

M. I.

M. I.

1. Egy rombusz területe 16, hosszabb átlója kétszer akkora, mint a rövidebb. Számítsa ki a rombusz szögeit!

2. Egy számtani sorozat négy egymás utáni elemének összege 0, e négy szám négyzetének összege 20. Melyek ezek a számok?

3. Egy háromszög csúcsai: $A(0;0)$, $B(8;0)$ és $C(6;4)$. Írja fel a háromszög köré írható kör egyenletét!

4. Oldja meg az

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-7} = 0$$

egyenletet!

5. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egymást követő, 3-nál nagyobb egész számok. Bizonyítsa be, hogy

a) a háromszög hegyesszögű;

b) a középső nagyságú oldalhoz húzott magasság olyan részekre osztja ezt az oldalt, amelyek különbsége 4.

6. Egy egyenlő szárú, hegyesszögű háromszöget megforgatunk az egyik szára körül, és a keletkezett forgástest térfogatát jelöljük V_1 -gyel. A háromszöget az alapja körül is megforgatjuk, és az így

keletkezett forgástest térfogatát V_2 -vel jelöljük. Mekkora a háromszög szögei, ha $V_1:V_2 = 2:5$?

7. Két pozitív egész szám különbsége k . Ha a kisebbik szám háromszorosához hozzáadjuk a nagyobbik négyszeresét, akkor 91-et kapunk. A k szám mely értékei esetén van megoldása a feladatnak, és mik a megoldások?

8. Oldja meg a

$$\sin(\pi \lg x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \lg x\right)$$

egyenletet!

M. II.

1. Oldja meg az

$$x - y = \frac{5}{6}, \quad xy = 1$$

egyenletrendszert!

2. A 4 egységnyi sugarú kör középpontjától 8 egységnyi távolságra levő P pontból húzza meg a kör érintőit; az érintési pontokat jelölje A -val, illetve B -vel! Számítsa ki az APB szög nagyságát, az AB szakasz hosszát, valamint a két érintő és az érintési pontok közé eső rövidebb AB körív által határolt síkidom területét!

3. Egy hegyesszögű háromszög két oldala 20 és 24, a háromszög köré írható kör sugara 15. Számítsa ki a háromszög szögeit, és harmadik oldalának hosszát!

4. Mely valós x -ekre értelmezhető az

$$\text{a) } \frac{x-3}{x^2+2x-15}; \quad \text{b) } \frac{1}{\sin \frac{\pi}{x}}; \quad \text{c) } \sqrt{\frac{3+x}{x-2}}$$

kifejezés?

5. Melyek azok a mértani sorozatok, amelyeknek első elemük 1, és bármely elemük a rákövetkező két elem számtani közepével egyenlő?

6. Egy háromszög csúspontjainak koordinátái: $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;6)$. A koordináta-rendszer síkjában mi a mértani helye azoknak a P pontoknak, amelyekre $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k^2$, ahol k valós szám?

7. Oldja meg a $\sin 2x - \sin x = \cos 2x - \cos x$ egyenletet!

8. Melyek azok a p , q egész számok, amelyekre $\log_a(p+q) = \log_a p + \log_a q$?

M. III.

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} + \frac{3}{2-x} = 0.$$

2. Egy mértani sorozat első eleme 8, a sorozat huszonegyedik eleme 1. Mekkora a sorozat második eleme?

3. Számítsa ki $\operatorname{tg} 2x$ pontos értékét, ha

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

4. Oldja meg a következő egyenletet:

a) $\sqrt{x+2} + 2 = 0$; b) $5^{x^2-3x} = 1$;

c) $\log_{\sqrt{2}} \sin \sqrt{x} = 0$.

5. Egy rombusz oldala 12 egység hosszú, egyik szöge 40° . Egyik hegyesszögének csúcsából két szelővel három egyenlő területű részre bontjuk a rombuszt. Mekkora egy-egy rész területe, és mekkora a szelőknek a rombuszba eső darabja?

6. Mely valós x -ekre értelmezhető az

a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$; b) $\lg(x^2-x-6) + \lg(4-x^2)$;

c) $\operatorname{tg}(\pi \sin x)$

kifejezés?

7. Határozza meg az $ay - bx + 4b - 5a = 0$ egyenes egyenletében az a és b paraméter értékét úgy, hogy az egyenesnek csak egy közös pontja legyen az $y = x^2 - 4x + 5$ parabolával!

8. Egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra. Bocsásson az átlók metszéspontjából merőlegeseket a négyszög oldalaira! Bizonyítsa be, hogy ezeknek a merőlegeseknek a talppontjai egy húr-négyszög csúcsai!

W. IV.

1. Ha az $ABCD$ négyzet AB és CD oldalának hosszát 2 cm-rel megrövidítjük, és a másik két oldalt 1 cm-rel meghosszabbítjuk, akkor olyan téglalapot kapunk, amelynek területe 8 cm²-rel lesz kisebb az eredeti négyzet területénél. Mekkora a négyzet oldala?

2. Az x -tengely mely pontjaiból látszik az AB szakasz derékszögben, ha $A(-1;3)$, $B(7;3)$?

3. Állítsa növekvő sorrendbe a következő számokat (táblázat használata nélkül):

$$100^{1/10}, \sin \frac{34\pi}{3}, 81^{-\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{33}-\sqrt{32}}$$

4. Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme; a mértani sorozat harmadik eleme eggyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és hárommal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írja fel mindkét sorozat első öt elemét!

5. Egy r sugarú kör köré olyan szimmetrikus trapézt írunk, amelynek párhuzamos oldalai közül a hosszabb $2a$ hosszúságú ($a > r$). Fejezze ki a trapéz területét a -val és r -rel!

6. Oldja meg az

$$5 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 12 = 0,$$

$$3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-2} - 16 = 0$$

egyenletrendszert!

7. Az AB szakasz A -n túli meghosszabbításán vegyünk fel egy C pontot és C -ben emeljünk egy g merőleges egyenest az AB egyenesre! Kössük össze a g egyenes egy P pontját A -val és B -vel! Állítsunk merőlegest A -ban PA -ra, B -ben PB -re! Állapítsuk meg a merőlegesek metszéspontjának mértani helyét, ha a P pont C kivételével befutja a g egyenes pontjait!

8. Legyen γ olyan valós szám, amelyre $\gamma \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Bizonyítsa be, hogy az

$$\left(\frac{x^2 \sin \gamma - 2x + \sin \gamma}{x^2 - 2x \sin \gamma + 1} \right)^2 - 1$$

függvény értéke egyetlen valós x -re sem pozitív!

III. V.

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{2x}{x-7} = 1 - \frac{x^2 - 11x + 14}{x-7}$$

2. Egy kör belső P pontján át két egymásra merőleges húr halad át. A P pont mindkét húrt egy 7 és egy 17 egységnyi hosszúságú szakaszra bontja. Milyen távol van a kör középpontja a húroktól és a P ponttól, és mekkora a kör sugara?

3. Számítsa ki a következő kifejezések értékét a közelítő értékek használata nélkül;

a) $(\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}})^2$; b) $5^{-\log_5 4}$
c) $\operatorname{tg} 75^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ$.

4. Oldja meg a következő egyenletet:

$$x^2 + 3x = 16 + \sqrt{9x^2}$$

5. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz köré írható kör sugara 10 cm, a hosszabbik párhuzamos oldala $AB = 10\sqrt{3}$ cm, hegyesszöge 75° -os. Számítsa ki a trapéz többi oldalának a hosszát és a trapéz területét!

6. A $2y = x^2$ egyenletű parabolának melyik pontja van a legközelebb az $y = 2x - 4$ egyenletű egyeneshez? Mekkora ez a legkisebb távolság?

7. Egy szabályos n oldalú és egy szabályos $2n$ oldalú sokszög egyenlő kerületű. Bizonyítsa be,

hogy a területük aránya: $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$.

8. A páros pozitív számok sorozatában $2k$ -től kezdve $2m$ -ig (a $2m$ -et is beleértve) összeadtuk a számokat. Összegük 2552. Állapítsa meg k és m lehetséges értékeit!

M. VI.

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} (x-1)^2 - (x-y)x &= (x-5)y, \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{y}{y+1} &= 1. \end{aligned} \right\}$$

2. Iktasson be -5 és 1215 közé négy számot úgy, hogy az így kapott 6 szám egy mértani sorozat első 6 eleme legyen!

3. Mekkora az ABC háromszög ismeretlen oldalai és szögei, ha $AB = 10$, $BC = 8$ egység, és a BAC szög 30° -os?

4. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\lg(3x+112) = 2$, b) $\sqrt{x-1} = 1-x$;
c) $\sin^2 x \cos^2 x - 1 = 0$.

5. Írja fel annak a legkisebb sugarú körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört és a $3x + 4y = 75$ egyenletű egyenest!

6. Az α mely értékeire érvényes a következő azonosság? Igazolja az azonosságot!

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}$$

7. Mely valós x -ekre értelmezhető az

a) $\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x}$; b) $\sqrt{\lg \sin x}$

kifejezés? Milyen értékeket vesz fel a kifejezés?

8. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \log_3 x + 3^{\log_3 y} &= 2, \\ x^y &= \frac{1}{125}. \end{aligned}$$

M. VII.

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2(x+3)}{x-3}$$

2. Írja fel az $A(-2; 15)$ pontból a $3x - 4y + 16 = 0$ egyenesre bocsátott merőleges egyenes egyenletét! Számítsa ki a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit és az AM szakasz hosszát!

3. Ha egy számtani sorozat három szomszédos eleme közül az elsőhöz 1-et adunk, egy mértani sorozat három egymás utáni eleméhez jutunk. Egy másik mértani sorozat három egymás utáni elemét kapjuk meg akkor, ha az eredeti három szám közül az utolsóhoz 3-at adunk. Számítsa ki mind a két sorozat hányadosát!

4. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{1}{x^4 + x^2 - 1} = 1$; b) $5\sqrt{x} = -x^2$;

c) $(\lg(1-x))^2 = 1$.

5. Igazolja a következő azonosságot:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{4 \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - 1}$$

Határozza meg az azonosság értelmezési tartományát is!

6. Mely valós x -ekre értelmezhető az

a) $\frac{\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{x}}$; b) $\sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; c) $\lg \frac{x+1}{x}$

kifejezés?

7. Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Az α mely értékei esetén

valósak a $(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0$ egyenlet gyökei? A kapott α értékekre milyen előjelűek a gyökök?

8. Az egységnyi átfogójú derékszögű háromszögek közül melyikben legkisebb a háromszög területének és a beírt kör sugarának az aránya?

M. VIII.

1. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 12 és 8, szárjai 4 cm hosszúak. Mekkora a trapéz területe? Milyen távol van a két átló metszéspontja a 8 cm-es oldal végpontjaitól?

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\sin^2 x = \cos^2 x$; b) $4^x = 32$; c) $2 \lg(x+3) = \lg(x+9)$.

3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(14; -2)$ ponton és az origótól 10 egység távolságra van!

4. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy az $x^2 - 6x + c = 0$ és az $x^2 - 24x + 128 = 0$ egyenlet gyökeit egymás után növekvő sorrendben írva egy mértani sorozat négy egymás utáni elemét adják!

5. Az r sugarú kör úgy helyezkedik el az R sugarú, 2α középponti szögű körökben, hogy a körök határoló körívet és mindkét sugarat érinti. Fejezzük ki r -et R -rel és α -val!

6. Oldjuk meg a

$$\left. \begin{aligned} 2x + ay &= 1, \\ 3x - 2y &= b \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert, ahol a és b valós paraméterek. (Van-e megoldás? Hány megoldás van? Mi a megoldás?)

7. Az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében fekvő P pont az A és a B csúcsoktól 2, a C csúcsától 1 egységnyi távolságra van. Mekkora a háromszög területe?

8. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} 4^{2y^2} &= 4 \cdot 2 \sin^2 x, \\ \sqrt{y} &= \cos x \end{aligned} \right\}$$

M. IX.

1. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $(x^2 + 2x - 3)^2 = (x^2 + x - 2)^2$,

b) $\frac{x - \sqrt{x-2}}{-x + 5\sqrt{x-6}} = 0$; c) $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0$.

2. Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 20 cm, magassága 12 cm, két szárának hossza 13 cm, illetve 15 cm. Számítsa ki a trapéz területét!

3. Adott az $(a-2)x^2 - 2ax + a - 2 = 0$ egyenlet, ahol a valós paraméter. Határozza meg az a értékét úgy, hogy az egyenlet két gyöke

a) egyenlő legyen;

b) egymás reciproka legyen!

4. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1.$$

5. Egy derékszögű háromszög a koordináta-rendszerben úgy helyezkedik el, hogy az átfogó egyik végpontja $A(-2;2)$, a másik (B) végpontjának ordinátája 4, az egyik befogó egyenlete: $x + y = 10$. Számítsa ki a háromszög területét!

6. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} 2^{2x-2y} + 2x^{-y} &= 2, \\ 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1} &= 5. \end{aligned} \right\}$$

7. Egy szabályos háromoldalú gúla oldaléle a egység, az oldalélek az alaplappal 60° -os szöget zárnak be. Fejezze ki a -val a gúla térfogatát és felszínét!

8. Az ABC háromszög oldalai természetes számok, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $b+c=5a$ és a C csúcsnál fekvő szög 60° -os. Számítsa ki a legkisebb kerületű ilyen háromszög területét!

M. X.

1. Egy egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek sinusa $\frac{5}{13}$. Táblázat alkalmazása nélkül számítsa ki a két szár által bezárt szög tangensét!

2. Egy K középpontú, 5 egység sugarú kör AM ívéhez 60° -os középponti szög tartozik. Jelölje C az

MK egyenesnek azt a pontját, amely a körön kívül úgy helyezkedik el, hogy $BC=BA$, ahol B a körnek az MK egyenessel közös, M -től különböző pontja. Számítsa ki az ABC háromszög szögeit és területét!

3. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\lg x^4 = 2 \lg x^2$; b) $\lg x^4 = 4 \lg x$; c) $\lg x^3 = (\lg x)^3$.

4. Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körhöz meghúzzuk a -3 abszcisszájú pontjaiban az érintőket. Mekkora területű síkidomot határol a két érintő és az érintés pontok közötti rövidebb körív?

5. Oldja meg a

$$3^{2x+1} = 1 + \sqrt{1 - 8 \cdot 9^x}$$

egyenletet!

6. Az $ABCD$ téglalap két szomszédos oldalának aránya: $AB:BC = 4:3$. Jelöljük F -vel a CD oldalnak azt a pontját, amelyre FAD szög 45° -os, és jelöljük E -vel az FB szakasz felező merőlegesének a BC oldallal alkotott metszéspontját. Az EFC háromszög területe 6 területegység. Számítsa ki a téglalap oldalait, valamint az EAF szög cosinusát!

7. Hány valós gyöke van az

$$\frac{a-x}{b} = \frac{c}{d-x}$$

egyenletnek, ha b és c 0-tól különböző és egyező előjelű, a és d pedig tetszőleges valós számok?

8. Bizonyítsa be, hogy egy $2n$ jegyű, csupa 1-esből álló és egy n jegyű, csupa 2-esből álló természetes szám különbsége négyzetszám, tetszőleges pozitív n esetén. Milyen számjegyekből áll a különbség négyzetgyöke?

M. XI.

1. Adott a

$$K(a) = \frac{a}{a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{1 - a(1 - a)}{1 - a} \cdot \frac{a}{1 + a^3} - \frac{2a - 2a^2 - 2}{(1 - a^2)(a - 1)}$$

kifejezés. Azonos átalakításokkal hozza egyszerűbb alakra a kifejezést! Az a milyen értéke esetén lesz a kifejezés értéke pozitív, nulla, illetve negatív?

2. Az ABC háromszögben $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a + c = 8\sqrt{3}$ egység, az a oldalhoz tartozó magasság $m_a = 3$ egység, a B csúcsnál levő szög $\beta = 60^\circ$. Számítsa ki a b oldal hosszát!

3. Egy mértani sorozat hányadosa q , az első n páratlan sorszámú elemének összege S . Fejezze ki q -val és S -sel az első n páros sorszámú elemének összegét!

4. Oldja meg az

$$x^{2 \lg x} = 10x$$

egyenletet!

5. Az r sugarú kör AB húrja a körbe írható négyzet egy oldala, az AC húrja a körbe írható szabályos háromszög egy oldala. Fejezze ki r -rel az ABC háromszög területét!

6. Az $ABCD$ négyzet két szemközti csúcsa $A(3; 4)$, $C(5; -2)$. Határozza meg r értékét úgy, hogy a négyzet átlóinak F metszéspontja az $x^2 + (y + 2)^2 = r^2$ egyenletű körre essen. Van-e az AC egyenesnek az adott körrel F -től különböző közös pontja? Határozza meg a négyzet másik két csúcspontjának koordinátáit!

7. Határozza meg az a értékét úgy, hogy az

$$x^2 + (3a - 5)x - 7a + 6 = 0$$

egyenletben a gyökök négyzetének összege a legkisebb legyen! Mekkora ez a legkisebb érték?

8. Az ABC háromszögben $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, a megfelelő szemközti szögek α , β , γ . Igazolja, hogy ha $b + c = 2a$, akkor

$$3 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1.$$