási feladatokkal kapcsolatos különleges nehézségekre a cikk 7. feladatának elemzésével szeretnék rámutatni. Más típusú feladatoknál – pl. egyenletmegoldásnál — gyakran szoktuk hangoztatni, hogy ha számítási hibát nem követtünk el, és megoldás közben csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, az ellenőrzés csak formalitás. A 7. feladatnál azonban a c oldal kiszámításáig szó sincs ekvivalenciáról. Nézzük ugyanis a következö feladatot.

Van három egyenlő területű téglalap. Oldalpárjaik a, m_a; b, m_b; c, m_c. Tudjuk még, hogy $m_c = m_a + m_b$. Mekkora c, ha a és b adott?

(1. számpélda: $a = 15$ cm, $b = 10$ cm; 2. számpélda: $a = 7$ cm, $b = 3$ cm.)

Nyilvánvaló, hogy ez a feladat éppen úgy az $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ törtes egyenletre vezet, mint a háromszöges 7. feladat. Ugyanakkor a téglalapos feladatnál bármely a és b távolsághoz tartozik megoldás, a 2. számpéldánál viszont $c = 2{,}1$ cm, és $3 + 2{,}1 < 7$, tehát a háromszöges feladatnak most nincs megoldása.

Számításainkban egyik feladatnál sem tévedtünk, tehát hol a hiba? Ott, hogy a 7. feladat szövegében szereplő összes követelményt nem írtuk fel előre és egyszerre összefüggések (képletek, egyenletek, egyenlőtlenségek) formájában, tehát így:

Az a, b, c távolságok háromszöget alkotnak:

$$c < a + b,\ a < b + c,\ b < c + a.$$

Háromszög magasságairól van szó:

$$2t = am_a = bm_b = cm_c.$$

A magasságokra vonatkozó követelmény:

$$m_c = m_a + m_b.$$

Numerikus adatok: $a = 15$ cm, $b = 10$ cm.

Más dolog, hogy a megoldás során az első feltételt utolsóként vesszük sorra, és ezt ellenőrzésnek nevezzük. Ezzel válik a "Van-e megoldás?" vizsgálata a megoldási folyamat egyenrangú részévé. Így a KELL-E ELLENŐRIZNI?, HOGYAN, MIKOR ELLENŐRIZZEM?, HOVÁ HELYETTESÍTSEM?, ELFELEJTETTEM ELLENŐRIZNI tanulói megnyilatkozások gyakorisága is csökken, és szükségtelen a – nem egy tanuló előtt eléggé homályos – "Tegyük fel, hogy van megoldás" bevezető mondat is.

Természetesen nem arról van szó, hogy hasonlóan kellene eljárni minden feladat megoldásánál, annál is inkább, mert a feladat által megszabott összes követelményt nem lehet mindig összefüggésekkel kifejezni. A feladattal nem érintettem minden feladattípust, azt is elismerem, hogy semmi újat nem mondtam, csak arra gondolok, hogy milyen módon is lehetne hangsúlyozni a tanulók előtt, hogy "ne módosítsák a feladat szövegét". A követelményeket pontosan be kell tartani. Ennek érdekében gondosan olvassák el a feladat szövegét, ha kell, többször is, és ne csak a megoldás megkezdése előtt. Csodaszer nincs, a megoldási receptek hasznosak, de csak akkor, ha nincs belőle sok. Nem minden tanuló tudja ezeket fejben tartani, még kevésbé a kellő időben és helyen alkalmazni, viszont elvehetik kedvét a matematikától.

Oldjuk meg a 7. feladatot általánosan, tehát ha az adott oldalak a és b! Mivel c a háromszög legkisebb oldala, és a másik két oldal jelölése választható úgy, hogy $a \geq b$ legyen, a háromszög-egyenlőtlenségek közül elegendő az $a < b + c$ követelmény. Helyettesítve a törtes egyenletből c-re adódó $c = \dfrac{ab}{a+b}$ összefüggést, ekvivalens átalakítások után az $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{1}{b} - 1 < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Az $x^2 - x - 1$ függvény zérushelyeit megkeresve, a feladat megoldását a következő módon írhatjuk fel :

$$c = \frac{ab}{a+b} \quad \text{és} \quad 1 \leq \frac{a}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ ahol } a \geq b.$$

Megemlíthetjük azonban, hogy a két egyenlőtlenség a következővel pótolható:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < v < \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

ahol v az adott két oldal aránya (a:b vagy b:a). Ha tehát az utóbbi egyenlőtlenség teljesül, a feladatnak van megoldása, egyébként nincs.

(Az általános megoldás nem feltétlenül tanórára való, feldolgozása inkább a szakkörön vagy felvételi előkészítőn célszerű. Az eredmény azonban a 7. feladat megoldásakor megemlíthető.)

Megfigyelhető még, hogy a 7. feladat készítője nem csak arra ügyelt a numerikus adatok megválasztásánál, hogy a feladatnak legyen megoldása, hanem arra is törekedett, hogy az a és b mellett a c-re is egész számot kapjunk.

Így vetődhet föl az a kérdés, hogy *mely pozitív egész* (a, b) *számpárokra lesz a* $c = \dfrac{ab}{a+b}$ *is egész?*

A megoldás pl. a következő lehet. Jelölje d az a és b természetes számok legnagyobb közös osztóját, és legyen $a = dm$, $b = dn$! A fenti képletbe helyettesítve:

$$c = \frac{dmn}{m+n}.$$

Az m, $m + n$, valamint az n, $m + n$ nyilván relatív prímek, tehát d többszöröse $(m + n)$-nek, azaz $d = k(m + n)$. Ennélfogva c akkor, és csak akkor egész, ha a és b felírható

$$a = k(m + n)m,\ b = k(m + n)n$$

alakban, ahol a k, m, n paraméterek tetszőleges természetes számok. (Itt már felesleges annak a kikötése, hogy m és n relatív prímek.) Az a és b számokat így választva

$$c = kmn.$$

Ezek után kitűzhetjük a következő feladatot:

Valamely háromszög oldalainak mérőszámai egész számok *és a c oldal adott. Tudjuk továbbá, hogy a háromszögben* $m_c = m_a + m_b$. *Hány ilyen hánomszög van?*

RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus
BME

A Matematika Tanítása
1976. április
XXIII. évfolyam 2.

Néhány megfordítható tétel

Egyetemi szóbeli felvételi alkalmával fel szoktam tenni azt a kérdést a felvételiző tanulónak, hogy soroljon fel a középiskolában tanult tételek közül néhány megfordíthatót, majd fogalmazza meg együtt a két állítást (az *akkor és csak akkor, pontosan akkor* vagy *szükséges és elégséges* kifejezések felhasználásával).

Még a paralelogramma, húr- és érintőnégyszög tételekre, valamint a Thalesz- és Pitagorasz-tételekre és megfordításukra sem tud mindenki utalni. S ha valaki ezt tudja, akkor a következő kérdés, hogy találkozott-e olyan feladattal (tétellel), állítással, amely szintén megfordítható. Erre a kérdésre rendszerint nem szokott válasz elhangzani.

A negyedik osztályban a matematika-tananyag rendszerezése, az érettségire (felvételire!) való felkészítés során érdemes módot keríteni arra, hogy beszéltessük tanulóinkat, foglalkozzunk pl. a tételek megfordíthatóságával. Egyetemi felvételi előkészítők alkalmával a tanulókkal ezt meg szoktam tenni. Gyakorlás céljából néhány egyszerű és nem olyan egyszerű állítást sorolok fel, melyek közül egyesek közvetlenül a törzsanyaghoz, illetve a kiegészítő anyaghoz, mások pedig a tájékoztató anyaghoz kapcsolódnak. Íme a tételek.

1. Igazoljuk, hogy egy háromszög akkor, és csak akkor derékszögű, ha két szögének különbsége egyenlő a harmadik szöggel!

(Ahhoz, hogy egy háromszög derékszögű legyen, szükséges és elégséges, hogy két szögének különbsége egyenlő legyen a harmadik szöggel.)

((A feltétel *szükséges*, hiszen ha a háromszög derékszögű, $\gamma = 90°$, akkor $\beta = 90° - \alpha$.
A feltétel *elégséges,* hiszen ha pl. $\gamma - \alpha = \beta$, azaz $\gamma = \alpha + \beta$, akkor $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy $\gamma = 90°$.)

2. Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszög *pontosan akkor* egyenlő szárú, ha $c\sqrt{2} = a + b$, ahol a, b a két befogó, c pedig az átfogó.

3. Igazoljuk, hogy egy egyenlő szárú háromszög akkor, és csak akkor egyenlőoldalú, ha a köré írt kör sugara a beírt kör sugarának kétszerese.

4. Ahhoz, hogy $x = 1$ az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenletnek gyöke legyen, szükséges és elégséges, hogy $a + b + c = 0$ teljesüljön.

(A feltétel *szükséges,* hiszen ha $x = 1$ gyöke az egyenletnek, akkor $a + b + c = 0$. A feltétel *elégséges* is, hiszen ha $a + b + c = 0$, akkor $x = 1$ gyöke az egyenletnek.)

5. a) Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c valós számok) egyenletnek akkor, és csak akkor van két különböző valós gyöke, ha az egyenlet d diszkriminánsa ($d = b^2 - 4ac$) pozitív.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenletnek akkor és csak akkor van két egyenlő (valós) gyöke, ha $d = 0$. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós gyöke, ha $d < 0$.

b) Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c valós számok) másodfokú függvény grafikonjának akkor és csak akkor van két különböző közös pontja az abszcisszatengellyel, ha $b^2 - 4ac > 0$.

6. Igazoljuk a következő állítást: Ahhoz, hogy a háromszög egyenlő szárú legyen, *elégséges,* hogy szögei között fennálljon a következő összefüggés: $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

A feltétel szükséges-e? Ha igen, úgy bizonyítsuk be!

(A feltétel valóban *elégséges,* hiszen ha a feltétel teljesül, akkor a háromszög egyenlő szárú. A feltétel *szükséges* is, hiszen ha a háromszög egyenlő szárú, akkor a feltétel teljesül.)

7. Igazoljuk a következő állítást: Ahhoz, hogy az *ABC* háromszög derékszögű legyen, *szükséges,* hogy $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{a+b}{c}$, ahol β hegyesszög, *c* pedig az átfogó.

A feltétel *elégséges-e?* Ha igen, úgy bizonyítsuk be!

(A feltétel valóban szükséges, hiszen ha a háromszög derékszögű, akkor a feltétel teljesül. A feltétel elégséges is. (Most csak a β hegyesszög tartozik a feltételhez.) Ugyanis, ha a feltétel teljesül, akkor $\alpha = 90°$ vagy $\gamma = 90°$, azaz a háromszög derékszögű. (No persze, ez a feladat csak tájékoztató jellegű lehet.))

8. Egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak.

9. Egy háromszög oldalai *a*, *b*, *c*, a megfelelő szögek α, β, γ. Igazoljuk, hogy γ szög akkor és csak akkor

hegyesszög, ha $c^2 < a^2 + b^2$,
derékszög, ha $c^2 = a^2 + b^2$,
tompaszög, ha $c^2 > a^2 + b^2$.

10. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a befogótétel és a magasságtétel megfordítását!

E néhány feladat is meggyőzheti a tanító tanárokat, hogy érdemes ezekkel és ezekhez hasonló feladatokkal foglalkozni az ismétlés során.

RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem

A Matematika Tanítása
1985. szeptember
XXXII. évfolyam 4.

Vigyázat: "szűkítő" azonosság!

Az egyetemi matematika tanításában gyakran alkalmazunk középiskolában jól tanított azonosságokat, mégis igen gyakori tapasztalat a hiányos tudás. Nézzük a problémát néhány példa megoldása után!

1. példa: Keressük meg az

$$f(x) = \mathrm{tg}2x + \mathrm{ctg}x$$

függvény zérushelyeit!

Egy tanulói „megoldás":
„Tudjuk, hogy

$$\mathrm{tg}\,2x \equiv \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x} \text{ és } \mathrm{ctg}\,x \equiv \frac{1}{\mathrm{tg}x}.$$

Ezek felhasználásával megoldhatjuk a

(1) $$\mathrm{tg}\,2x + \mathrm{ctg}\,x = 0$$

egyenletet. Ugyanis ekkor

(2) $$\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x} + \frac{1}{\mathrm{tg}x} = 0,$$

azaz $\mathrm{tg}^2x - 1 = 0$, ami azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs gyöke, az adott függvénynek nincs zérushelye."

Az 1. példa egy másik megoldása:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0, \quad \cos 2x \neq 0, \quad \sin x \neq 0.$$
$$\sin 2x \cdot \sin x + \cos 2x \cdot \cos x = 0,$$
$$\cos(2x - x) = 0, \text{ azaz } \cos x = 0;$$

$x = \pi/2 + k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) valóban megoldása az egyenletnek, ezért az $f(x)$ függvény (amely π szerint periodikus) zérushelyei $x = \pi/2 + k\pi$.

Hol vesztek el az előző megoldásban az egyenlet gyökei? A probléma az azonosság értelmezési tartományának figyelembe nem vétele miatt adódott. Nyilván egy azonosságot csak az értelmezési tartományán belül alkalmazhatunk. (A tanulók felé, kissé pontatlanul: az azonosság annyit ér, amennyi az értelmezési tartománya.)

Figyeljük a $\mathrm{tg}\,2x \equiv \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$, gyakran alkalmazott azonosságot! tg $2x$-nek akkor van értelme, ha $\cos 2x \neq 0$, $2x \neq \pi/2 + k\pi$, azaz $x \neq \pi/4 + k\cdot\pi/2$. A $\dfrac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$-nek akkor van értelme, ha tg x-nek értelme van, azaz $\cos x \neq 0$ és ha $\mathrm{tg}^2\,x \neq 1$. Mindez teljesül, ha $x \neq \pi/2 + k\pi$ és $x \neq \pi/4 + k\cdot\pi/2$.

ctg x értelmetlen, ha $\sin x = 0$, $x = k\pi$, míg $1/\mathrm{tg}\,x$ az $x = k\pi$ helyeken kívül akkor is értelmetlen, ha $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + k\pi$.

Ezek szerint amikor az (1) egyenletről áttértünk a (2) egyenletre, akkor szűkítettük az egyenlet értelmezési tartományát. Ezért $x = \pi/2 + k\pi$ még *lehet* az (1) egyenlet gyöke, s valóban az is, hiszen

$$\operatorname{tg} 2(\pi/2 + k\pi) + \operatorname{ctg} (\pi/2 + k\pi) = \operatorname{tg} \pi + \operatorname{ctg} \pi/2 = 0.$$

Figyelmeztessük tanulóinkat arra, hogy legyenek figyelemmel az azonos átalakításokra az egyenlet megoldása során!

Ha az egyenletben olyan azonos átalakítást végeznek, amely az értelmezési tartományát

a) nem változtatja meg, akkor ekvivalens,
b) kibővíti, akkor következmény egyenlethez jutnak, – míg ha
c) szűkíti, akkor gyököt veszthetnek el.

(A bemutatott példához hasonlóan, ha az $A \sin x + B \cos x = C$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ egyenletet a

$$\sin x \equiv \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x \equiv \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

azonosságok alkalmazásával oldjuk meg, akkor külön meg kell vizsgálni, hogy $x = \pi + 2k\pi$ gyöke-e az adott egyenletnek vagy sem.)

2. példa: Oldjuk meg a

$$\lg x^2 + \lg(x + 4)^2 = 2 \lg 3$$

egyenletet!

Egy tanulói „megoldás”:
„Ismeretes a következő azonosság:

$$\lg a^2 \equiv 2 \lg a.$$

Eszerint

$$2 \lg x + 2 \lg (x + 4) = 2 \lg 3,$$
$$\lg x(x + 4) = \lg 3,$$
$$x^2 + 4x - 3 = 0, \quad x_1 = -2 + \sqrt{7}, x_2 = -2 - \sqrt{7}.$$

Az ellenőrzés mutatja, hogy mindkét szám gyöke az eredeti egyenletnek.”

Valóban, mindkét szám gyöke az eredeti egyenletnek, de nemcsak ezek a számok a gyökök. „Szűkítő” azonosságot alkalmaztunk, hiszen

$$\lg a^2 \equiv 2 \lg a, \text{ ha } 0 < a < +\infty.$$

Helyesen:

$$\lg a^2 \equiv 2 \lg |a|, \text{ ha } a \neq 0.$$
$$2 \lg |x| + 2 \lg |x + 4| = 2 \lg 3,$$
$$\lg |x(x + 4)| = \lg 3,$$
$$|x(x + 4)| = 3, \text{ azaz}$$
$$x(x + 4) = 3, \text{ vagy } x(x + 4) = -3,$$

s ezért az egyenlet gyökei az előző megoldásban kapottakon kívül $x_3 = -1$ és $x_4 = -3$.

(Ha az azonos átalakításokat a következő, szerencsésebb sorrendben végezzük, akkor kevesebb hibalehetőség adódik:

$$\lg x^2(x + 4)^2 = \lg 3^2,$$
$$(x(x + 4))^2 = 3^2, \text{ azaz}$$
$$x(x + 4) = 3, \text{ vagy } x(x + 4) = -3.)$$

RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem

A Matematika Tanítása
1987. szeptember
XXXIV. évfolyam 4.

Készítsünk egymásra épülő feladatokat!

A tanítás folyamatának egyik része az önálló feladatok elvégeztetése. Gyakran megesik, hogy a tanuló a feladatot nem tudja megoldani, jóformán hozzá sem tud kezdeni. Tankönyveink, példatáraink talán kevés egyszerű, egy-két logikai lépéssel megoldható feladatot tartalmaznak. Alapvetően fontos, hogy a feladatok egymásra épüljenek, logikai láncot alkossanak. Ilyenek természetesen találhatók a tankönyvekben, példatárakban, de úgy gondolom, hogy többre lenne szükség. E folyóirat egyik feladata lehet az, hogy a tanításhoz közvetlen segítséget adjon. A példatáraimban gyakran jelentek meg az előző szellemben szerkesztett feladatok. Ezek a feladatok egyben alkalmasak bizonyos módszerek megismertetésére.

Természetesen ezek a tanítás, az ellenőrzés folyamán kitűzött feladatoknak csak egy részét képezhetik, hiszen az ilyen irányító munkához nem szabad nagyon hozzászoktatni a tanulókat.

A továbbiakban tekintsünk meg néhány, ebben a szellemben összeállított feladatsorozatot!

1. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\cos 2x = 0$;

b) $\sin 2x = 1/2$;

c) $\sin^2 2x = 1/4$;

d) $\sin 4x - \cos 2x = 0$;

e) $4 \sin^2 2x - 8 \sin 2x + 3 = 0$ (felvételi feladat);

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 8 \sin 2x$ (felvételi feladat).

(Szorgalmi feladat.

1. a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x$,

b) $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 4 \sin 2x$.)

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\sin (x - \pi/6) = 1/2$;

b) $\cos \pi/6 \cdot \sin x - \sin \pi/6 \cdot \cos x = 1/2$;

c) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$;

d) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1 + \cos x}{\sqrt{3} - \sin x}$ (felvételi feladat).

(Szorgalmi feladat.

2. a) $\sin x - \cos x = 1$;

b) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3} - \cos x}{1 + \sin x}$.)

3. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{r}\sin(x+y)=1\\ \sin(x-y)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}\sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}\\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r}\sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}\\ 3\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}y\end{array}\right\}$

Szorgalmi feladat.

3. a) $\left.\begin{array}{r}\cos x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4}\\ 3\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}y=0\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}\sin x\cdot\cos y=\dfrac{3}{4}\\ \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}y=3\end{array}\right\}$

4. a) Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

(1) $x^2-x-6\geq 0$; **(2)** $\dfrac{x-3}{x+2}\geq 0$.

b) Oldja meg a következő egyenleteket!

(1) $\sqrt{\left(6+x-x^2\right)^2}=x^2-x+6$; **(2)** $\left|\dfrac{3-x}{2+x}\right|=\dfrac{x-3}{x+2}$.

c) Mely valós x számokra értelmezhetők a következő kifejezések?

(1) $\lg(x^2-x-6)$; **(2)** $\lg\dfrac{x+2}{x-3}$.

(Szorgalmi feladat.

4. a) Oldja meg a következő egyenleteket:

(1) $|-12+5x+2x^2|=-2x^2+5x+12$; **(2)** $\sqrt{\left(\dfrac{x+4}{2x-3}\right)^2}=\dfrac{x+4}{3-2x}$.

b) Mely valós számokra értelmezhetők a következő kifejezések?

(1) $\log_2(-2x^2-5x+12)$; **(2)** $\log_2\dfrac{x+4}{3-2x}$.)

5. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $(3x-1)(x+2)=(2x+3)(x+2)$; **b)** $\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-2}}{\sqrt{2x^2+7x+6}}=0$;

c) $\sqrt{3x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+7x+6}=0$; **d)** $\lg\sqrt{3x^2+5x-2}=\lg\left(-\sqrt{2x^2+7x+6}\right)$;

e) $2^{\sqrt{3x^2+5x-2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{2x^2+7x+6}}}$; **f)** $\sqrt{3x^2+5x-2}\cdot\sqrt{2x^2+7x+6}=0$.

(Szorgalmi feladat.

5. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{2x^2-3x-2}=-\sqrt{3x^2-7x+2}$; **b)** $\sqrt{2x^2-3x-2}\cdot\sqrt{3x^2-7x+2}=0$;

c) lg $(2x^2-3x-2)=$ lg $(3x^2-7x+2)$; **d)** $(2x^2-3x-2)\cdot\sqrt{3x^2-7x+2}=0$.)

6. a) Mely valós a számokra igaz, hogy

(1) $|a|-a=0$; **(2)** $|a|+a=0$?

b) Hol helyezkednek el az (x, y) síkon azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenleteket:

(1) $|x+y-1|=x+y-1$; **(2)** $|x+y-1|=1-x-y$.

c) Milyen (x, y) valós számpárok esetén értelmezhetők a következő kifejezések?

(1) $\sqrt{x+y-1}$; **(2)** $\lg(1-x-y)$.

(Szorgalmi feladat.

6. a) Hol helyezkednek el az (x, y) síkon azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenletet:

$x^2+y^2-4+|x^2+y^2-4|=0$.

b) Milyen $(x; y)$ valós számpárok esetén értelmezhető a következő kifejezés?

lg $(4-x^2-y^2)$.)

7. a) Mikor igazak a következő azonos egyenlőtlenségek? Mikor áll fenn az egyenlőség?

(1) $a^2+b^2\geq 0$; **(2)** $a^2+b^2+c^2\geq 0$;

(3) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$; **(4)** $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

b) Igazolja, hogy ha $a<b<c$ valós számok, akkor az

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke van! (Felvételi feladat.)

(Szorgalmi feladat.

7. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=3\\ xy+yz+zx&=3\end{aligned}\right\}$$