V. SOROZATOK

a) Három szám összege 76. E három számot tekinthetjük egy mértani sorozat három egymás után következő elemének vagy pedig egy számtani sorozat első, negyedik és hatodik elemének. Határozzuk meg ezeket a számokat!

Ha az első szám a, valamint a mértani sorozat hányadosa q, akkor a három szám: a, aq és aq^2. A feltétel szerint egyrészt $a + aq + aq^2 = 76$, másrészt ha d a számtani sorozat különbsége, akkor $aq - a = 3d$, $aq^2 - aq = 2d$, azaz $2a(q-1) = 3aq(q-1)$.

$a(q-1)(3q-2) = 0$.

Mivel $a \neq 0$, ezért $q = 1$ vagy $q = \frac{2}{3}$.

Ha $q = 1$, akkor $a = \frac{76}{3}$, a három szám megegyezik, mindegyik $\frac{76}{3}$.

Ha $q = \frac{2}{3}$, akkor $a = 36$, s így a három szám 36, 24 és 16.

Mindkét számhármas valóban megoldása a feladatnak. (Dolgozhatunk úgy is, hogy a számtani sorozat jelölése szerint választunk ismeretleneket.) Ügyeljünk arra, hogy a megoldásokat ellenőrizzük.

M. 32. Egy mértani sorozat első, harmadik-és ötödik tagjának összege 84, a harmadik és. az első tag különbsége 12. Határozza meg a sorozat első elemét és hányadosát!

M. 33. Határozza meg az összes olyan kétjegyű szám összegét, amelyek 4-gyel osztva maradékul 3-at adnak!

M. 34. Három szám egy mértani sorozat három egymás után következő eleme. A második számhoz 4-et adva, a számok egy számtani sorozat egymást követő elemei. Ezután a harmadik számot 32-vel növelve, a három szám ismét egy mértani sorozat egymást követő eleme lesz. Határozza meg az eredeti három számot!

A kamatos kamatozás mértani sorozatot eredményez. Ha t Ft-ot helyezünk él a takarékban p %-os kamatláb mellett, akkor az n-edik év végére a felnövekedett összeg $S_n = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

b) Öt éven át minden év elején ugyanakkora összeget helyezünk el a takarékban 33%-os kamatláb mellett, majd az ötödik év letelte után még további 2 éven át kamatoztatjuk. Mennyit tettünk a takarékba évenként, ha pénzünk a hetedik év végére T forintra növekedett?

Jelöljük az évenkénti betétet t-vel, és legyen $q = 1+\frac{p}{100}$. Ekkor az ötödik év végén $S_5 = tq^5 + tq^4 + tq^3 + tq^2 + tq$ Ft van a takarékban. Mivel ez még további 2 évig kamatozik, ezért

$(tq^5 + tq^4 + tq^3 + tq^2 + tq)q^2 = T$, $\quad tq^3 \cdot \frac{q^5-1}{q-1} = T$,

amiből $t = \frac{(q-1)T}{q^3(q^5-1)}$, ahol $q = 1+\frac{p}{100}$.

M. 35. Egy üzem három egymás után következő, éven át munkába állít egy-egy t Ft értékű gépét. Ezek értéke évenként p%-kal csökken. Mekkora a 3 gép együttes értéke a 3-ik év végén, és mekkora az 5-ik év végén?

M. 36. Az *A* üzem termelése a *B* üzem termelésének 90%-a. Az *A* üzem termelését évente 6%-kal növeli, a *B* üzem pedig csak 3%-kal. Hány év alatt éri utol az *A* üzem termelése a *B* üzem termelését?

Megoldások az előző hétről

M. 32. $a(1 + q^2 + q^4) = 84$ és $a(q^2 - 1) = 12$, amiből $q^4 - 6q^2 + 8 = 0$. Ha $q = 2$ vagy $q = -2$, akkor $a = 4$; ha $q = \sqrt{2}$ vagy $q = -\sqrt{2}$, akkor $a = 12$. Ellenőrzés!

M. 33. Az ilyen számok számtani sorozatot alkotnak. A *k*-adik pozitív egész szám, amelyik 4-gyel osztva 3-at ad maradékul, $4k - 1$. Az első kétjegyű ilyen szám $k = 3$ esetén 11, az utolsó $k = 25$ esetén 99, számuk tehát 23. $S_{23} = \frac{11+99}{2} \cdot 23 = 1265$.

M. 34. A három szám 2, 6, 18 vagy $\frac{2}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{50}{9}$.

M. 35. Legyen $1 - \frac{p}{100} = q$. A gépek együttes értéke a 3-ik év végén $S_3 = tq^3 + tq^2 + tq = tq\frac{1-q^3}{1-q}$, az 5-ik év végén $S_5 = tq^3\frac{1-q^3}{1-q}$.

M. 36. Legyen a *B* üzem egy évi termelése *t*, ekkor az *A*-é $0{,}9t$.
$0{,}9t \cdot 1{,}06^n = t \cdot 1{,}03^n$. $n = 3{,}66$.

VI. AZ EXPONENCIÁLIS ÉS A LOGARITMUS FÜGGVÉNY

Tanulmányaik során a hatványozást először természetes szám kitevőre értelmezték, majd kiterjesztették az értelmezést a pozitív tört, nulla, negatív racionális kitevőkre, és belátták, hogy a megismert azonosságok érvényben maradnak. (Tekintsék át ezeket az azonosságokat!) Megjegyezték, hogy a hatványozás minden valós szám, így irracionális szám kitevő esetén is értelmezett és az azonosságok is érvényesek.

a) Melyik nagyobb, $a = (-1{,}2)^0 - 0{,}25^{-\frac{1}{2}}$ vagy $b = -2{,}4^0 + 2{,}5^{-1}$?

Mivel $(-1{,}2)^0 = 1$, $0{,}25^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}25}^{\,-1} = 2$, ezért, $a = -1$, $b = -1 + \frac{2}{5}$, tehát $a < b$.

M. 37. Melyik nagyobb: $a = 27^{-\frac{1}{3}} - 0{,}36^{-\frac{1}{2}}$ vagy $b = 27^0 - 0{,}75^{-1}$?

Megismerkedtek az exponenciális függvényekkel. Ezek szigorúan monoton függvények, így ha $a > 0$ és $a \neq 1$, úgy $a^k = a^l$ akkor és csak akkor teljesül, ha $k = l$.

b) Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1. $3^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; **2.** $2^{3x} = -8$; **3.** $4^{x^2+2x} = 1$; **4.** $4^x + 2^{x+1} = 80$.

1. $3^{-2x} = 3^{-\frac{1}{2}}$, $-2x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$.
2. $2^{3x} > 0$ minden x-re, így nincs megoldás.
3. $x^2 + 2x = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.
4. Mivel $4^x = (2^x)^2$, ezért ha $2^x = y$, akkor $y^2 + 2y - 80 = 0$. Ha $y = 8$, akkor $2^x = 8$, $x = 3$; ha $y = -10$, akkor $2^x = -10$, s így nincs megoldás.

M. 38. a) $(0{,}04)^{3x-2} = 5^{2-x}$; b) $2^{\sqrt{x+1}} = 4^{4-x}$; c) $3^x + 3^{-x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$;

d) $a^{4+x} = a^{6-x}$, ahol $a > 0$ állandó; e) $7^{\sqrt{x^2}} = -x^2 - 4x - 4$.

M. 39. Mely valós x-ekre értelmezhető az

a) $\frac{1}{2^{3x} - 16}$; b) $\sqrt{2^{3x} - 16}$ kifejezés?

Megismerkedtek a logaritmussal, a logaritmus függvénnyel. $\log_a b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) azt a kitevőt jelenti, amelyre a-t emelve b-t kapunk: $a^{\log_a b} = b$; vagy: $\log_a b = c$ akkor és csak akkor, ha $a^c = b$. Tekintsék át a logaritmus azonosságait! Érdemes megjegyezni a $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ azonosságot, aminek speciális esete, ha a helyébe a^k-t, c helyébe a-t írunk, $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$.

c) 1. Hasonlítsuk össze a $2\cdot\lg 11 - 1$ és $2\cdot\lg 1{,}1 + 1$ számokat!

2. A logaritmus értelmezése alapján mely számot jelöli a $9^{\log_3 5}$ és melyiket az $\log_{1/3} 9$?

1. $2\cdot\lg 11 - 1 = \lg 121 - \lg 10 = \lg 12{,}1$. $2\cdot\lg 1{,}1 + 1 = \lg 1{,}21 + \lg 10 = \lg 12{,}1$. A két szám egyenlő. (Lehet más módon is dolgozni! Hogyan?)

2. $9 = 3^2$, ezért $9^{\log_3 5} = 3^{\log_3 25} = 25$; ha $\log_{1/3} 9 = x$, akkor $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$, $x = -2$.

M. 40. Írja le *log* jel nélkül a következő számokat: $a = 25^{2-\log_5 2{,}5}$; $b = \lg 25 + 2\lg 2$.

Megoldások az előző hétről

M. 37. $\left(a = 3^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(0{,}6^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$.

$b = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$; $a < b$.

M. 38. a) $0{,}04 = 5^{-2}$; $5^{-6x+4} = 5^{2-x}$, $x = \frac{2}{5}$.

b) $2^{\sqrt{x+1}} = 2^{8-2x}$, $\sqrt{x+1} = 8 - 2x$, $4x^2 - 33x + 63 = 0$.

$x_1 = 3$ gyöke az adott egyenletnek, $x_2 = \frac{21}{4}$ nem.

c) Legyen $3^x = y$, ekkor $y + \frac{1}{y} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_1 = \sqrt{3}$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

d) Ha $a = 1$, akkor minden x valós szám megoldás, ha $a \neq 1$, akkor $4 + x = 6 - x$, $x = 1$.

e) Az egyenletnek nincs megoldása, hiszen $7^{\sqrt{x^2}} > 0$, $-x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2 \le 0$ minden x-re.

M. 39. a) $2^{3x} - 16 \neq 0$, $x \neq \frac{4}{3}$.

b) $2^{3x} > 2^4$, $x \geq \frac{4}{3}$.

M. 40. $2 - \log_5 2{,}5 = \log_5 25 - \log_5 2{,}5 = \log_5 \frac{25}{2{,}5} = \log_5 10$.

$a = 5^{2\log_5 10} = 100$. $b = \lg 25 + \lg 4 = \lg(25\cdot 4) = 2$.

VII. AZ EXPONENCIÁLIS ÉS A LOGARITMUS FÜGGVÉNY

A logaritmus értelmezése és a logaritmus tulajdonságai, azonosságai alapján egyenleteket, egyenletrendszereket oldhatunk meg. Érdemes ismerni a logaritmus függvény következő tulajdonságát: $\log_a k = \log_a l$ $(k > 0,\ l > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$ akkor és csak akkor, ha $k = l$.

a) Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1. $\log_4 x = -\frac{5}{2}$; **2.** $\log_x 27 = 1{,}5$; **3.** $2\lg(x + 4) = \lg(x + 16)$; **4.** $2\lg(2x - 4) = \lg(2x - 4)^2$.

1. $4^{-\frac{5}{2}} = x$, $x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$.

2. $x^{\frac{3}{2}} = 3^3$, $x = 3^{3\cdot\frac{2}{3}} = 9$.

3. $(x + 4)^2 = x + 16$. $x = 0$ gyöke az egyenletnek, $x = -7$ nem, hiszen az egyenletnek ekkor nincs is értelme.

4. Az egyenletnek akkor van értelme, ha $2x - 4 > 0$, azaz $x > 2$. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, az $x > 2$ számok körében az egyenlet azonosság.

Összetett függvényt tartalmazó egyenletek megoldása során új változót vezethetünk be.

M. 41. Mely valós x-ekre értelmezhető az

a) $\lg(8 + 2x - x^2)$; **b)** $\frac{1}{\lg\left(x^2 - 1\right)}$; **c)** $\lg(8 + 2x - x^2) - \lg(x^2 - 1)$

kifejezés?

M. 42. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\lg(5 - x) + 1 = \frac{1}{3}\lg 27$;

b) $\log_x \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1$;

c) $\log_4 \log_2 (2x - 4) = 0$;

d) $\lg\left(x + 8\right) - \lg\sqrt{2x + 1} = 2 - \lg 25$.

M. 43. a) $\frac{\lg 4^{2x}}{x} = \lg 16$; **b)** $\log_{2x} 4x^2 = 1$; **c)** $\lg(x^2 - x - 6) - \lg(x + 2) = \lg(x - 3)$;

d) $\log_2 4 \cdot \log_2 \sqrt{x^2 - 2x} = \log_2 x + \log_2 \left(x - 2\right)$; **e)** $5^{x+2} \cdot 2^{x-2} = 375$;

f) $2^x + 2^{x+2} = 8^x$; **g)** $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Egyenletrendszerek megoldása során kísérletezhetünk helyettesítő módszerrel, új változók bevezetésével, valamint azonosságok, függvénytulajdonságok alkalmazásával.

b) Oldjuk meg: $\left.\begin{array}{l} \lg x + \lg y = 1, \\ x - y = 3. \end{array}\right\}$.

Az egyenletrendszer megoldása az $x = 5,\ y = 2$ számpár. Ha helyettesítő módszerrel dolgozunk, akkor a megoldáshoz az $\lg(y + 3) + \lg y = 1$ egyenlet vezet. Ha az első egyenletet az

$x > 0$, $y > 0$ feltétellel $\lg xy = \lg 10$ alakra hozzuk, amiből $xy = 10$, akkor algebrai egyenletrendszerre vezettük vissza a feladat megoldását.

M. 44. a) $\left.\begin{aligned} x^y &= 3^{12} \\ 2^{\log_3 y} &- \log 3x = 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\lg(4 \cdot 3^x + 12) - \lg 4 = -\lg 18 + \lg(27(9^{x-1} - 1)$.

Megoldások az előző hétről

M. 41.

a) $8 + 2x - x^2 > 0$, azaz $-2 < x < 4$.

b) $x^2 - 1 > 0$ és $x^2 - 1 \neq 1$, azaz $|x| > 1$ és $|x| \neq \sqrt{2}$.

c) $-2 < x < 4$ és $|x| > 1$, azaz $-2 < x < -1$, vagy $1 < x < 4$.

M. 42.

a) $\lg(5 - x) = \lg 3 - \lg 10$, $x = 4{,}7$.

b) $2x^2 - 3x + 2 = x^2$, $x_1 = 2$ gyöke az egyenletnek, $x_2 = 1$ nem, mert a logaritmus alapszáma 1-től különböző pozitív szám.

c) $\log_2(2x - 4) = 4^0 = 1$. $x = 3$.

d) $2 - \lg 25 = \lg 4$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2-vel, majd rendezzük.

$\lg(x + 8)^2 = \lg 16(2x + 1)$, $(x + 8)^2 = 32x + 16$. Az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, ugyanis mindkét esetben a bal oldal helyettesítési értéke lg4.

M. 43.

a) $x = 0$ kivételével minden szám.

b) Minden megengedett x-re a bal oldal 2, így nincs gyöke egyenletnek.

c) Az egyenletnek $x > 3$ esetén van értelme, és minden ilyen szám megoldás.

d) Az $x > 2$ számok körében azonosság.

e) $x = \lg 60$.

f) $5 \cdot 2^x = 8^x$, $4^x = 5$, $x = \log_4 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 4}$.

g) Legyen $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = y$. $y^2 - 2{,}5y - 6 = 0$. Mivel $y > 0$, ezért $y = 4$.

Az egyenlet gyöke $x = 1{,}5$.

M. 44.

a) A második egyenletből $\log_3 x = y - 1$, $x = 3^{y-1}$, így $3^{y(y-1)} = 3^{12}$, s mivel $y > 0$, ezért $y = 4$, így $x = 27$.

b) Az egyenlet $\lg(3^x + 3) + \lg 18 = \lg 3 + \lg(3^x + 3) + \lg(3^x - 3)$ alakra hozható.

A megoldás: $x = 2$.

VIII. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Tekintse át a trigonometrikus függvények értelmezését, az ezekre vonatkozó ismertebb azonosságokat!

a) Számítsuk ki ctg 75°·sin^2 75° pontos számértékét!

Mivel ctg 75° = $\dfrac{\cos 75°}{\sin 75°}$, ezért a kifejezés $\dfrac{1}{2}\left(2\cos 75° \cdot \sin 75°\right) = \dfrac{1}{2}\sin 150° = \dfrac{1}{4}$.

M. 45. Számítsa ki $\dfrac{1}{(1-\sin 67{,}5°)(1+\cos 22{,}5°)} + 4\cos 135°$ pontos számértékét!

b) Milyen számok körében érvényesek a következő azonosságok:

1. $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \cos\alpha$; **2.** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$;

3. 1 – cos2α = 2sin^{2}α; **4.** sin(90° – α) = cosα.

1. Ha cosα ≥ 0, azaz $-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol *n* tetszőleges egész szám.

2. Ha cosα ≠ 0, azaz $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + n\pi$.

3., 4. Minden α szögre.

Trigonometrikus azonosságokat úgy igazolhatunk, hogy az egyik oldalon álló kifejezést addig alakítjuk a (megállapított) értelmezési tartományon belül, amíg a másik oldalon álló kifejezést nem kapjuk. Az azonosság helyett a vele ekvivalens azonosságot is elegendő igazolni. Megtehetjük, hogy az azonosság mindkét oldalán álló kifejezésről megmutatjuk, hogy mindkettő egy harmadik kifejezéssel azonos.

c) Igazoljuk a cos^2(135° + α) – sin2α = sin^2(135° + α) azonosságot!

Elegendő igazolni, hogy cos^2(135° + α) – sin^2(135° + α) = sin2α. A bal oldal a 135° + α szög kétszeresének cosinusa. cos(270° + 2α) = cos(2α – 90°) = cos(90° – 2α) = sin2α.
(Az igazolást más módon is elvégezhetnénk!) Az azonosság minden α szögre érvényes.

M. 46. Igazolja a következő azonosságokat:

a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{4\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - 1}$; **b)** 1 + sin2α = 2 cos^2(45° – α).

Azonosságokat alkalmazunk számítások és feltételes azonosságok igazolása során is.

d) Számítsuk ki tg 2*x* értékét, ha $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ha $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, akkor $\sin x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ vagy $\sin x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, s mivel $\mathrm{tg} 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} =$

$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-1}$, ezért tg $2x = -\frac{3}{4}$ vagy tg $2x = \frac{3}{4}$.

Alkalmazhatnánk a $\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$ azonosságot is, hiszen most már tudjuk, hogy tg $x = \pm 3$.

M. 47. Számítsuk ki

a) cos2x és sin2x értékét, ha tg $x = \frac{5}{6}$; **b)** sin3x értékét, ha cos2$x = \frac{2}{3}$ és $0 < x < 90^o$.

e) Bizonyítsuk be, hogy ha cos(α + β) = 0, akkor sin(α + 2β) – sinα = 0. Igaz-e az állítás megfordítása?

sin(α + 2β) – sinα azonos átalakításokkal 2sinβ·cos(α + β) alakra hozható, amiből látható, hogy igaz az állítás. Viszont a megfordítás nem igaz, hiszen 2sinβ·cos(α + β) úgy is lehet nulla, hogy sinβ = 0 és cos(α + β) ≠ 0.

M. 48. Igazolja, hogy ha (2 + cos2x)(2 – cos2y) = 3, akkor tg^2x = 3tg^2 y!

Megoldások az előző hétről

M. 45. A keresett szám 4.

M. 46. b) Legyen 45° – α = β, azaz 2α = 90° – 2β. Ekkor az igazolandó azonosság: 1 + cos2β = 2cos^{2}β. Ezt könnyű belátni. Minden α szögre érvényes az azonosság.

M. 47. a) cos2$x = \frac{11}{61}$, sin2$x = \frac{60}{61}$. **b)** sin3$x = \frac{7\sqrt{6}}{18}$.

M. 48. 1 + cos2x = 2cos^2x, 1 – cos2y = 2sin^2y. Ezeket alkalmazva eljuthatunk a cos^2x + 2cos^2x·sin^2y = cos^2y egyenletig.

Ezt cos^2x·cos^2y·sin^2y-nal osztva $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathrm{tg}^2 y$ és az $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$ azonosságok alkalmazásával kapjuk az igazolandó állítást.

IX. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

A sin$x$ = a, cos$x$ = b, tg$x$ = c, ctg$x$ = d alakú egyenleteket trigonometrikus alapegyenleteknek tekintjük. A sin$x$ = $\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 2 vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. (A megoldásokat mindig radiánban fogjuk megadni.) A cos$x$ = $-\frac{1}{2}$ megoldásai $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, a tg$x$ = 1 megoldásai $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, a ctg$x$ = –1 megoldásai $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

a) Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1. $\sin^2\frac{x}{2} = 3\cos^2\frac{x}{2}$; **2.** $\frac{1+\cos x}{\sin x} = 0$; **3.** $\sin^2 x + \cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Az 1. egyenletben azok az x-ek, amelyekre $\cos^2\frac{x}{2} = 0$, nem lehetnek megoldások, így $\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = 3$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{3}$, $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

A 2. egyenletnek nincs megoldása, hiszen ha cos$x$ = –1, akkor sin$x$ = 0.

A 3. egyenletnek minden megengedett x megoldása, tehát $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

M. 49. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $4\sin^2 2x = 3$; **b)** $2\cos^2\frac{x}{2} = 1$; **c)** $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} = 1$;

d) $\sin x\cdot\cos x = -1$; **e)** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$; **f)** $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$

Trigonometrikus egyenletek megoldása során vezessük vissza az egyenlet megoldását alapegyenletek megoldására. Ha lehet, úgy az egyenlet nullára redukálása után alakítsuk szorzattá a (nem nulla) kifejezést. Esetleg észrevehetjük, hogy az egyenlet valamely kifejezésre nézve másodfokú. Ha négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát, úgy feltétlenül végezzünk próbát!

b) Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; **2.** $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. **3.** $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$.

Az 1. egyenlet $2\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x = 0$ alakra hozható. cos x = 0 vagy cos x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vagy $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

A 2. egyenletből sin$x$ = 1 vagy sin$x$ = $-\frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

A 3. egyenlet rendezése és négyzetre emelése után az 1. vagy a 2. egyenlet adódik. Ellenőrizzük a gyököket!

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$. (Más módon is dolgozhatunk!)

M. 50. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\sin x + \operatorname{tg} x - \sin x \cdot \operatorname{tg} x = 1$;

b) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{10}{3}$;

c) $\sin 2y + \operatorname{ctg} y = 0$;

d) $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Megoldások az előző hétről

M. 49. a) $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ vagy $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

b) $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$, így $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

c) $x = 4k + 1$.

d) $\sin 2x = -2$, tehát nincs megoldás.

e) Minden x megoldás.

f) Minden megengedett x megoldás, $2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$.

M. 50. a) $(\sin x - 1)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$. Amikor $\sin x = 1$, akkor a $\operatorname{tg} x$ nem értelmezett. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

b) $\operatorname{tg}^2 x = 3$ vagy $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

c) $\sin y \neq 0$. $\sin y$-nal szorozva az egyenlet mindkét oldalát, $(2\sin^2 y + 1)\cos y = 0$ adódik. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

d) Legyen $\frac{\pi}{4} - x = y$. Ekkor $-\sin 2y = \operatorname{ctg} y$, az előző egyenlet adódik, $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$.