MATEMATIKA

M. I.

1. Legyen a rombusz rövidebb átlója $2e$, ekkor a hosszabb átló $4e$, a rombusz területe $4e^2 = 16$, $e = 2$. A rövidebb átló 4, a hosszabb átló 8 egység. Ha a rombusz oldala a, akkor

$$a^2 = e^2 + (2e)^2,\quad a^2 = 20,$$

$a = 2\sqrt{5}$ egység. Legyen a rombusz hegyesszöge 2α, ekkor $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 26°\,34'$. A rombusz szögei: $53°\,08'$ és $126°\,52'$.

2. Legyen a négy egymás utáni elem: $a-3t$, $a-t$, $a+t$, $a+3t$. Az első feltétel szerint $4a = 0$, $a = 0$. A második feltétel szerint $20t^2 = 20$, $t = 1$ vagy $t = -1$. A keresett számok $-3, -1, 1, 3$ vagy $3, 1, -1, -3$. Mindkettő valóban megoldása a feladatnak.

3. Egy lehetséges paraméteres megoldás. Mivel a kör átmegy az origón, egyenletét $x^2+y^2+ax+by = 0$ alakban keressük. A B pont rajta van a körön, koordinátái kielégítik a kör egyenletét, tehát $64+8a = 0$, $a = -8$. A C pont is a körön van, tehát

$$36+16-48+4b = 0,\quad b = -1.$$

A kör egyenlete: $x^2+y^2-8x-y = 0$, ami $(x-4)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$ alakban is írható.

4. Az egyenletnek az $x = \pm 1$, vagy $x = \pm 7$ számok nem lehetnek gyökei. Az $x+1$, $x-1$ illetve $x+7$, $x-7$ nevezőjű törteket adjuk össze:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-49} = 0.$$

Emeljük ki a $2x$-et, majd hozzunk közös nevezőre:

$$2x\left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-49}\right) = 0,$$

$$\frac{2x(2x^2-50)}{(x^2-1)\,(x^2-49)} = 0.$$

Ez utóbbi egyenlet gyökei $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = -5$, s ezek az adott egyenletnek is megoldásai.

5. Legyen a háromszög három oldala $a-1$, a, $a+1$. Mivel $a-1>3$, ezért $a>4$.

a) Ha a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög, akkor a háromszög hegyesszögű. A legnagyobb szög a legnagyobb oldallal fekszik szemközt. A legnagyobb szög (jelölje α) cosinusa

$$\cos\alpha = \frac{a^2+(a-1)^2-(a+1)^2}{2a(a-1)} = \frac{a-4}{2(a-1)}.$$

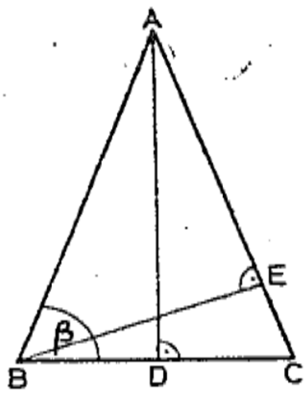
Mivel $a>4$, ezért $\cos\alpha>0$, azaz α valóban hegyesszög.

b) Mivel a háromszög hegyesszögű, ezért az a hosszúságú oldalra húzott m magasság az a oldalt belső pontban metszi. Legyen az a oldalnak az $a-1$ oldal melletti szelete x, a másik y, így $x+y=a$. A keletkezett két derékszögű háromszögből

$$x^2+m^2=(a-1)^2, \text{ illetve } y^2+m^2=(a+1)^2$$
$$y^2-x^2=(a+1)^2-(a-1)^2=4a,$$
$$(y-x)(y+x)=4a.$$

Mivel $x+y=a$, ezért a két szelet különbsége valóban 4, hiszen $y-x=4$.

6. Az ABC egyenlő szárú, hegyesszögű háromszöget az AC szár körül forgatva olyan forgástestet kapunk, amely két egybeeső alapkörű forgáskúpból áll.



Ennek térfogata

$$V_1 = \frac{BE^2\pi(AE+EC)}{3} = \frac{\pi}{3}BE^2\cdot AC.$$

A háromszöget a BC alap körül forgatva két egybevágó forgáskúpból összetett forgástestet kapunk, ennek térfogata

$$V_2 = \frac{AD^2\pi(BD+DC)}{3} = \frac{\pi}{3}AD^2\cdot BC.$$

Az ABC háromszög területének kétszerese egyrészt $BC \cdot AD$, másrészt $AC \cdot BE$, így $BC \cdot AD = AC \cdot BE$, azaz

$$\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}.$$

Ezt alkalmazva

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{BE^2 \cdot AC}{AD^2 \cdot BC} = \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}.$$

A feltételt és az előzőt felhasználva,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}.$$

Legyen az ABC szög β. $\cos \beta = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{AC} =$ $= \frac{1}{5}$, $\beta = 78° \, 28'$. A BAC szög így $23° \, 04'$.

7. Legyen a nagyobbik szám x, a kisebbik szám y. Ekkor $x - y = k > 0$ és $x > y > 0$. A feltétel szerint $4x + 3y = 91$. Mivel $x = y + k$, ezért

$$7y + 4k = 91,$$
$$y = 13 - \frac{4k}{7}.$$

Mivel y pozitív egész szám, ezért egyrészt $13 - \frac{4k}{7} > 0$, azaz $k \leqq 22$, másrészt $\frac{4k}{7}$ egész szám, tehát k osztható 7-tel, azaz $k = 7, 14, 21$ lehet. Ha $k = 7$, akkor $x = 16$, $y = 9$, ha $k = 14$, akkor $x = 19$, $y = 5$, ha $k = 21$, akkor $x = 22$, $y = 1$.

8. Legyen $\frac{\pi}{2} \lg x = y$. Ekkor

$$\sin 2y = \cos y,$$
$$2 \sin y \cos y - \cos y = 0,$$
$$(2 \sin y - 1) \cos y = 0.$$

Ha $\cos y = 0$, akkor $y = \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Most $\frac{\pi}{2} \lg x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\lg x = 1 + 2k$, $x = 10^{1+2k}$.

Ha $\sin y = \frac{1}{2}$, akkor $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, vagy $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $\lg x = \frac{1}{3} + 4k$, $x = 10^{\frac{1}{3}+4k}$ vagy $\lg x = \frac{5}{3} + 4k$, $x = 10^{\frac{5}{3}+4k}$. A kapott három gyöksorozat valóban kielégíti az egyenletet.

Megjegyzés. A $\sin 2y = \cos y$ egyenletet más módokon is megoldhatjuk. Egy lehetőséget mutatunk. Mivel $\sin 2y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)$ így $\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)$.

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha vagy $y = \frac{\pi}{2} - 2y + 2n\pi$ vagy $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) + 2n\pi$. Most is az előzőekben meghatározott gyököket kapjuk más alakban. Oldja meg az egyenletet a $\sin 2y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ alak felhasználásával is!

M. II.

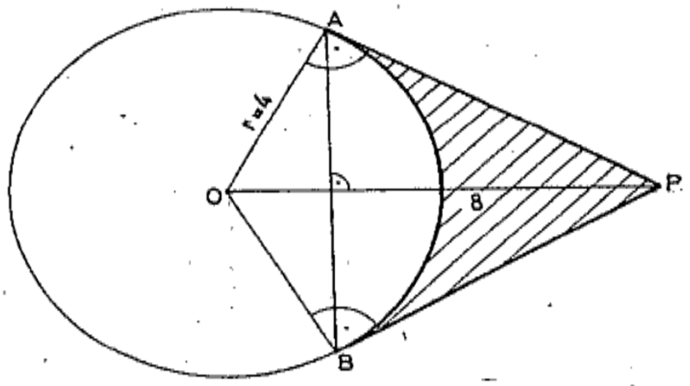
1. Az egyenletrendszer helyettesítő módszerrel megoldható. A megoldások: $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{2}{3}$ vagy $x_2 = -\frac{2}{3}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$.

2. Az OAP derékszögű háromszög átfogója $OP = 8$ egység, az OA befogó 4 egység, így az OPA szög $30°$. Szimmetria okokból az OPB szög is $30°$. Az APB szög tehát $60°$. Az OAP háromszög AP befogója $4\sqrt{3}$ egység. Az ABP háromszög egyenlő oldalú, ezért $AB = 4\sqrt{3}$ egység.

Az OAP és OBP háromszögek területének összege $16\sqrt{3}$ területegység. A kisebb OBA körcikk középponti szöge $120°$, így a körcikk területe az $r = 4$

egység sugarú kör területének harmada, $\frac{16\pi}{3}$ területegység. A keresett terület

$$t = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \text{ területegység.}$$



3. Legyen az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = b = 20$ egység, $BC = a = 24$ egység, a háromszög köré írható kör sugara R. Tudjuk, hogy $a = 2R \sin \alpha$ és $b = 2R \sin \beta$, azaz most $\sin\alpha = \frac{4}{5}$,

$\alpha = 53°\ 08'$, $\sin \beta = \frac{2}{3}$, $\beta = 41°\ 49'$, így a háromszög harmadik szöge $\gamma = 85°\ 03'$, A háromszög harmadik oldala $c = 2R \sin \gamma = 29{,}9$ egység.

4. A kifejezésnek ott nincs értelme, ahol a nevezője nulla. A kifejezés az $x \neq 3$ és $x \neq -5$ feltételeket kielégítő valós számokra értelmezhető.

b) A kifejezésnek akkor nincs értelme, ha $x = 0$ *vagy* ha $\sin\frac{\pi}{x} = 0$. Ez utóbbi teljesül, ha $\frac{\pi}{x} = k\pi$,

azaz $x = \frac{1}{k}$, ahol k nullától különböző tetszőleges egész szám. Ezeken kívül a kifejezés minden valós x-re értelmezhető.

c) A gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív. Az állítás egyenértékű a következővel: $(x+3)(x-2) \geqq 0$ *és* $x \neq 2$. A kifejezés $x \leqq -3$ vagy $x > 2$ valós számokra értelmezhető.

5. Jelölje q a mértani sorozat hányadosát! A feltétel szerint minden $n \geqq 0$ egész számra

$2q^n = q^{n+1} + q^{n+2}$. Mivel $q \neq 0$, ezért
$$q^2 + q - 2 = 0, \; q_1 = 1, \; q_2 = -2.$$

A feladat feltételeit kieglégítő mértani sorozatok az $a_1 = 1$, $q = 1$ és $a_2 = 1$, $q = -2$ adatokkal meghatározottak.

6. Egy $P(x;y)$ pont akkor és csakis akkor van rajta a mértani helyen, ha

$$(x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y-6)^2 = k^2,$$

azaz

$$x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{3}(k^2 - 32).$$

Ha $k^2 > 32$, azaz $|k| > 4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely $(0;2)$ középpontú, $\sqrt{\dfrac{k^2-32}{3}}$ sugarú körvonal. Ha $|k| = 4\sqrt{2}$, akkor egyetlen pont, a $(0;2)$ elégíti ki a feltételt.

Ha $|k| < 4\sqrt{2}$, akkor egyetlen $(x;y)$ számpár sem elégíti ki a feltételt, azaz a keresett mértani hely *üres* alakzat.

7. Az egyenletet hozzuk

$$\sin 2x - \cos 2x = \sin x - \cos x$$

alakra, majd emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor az

$$1 - 2 \sin 2x \cos 2x = 1 - 2 \sin x \cos x$$

egyenlethez jutunk, amely következménye az adott egyenletnek, azaz olyan gyököket is tartalmazhat, amelyek az adott egyenletnek nem gyökei. Ez utóbbi egyenletet redukáljuk nullára és alakítsunk szorzattá:

$$(1 - 2 \cos 2x) \sin 2x = 0.$$

Ebből vagy $1 - 2 \cos 2x = 0$, $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ vagy $\sin 2x = 0$, $x = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Vegyük figyelembe, hogy az adott egyenletben szereplő minden függvény 2π szerint periodikus, és ennél kisebb közös (pozitív) peródusuk nincsen. Így a próba során elegendő a $[0;2\pi)$ intervallumba eső gyököket ellenőrizni. Az első esetben a $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ értékeket, míg a második esetben a 0, $\frac{\pi}{2}$, π és $\frac{3\pi}{2}$ értékeket kell kipróbálni. Ezek közül megoldásnak a következők adódnak: $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{2}$.

Az egyenlet megoldásai a következők:

$$x = 2t\pi,\quad x = \frac{\pi}{2} + 2p\pi,\quad x = \frac{7\pi}{6} + 2q\pi,$$

$x = \frac{11\pi}{6} + 2r\pi$, ahol t, p, q, r egymástól függetlenül bármely egész számot felvehet.

Megjegyzés. Az egyenlet ekvivalens átalakításokkal is megoldható. A függvénytáblázatban található következő (középiskolában nem tanított) azonosságokat érdemes alkalmazni, majd nullára redukálás után szorzattá alakítani:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Gondolatban legyen most $\alpha = 2x$, $\beta = x$. Ekkor

$$2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = -2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2},$$

$$2\left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = 0.$$

Ha $\sin\frac{x}{2} = 0$, akkor $\frac{x}{2} = k\pi$, $x = 2k\pi$, ha $\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} = 0$, akkor $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = -1$, $\frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}$.

Az előző megoldással megegyező gyököket kaptuk, de más alakban jelentkeztek a gyökök. Ez különböző módszerekkel megoldott trigonometrikus egyenleteknél előfordulhat.

8. A logaritmusfüggvény meghatározása alapján $a>0$, $a\neq 1$, $p>0$, $q>0$. Mivel

$$\log_a(p+q) = \log_a pq,$$

azért

$$p+q = pq. \qquad (1)$$

Az (1) egyenlet pozitív egész megoldásait keressük. Az (1) egyenletet a

$$(p-1)(q-1) = 1$$

alakra hozhatjuk, amiből *vagy* $p-1 = 1$ *és* $q-1 = 1$ azaz $p = 2$ *és* $q = 2$, és ez a számpár kielégíti az adott egyenletet; *vagy* $p-1 = -1$ *és* $q-1 = -1$, azaz $p = 0$ *és* $q = 0$, ami nem felel meg. Az eredeti egyenlőséget tehát csak a $p = 2$, $q = 2$ számpár elégíti ki.

Megjegyzés. Az (1) egyenletből

$$p = \frac{q}{q-1}.$$

Mivel p pozitív egész, q és $q-1$ szomszédos egész számok, így relatív primek, ezért $q-1 = 1$, azaz $q = 2$ és így $p = 2$.

M. III.

1. Az egyenlet $x = 2$ és $x = -2$-nél nem értelmezett. Az $x^2-5x+6 = 0$ egyenlet következménye az adott egyenletnek, így az egyetlen megoldás $x = 3$.

2. Legyen q a sorozat hányadosa. Ekkor $8q^{20} = 1$, $q = \pm 0{,}9012$. A sorozat második eleme $a_2 = 8q = 7{,}2096$ vagy $a_2 = -7{,}2096$.

3. $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{1-2\sin^2 x}$. Ha $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, akkor $\cos x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ vagy $\cos x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Így $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{3}{4}$ vagy $\operatorname{tg} 2x = -\dfrac{3}{4}$.

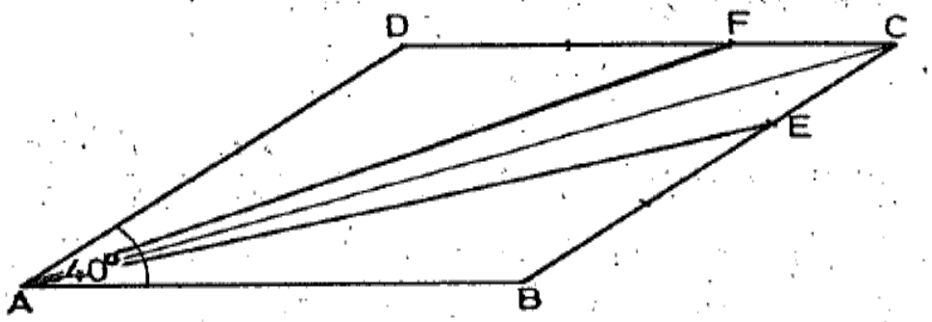
4. a) Mivel $\sqrt{x+2} \geq 0$, ezért nincs gyöke az egyenletnek.

b) Az egyenlet ekvivalens az $x^2-3x = 0$ egyenlettel. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 0$ vagy $x_2 = 3$.

c) Az értelmezés alapján $x > 0$ *és* $\sin\sqrt{x} = 1$, azaz $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Az egyenlet megoldásai $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2$.

5. A rombuszt az átlója két egybevágó, így egyenlő területű részre osztja. Hogy a rombusz kívánt felosztását megkapjuk, az egyes részháromszögeket kell a közös hegyesszögű csúcsból induló egyenessel 2 : 1 arányban felosztani. Ha egy háromszög egyik oldalát 2 : 1 arányban felosztjuk és az osztáspontot a a szemköztes csúccsal összekötjük, akkor a két részháromszög területének aránya 2 : 1, hiszen az alapok aránya 2 : 1, a közös alapegyeneshez tartozó magasság pedig megegyezik.



Legyen E ill. F az $ABCD$ rombusz BC ill. CD oldalának C-hez közelebb eső harmadoló pontja. A $BAD\sphericalangle = 40°$. Az $AE = AF$ szakaszok három egyenlő területű részre vágják a rombuszt.

A rombusz területének harmadrésze

$\frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \sin 40° = 30{,}85$ területegység.

Az ABE háromszögből cosinustétel alkalmazásával $AE^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 140° = 208 + 192 \cdot \cos 40° = 355{,}1$. A szelőknek a rombuszba eső darabjának hossza $AE = AF = 18{,}84$ egység.

6. a) $1 - x^2 \geqq 0$ *és* $1 - x^2 \neq 0$, azaz $1 - x^2 > 0$. A kifejezés tehát a $-1 < x < 1$ számokra értelmezhető.

b) $x^2 - x - 6 > 0$ *és* $4 - x^2 > 0$, azaz $x < -2$ *vagy* $x > 3$, *és* $-2 < x < 2$, a kifejezés tehát egyetlen számra sem értelmezhető.

c) A tangens függvény a $\frac{\pi}{2} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyeken nem értelmezett, így $\pi \sin x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, azaz $\sin x \neq \frac{1}{2} + k$. Mivel $-1 \leqq \sin x \leqq 1$, ezért csak a $k = 0$ és a $k = -1$ értéket kell figyelembe venni. Tehát $\sin x \neq \frac{1}{2}$ vagy $\sin x \neq -\frac{1}{2}$.

A kifejezés az $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ kivételével minden számra értelmezhető.

7. Az egyenes egyenletében a és b nem lehet egyszerre nulla, mert az egyenlet akkor nem egyenes egyenlete. Az a és a b paraméterek értékét úgy kell meghatározni, hogy az egyenes és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszernek csak egy megoldása legyen. Helyettesítő módszerrel az

$$ax^2 - (4a + b)x + 4b = 0 \tag{1}$$

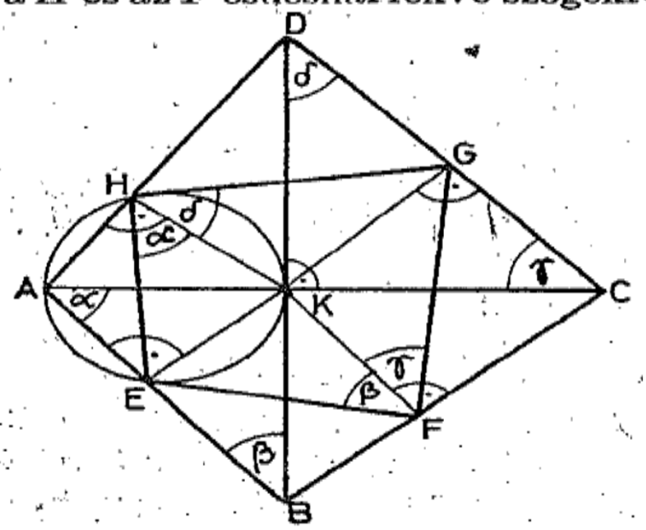
legfeljebb másodfokú egyenlethez jutunk. (Ha $a \neq 0$, úgy az egyenlet pontosan másodfokú.)

Ha $a = 0$, akkor $b \neq 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor $x = 4$, s így $y = 5$. Ebben az esetben az egyetlen közös pont az M (4;5). (Az egyenes egyenlete ekkor $x = 4$ alakban írható, így az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével, az egy közös pont tehát metszéspont.)

Ha $a \neq 0$, úgy a parabolának és az egyenesnek pontosan akkor van egy közös pontja (ez az érintési pont), ha az (1) egyenlet diszkriminánsa nulla.

Most $D = (4a + b)^2 - 16\ ab = (4a - b)^2$. $D = 0$ pontosan akkor, ha $4a - b = 0$, azaz $b = 4a$, ahol $a \neq 0$ tetszőleges valós szám. Az a és a b értéke egyértelműen nem volt meghatározható, az a és a b értéke összefügg, és így egyetlen, az $y - 4x + 11 = 0$ egyenletű egyenest határoznak meg.

8. Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát. Azt kell belátni, hogy az $EFGH$ négyszög húrnégyszög. Elegendő belátni, hogy a szemközti szögek összege 180°. Ezt a H és az F csúcsnál fekvő szögekről látjuk be:



Az $AEKH$ négyszög húrnégyszög, hiszen két szemközti szöge derékszög. Így a köré írt kör rövidebb EK ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlők, $EAK\sphericalangle = EHK\sphericalangle = \alpha$.

Hasonló módon a $BEFK$, $CFKG$, $DGKH$ húrnégyszögekből $EBK\sphericalangle = EFK\sphericalangle = \beta$; $KFG\sphericalangle = KCG\sphericalangle = \gamma$; $KDG\sphericalangle = KHG\sphericalangle = \delta$.

Az ABK derékszögű háromszög hegyésszögei α, β, így $\alpha+\beta = 90°$, a CDK derékszögű háromszög hegyesszögei γ, δ, így $\gamma+\delta = 90°$.

Az $EFGH$ négyszögben

$EHG\sphericalangle + EFG\sphericalangle = (\alpha+\delta)+(\beta+\gamma) = 180°$,

azaz a négyszög valóban húrnégyszög.

M. IV.

1. Legyen a négyzet oldala x. A téglalap oldalai ekkor $x-2$ és $x-1$. A területek közötti összefüggés alapján

$$(x-2)(x+1)+8 = x^2,$$

amiből $x = 6$, és ez valóban megoldás. A négyzet oldala 6 cm.

2. A keresett pontok rajta vannak az AB szakasz, mint átmérő fölé rajzolt körön. E kör középpontja $C(3;\, 3)$, sugara $r = 4$, így egyenlete

$$(x-3)^2+(y-3)^2 = 16.$$

Az x tengely egyenlete $y = 0$, a keresett pontok abszcisszájára az $(x-3)^2 = 7$ egyenletet kapjuk. A keresett pontok: $P_1(3+\sqrt{7}\,;\, 0)$ és $P_2(3-\sqrt{7}\,;\, 0)$.

Megjegyzés. Dolgozhatunk paraméteresen is. Legyen az x tengely futó pontja $P(t;\, 0)$. Olyan P pontot keresünk, amelyre az AP és a BP egyenesek egymásra merőlegesek, tehát iránytényezőjük szorzata -1. Mivel $m_1 = \dfrac{-3}{t+1}$, $m_2 = \dfrac{-3}{t-7}$, ezért

$\dfrac{9}{(t+1)(t-7)} = -1$, $t = 3\pm\sqrt{7}$. A merőlegesség feltételének kihasználásával vektorokkal is dolgozhatunk. Az $\overrightarrow{AP} = (t+1;\, -3)$ és a $\overrightarrow{BP} = (t-7;\, -3)$ vektorok merőlegesek egymásra, így $\overrightarrow{AP}$ párhuzamos $\overrightarrow{BP}$ $+90°$-os elforgatottjával, melynek koordinátái $(3;\, t-7)$, így

$$\frac{t+1}{3} = \frac{-3}{t-7}, \quad t = 3\pm\sqrt{7}.$$

3. $100^{\lg 5} = 10^{2\lg 5} = 10^{\lg 25} = 25$;

$$\sin\frac{34\pi}{3} = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 10\pi\right) = \sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{33}-\sqrt{32}} = \sqrt{66}+\sqrt{64} = \sqrt{66}+8 < 17;$$

$$81^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

A számok növekvő nagyságrendi sorrendben:

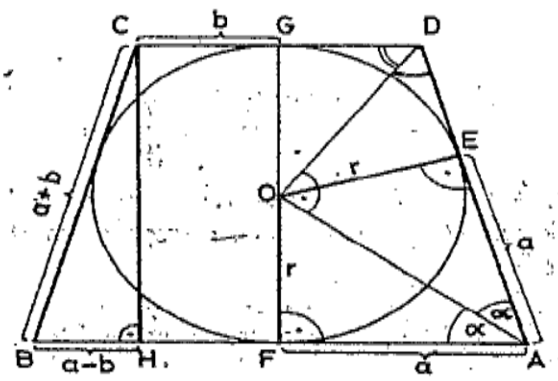
$$\sin\frac{34\pi}{3};\quad 81^{-\frac{3}{4}};\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{33}-\sqrt{32}};\quad 100^{\lg 5}.$$

4. Legyen a számtani sorozat első három eleme a, $a+d$, $a+2d$. A mértani sorozat harmadik eleme ekkor egyrészt $a+2d+1$, másrészt $a+3$, amiből $d=1$. A mértani sorozat első három eleme tehát a, $a+1$, $a+3$, így

$$(a+1)^2 = a(a+3),\text{ amiből } a = 1.$$

A számtani sorozat első öt eleme: 1, 2, 3, 4, 5. A mértani sorozat első öt eleme: 1, 2, 4, 8, 16. (Természetesen dolgozhatunk úgy is, hogy az a mellett a mértani sorozat hányadosát választjuk ismeretlennek.)

5. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz szimmetriatengelye az ábra jelölése szerint FG, $AF = FB = a$. A trapéz magassága $2r$.



Az érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AF = a$, $DE = DG$. Az AOD háromszög O-ban derékszögű, mivel a trapéz AD szárán fekvő szögek összege 180°, DO és AO e szögek szögfelezője. Az AD átfogójához tartozó magassága $OE = r$. Alkalmazzuk e derékszögű háromszögre a magasságtételt. $r^2 = DE \cdot EA$, amiből $DE = \frac{r^2}{a}$. A trapéz középvonalának hossza $a + \frac{r^2}{a}$, a trapéz területe $t = 2\left(ra + \frac{r^3}{a}\right)$.

Megjegyzés. 1. Legyen még $CG = GD = b$. Ekkor $CB = a+b$, $BH = a-b$, $CH = 2r$, így a BCH derékszögű háromszögben

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4r^2,$$

amiből

$$b = \frac{r^2}{a}.$$

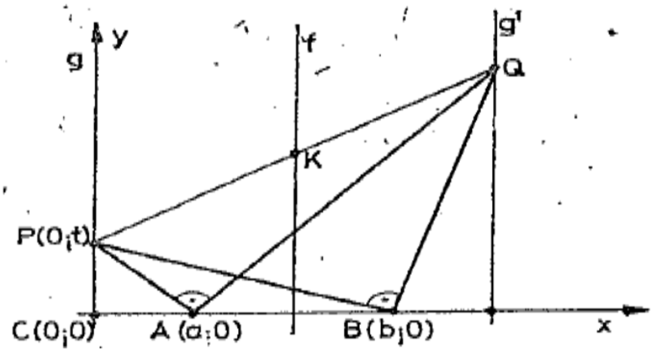
2. Gyakran alkalmazhatunk geometriai számítások folyamán trigonometriát is. Legyen az OAF szög α. Ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{a} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r}{a-b}, \text{ így } \frac{2r}{a-b} = \frac{2 \cdot \frac{r}{a}}{1 - \frac{r^2}{a^2}},$$

amiből $r^2 = ab$.

6. A második egyenlet négyszereséből vonjuk ki az első egyenletet. Ekkor a $19 \cdot 2^x = 19 \cdot 4$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x = 2$, s így $y = 3$. Az egyenletrendszernek ez valóban megoldása és csak ez a megoldás.

7. Helyezzük el az alakzatot koordináta-rendszerben úgy, hogy a g egyenes az y tengellyel essen egybe, a C pont essen az origóba, az A és a B pont az x tengelyre essen úgy, hogy $A(a;\ 0)$, $B(b;\ 0)$ és $0 < a < b$.



Legyen $P(0; t)$ a g egyenes egy tetszőleges, C-től különböző pontja, így $t \neq 0$.

A PA, illetve a PB egyenesre A-ban illetve B-ben állított merőlegesek metszéspontja legyen Q. Az AQ egyenes egyenlete

$$ax - ty = a^2,$$

a BQ egyenes egyenlete

$$bx - ty = b^2.$$

A Q pont koordinátái

$$x = a + b,$$

$$y = \frac{ab}{t},$$

ami azt jelenti, hogy Q rajta van az $x = a + b$ egyenletű egyenesen, de nem lehet az x tengely pontja, hiszen $y \neq 0$.

Legyen most Q és $x = a + b$ egyenletű egyenes tetszőleges olyan pontja, amely nincs az x tengelyen. Az AQ egyenesre A-ban állított merőleges a g egyenest egy P pontban metszi. Az előzőek alapján a B-ben PB-re emelt merőleges az $x = a + b$ egyenletű egyenesen, tehát a Q pontban metszi AQ-t, ezért Q valóban hozzátartozik a keresett mértani helyhez. A keresett mértani hely tehát az $x = a + b$ egyenletű egyenes, kivéve az x tengelyen levő pontját.

Megjegyzés. Nemcsak analitikusan dolgozhatunk. Az A és a B pont rajta van a PQ szakasz mint átmérő fölé szerkesztett körön. E kör K középpontja rajta van az AB szakasz f felező merőlegesén, így a Q pont rajta van g-nek az f-re vonatkozó g' tükörképén. Szimmetria okokból világos, hogy a g' tetszőleges (nem az AB egyenesen levő) Q pontjához tartozik a g egyenesen egy megfelelő P pont (mely nincs az AB egyenesen). A keresett mértani hely a g' egyenes, kivéve ennek az AB egyenesen levő pontját.

8. Hozzunk közös nevezőre és végezzünk azonos átalakítást.

$$\frac{(x^2 \sin\gamma - 2x + \sin\gamma)^2 - (x^2 - 2x\sin\gamma + 1)^2}{(x^2 - 2x\sin\gamma + 1)^2},$$

$$\frac{(\sin^2\gamma - 1)(x^2 - 1)^2}{(x^2 - 2x\sin\gamma + 1)^2}.$$

Mivel $\gamma \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ezért $-1 < \sin\gamma < 1$. A nevezőben álló $x^2 - 2x \sin\gamma + 1$ polinom diszkriminánsa, $4(\sin^2\gamma - 1)$, negatív, tehát a törtnek minden x-re értelme van, s a nevezője pozitív. A tört számlálójáról kell kimutatni, hogy nem-pozitív. Mivel $(\sin^2\gamma - 1)$ minden megengedett γ-ra negatív, $(x^2 - 1)^2$ pedig nem-negatív, ezért szorzatuk nem pozitív. A feltétel azt biztosította, hogy a függvény minden valós x-re értelmezhető.

Megjegyzés. Más módon is dolgozhatunk. Az igazolandó állítás

$$-1 \leqq \frac{x^2 \sin\gamma - 2x + \sin\gamma}{x^2 - 2x\sin\gamma + 1} \leqq 1$$

alakban is írható. A feltételből adódik, hogy a középen álló tört nevezője minden x-re pozitív. Így a következő egyenlőtlenségrendszert kell belátni:

$$-x^2 + 2x\sin\gamma - 1 \leqq x^2 \sin\gamma - 2x + \sin\gamma$$

és

$$x^2 \sin\gamma - 2x + \sin\gamma \leqq x^2 - 2x\sin\gamma + 1.$$

Mindkét egyenlőtlenség minden x-re fennáll. Az első egyenértékű a $0 \leqq (x-1)^2(1+\sin\gamma)$-val, a második pedig a $0 \leqq (x+1)^2(1-\sin\gamma)$-val. Az állítás a $-1 < \sin\gamma < 1$ egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló.

M. V.

1. $$\frac{x^2 - 9x + 14}{x-7} = 1; \quad \frac{(x-7)(x-2)}{x-7} = 1,$$

$$x = 3.$$

2. Egyenlő hosszú húrok a kör középpontjától egyenlő távol vannak. Legyen d a húrok távolsága a kör középpontjától. Ekkor $7 + d = \frac{17+7}{2}$, $d = 5$ egység. (Készítsen ábrát!) A P pont távolsága a kör középpontjától $d\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ egység. A kör sugara 13 egység.

3. a) $4-\sqrt{15}+2\sqrt{16-15}+4+\sqrt{15}=10.$

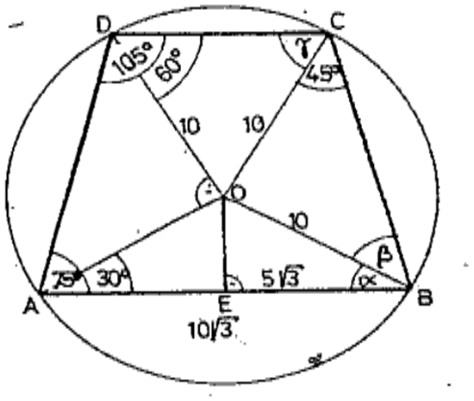
b) $5^{-\log_5 4}=5^{\log_5 \frac{1}{4}}=\frac{1}{4}.$

c) $\operatorname{tg} 75^\circ+\operatorname{ctg} 75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}+\frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ}=$

$$=\frac{2}{2\sin 75^\circ \cos 75^\circ}=\frac{2}{\sin 150^\circ}=4.$$

4. Tudjuk, hogy $\sqrt{9x^2}=3|x|$. Így ha $x\geq 0$, akkor $x^2+3x=16+3x$, $x_1=4$, ha $x<0$, akkor $x^2+3x=16-3x$, $x_2=-8$.

5. Az OEB derékszögű háromszögből $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha=30^\circ$, így $\beta=45^\circ$. A BOC egyenlő szárú háromszög derékszögű. A COD egyenlő szárú háromszögben $\gamma=105^\circ-45^\circ=60^\circ$, így a háromszög egyenlő oldalú. Ezekből $BC=10\sqrt{2}$ cm, $CD=10$ cm.



A trapéz területe egy 10 cm oldalú négyzet és két 10 cm oldalú szabályos háromszög területének összege.

$$T=(100+50\sqrt{3})\ \text{cm}^2.$$

6. Írjuk fel az adott egyenessel párhuzamos azon egyenes egyenletét, amely érinti a parabolát. Világos, hogy az érintési pont van legközelebb az adott egyeneshez. Az érintési pont és az adott egyenes távolsága a keresett távolság. Az érintő egyenletét $y=2x+b$ alakban keressük. Ez pontosan akkor érinti a parabolát, ha a $2(2x+b)=x^2$ egyenlet diszkriminánsa ($D=16+8b$) nulla, azaz $b=-2$.

Az érintési pont: E(2; 2). A keresett távolság: $\frac{2}{\sqrt{5}}$ egység.

7. Az n oldalú szabályos sokszög köré írt kör sugara r, oldala a_n, az oldalhoz tartozó középponti szög $\frac{2\pi}{n}$, a kerület k_n, a terület t_n.

$$a_n = 2r \sin\frac{\pi}{n}, \quad k_n = n \cdot 2r \sin\frac{\pi}{n},$$

$$t_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}.$$

A $2n$ oldalú szabályos sokszög köré írt kör sugara R, oldala a_{2n}, az oldalhoz tartozó középponti szög $\frac{2\pi}{2n}$, a kerület k_{2n}, a terület t_{2n}.

$$a_{2n} = 2R \sin\frac{\pi}{2n}, \quad k_{2n} = 2n \cdot 2R \sin\frac{\pi}{2n},$$

$$t_{2n} = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot R^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n}.$$

A feltétel szerint $k_n = k_{2n}$, így

$$n \cdot 2r \sin\frac{\pi}{n} = 2n \cdot 2R \cdot \sin\frac{\pi}{2n}. \text{ Mivel } \sin\frac{\pi}{n} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{\pi}{2n}, \text{ ezért } r \cdot \cos\frac{\pi}{2n} = R.$$

A területek aránya

$$\frac{t_n}{t_{2n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot R^2 \sin\frac{\pi}{n}} =$$

$$= \frac{r^2}{r^2 \cos^2\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2\sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}.$$

8. Adjuk össze a feladatban szereplő páros pozitív számokat:

$$2k+(2k+2)+\ldots+2m=\frac{2k+2m}{2}\cdot(m-k+1),$$

tehát

$$(m+k)(m-k+1)=2552.$$

Mivel $m+k-(m-k+1)=2k-1$, azaz a különbség páratlan szám, ezért az egyik tényező páros, a másik páratlan, továbbá $m+k>m-k+1\geqq 2$. Ezt felhasználva bontsuk fel az összes lehetséges módon 2552-t két tényező szorzatára. Ez a feltételeknek megfelelően háromféle módon lehetséges:

$$2552=8\cdot 11\cdot 29=8\cdot 319=11\cdot 232=29\cdot 88.$$

Ha $m+k=319$, és $m-k+1=8$, akkor $m=163$, $k=156$; ha $m+k=232$ és $m-k+1=11$, akkor $m=121$, $k=111$; ha $m+k=88$ és $m-k+1=29$, akkor $m=58$, $k=30$. Így megállapítottuk k és m lehetséges értékeit.

M. VI.

1. Az egyenletrendszer következménye a

$$2x-5y=1,$$
$$x-2y=1$$

egyenletrendszer. Ennek megoldása: $x=3$, $y=1$. Ez az eredetinek is megoldása.

2. $a_1=-5$, $a_6=a_1\cdot q^5=1215$, $q^5=-243$, $q=-3$. A beiktatott számok: 15, -45, 135, -405.

3. Jelölje γ a C csúcsnál levő szöget. A sinustétel szerint $\frac{\sin\gamma}{\sin 30^\circ}=\frac{10}{8}$, amiből $\sin\gamma=0{,}625$. $\gamma_1=38^\circ 41'$, $\gamma_2=141^\circ 19'$. A feltételeknek két háromszög is megfelel. (A háromszögben két oldal és a *kisebbikkel* szemközti szög volt adott!) Az ABC_1 háromszög B-nél levő szöge $111^\circ 19'$, az AC_1 oldala 14,9 egység. Az ABC_2 háromszög B-nél levő szöge $8^\circ 41'$, az AC_2 oldala 2,4 egység.

4. a) $3x+112=100$, $x=-4$.

b) Mivel $x-1\geqq 0$, *és* az egyenletnek csak olyan gyöke lehet, amelyre $1-x\geqq 0$, ezért az egyenlet egyetlen gyöke $x=1$.

c) Az egyenlet $4\sin^2 x\cos^2 x=4$, azaz $\sin^2 2x=4$ alakra hozható, amiből látszik, hogy nincs megoldás.

5. Készítsen ábrát! A keresett kör egy átmérőjének két végpontja az origón átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenesnek (egyenlete $4x-3y=0$) az eredeti egyenessel való $B(9;\ 12)$ metszéspontja, valamint az adott körrel való $A(3;\ 4)$ metszéspontja. Az AB átmérőjű kör középpontja $K(6;\ 8)$, sugara 5, így egyenlete:

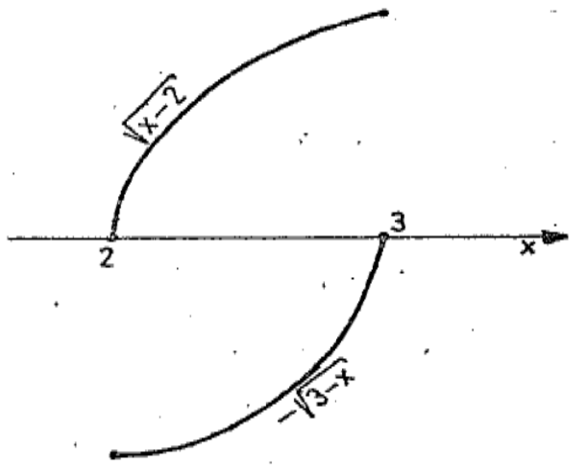
$$(x-6)^2+(y-8)^2=25.$$

6. $\sin^2\alpha \neq \cos^2\alpha$, $\sin\alpha \neq \cos\alpha$ vagy $\sin\alpha \neq -\cos\alpha$, azaz $\alpha \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ vagy $\alpha \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(4k\pm 1)$, ami $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$ alakban is írható. Ezzel a $\operatorname{tg}\alpha=1$ esetet is kizártuk. Ahhoz, hogy a $\operatorname{tg}\alpha$ is értelmezve legyen, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+m\pi$ is kell, hogy teljesüljön. Minden más α szögre a két kifejezés azonos, hiszen

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

7. a) $x-2\geqq 0$ *és* $3-x\geqq 0$, azaz $x\geqq 2$ és $3\geqq x$. A kifejezés tehát a $2\leqq x\leqq 3$ számokra értelmezhető. Vázoljuk a $\sqrt{x-2}$ és a $-\sqrt{3-x}$ függvény grafikonját a $[2;\ 3]$ intervallumban. Mindkét függvény folytonos és szigorúan monoton növekedő, így a legkisebb értékét az $x=2$ helyen veszi fel, ez az érték -1, a legnagyobb értékét az $x=3$ helyen veszi fel, ez az érték 1. A kifejezés tehát minden olyan y értéket felvesz, amelyre $-1\leqq y\leqq 1$, és csak ezeket az értékeket veszi fel.



b) $\lg \sin x \geqq 0$ kell, hogy teljesüljön. Mivel $\sin x \leqq 1$, ezért minden megengedett x értékre $\lg \sin x \leqq 0$, így csak $\lg \sin x = 0$ lehetséges. Ebből $\sin x = 1$,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

ahol k tetszőleges egész szám. A kifejezés egyetlen számértéket vesz fel, ez a 0.

8. Az egyenletrendszernek csak olyan számpár lehet gyöke, amelyre $x > 0$, $y > 0$.

Mivel $3^{\log_3 y} = y$, ezért $\log_5 x = 2 - y$, azaz $5^{2-y} = x$. Helyettesítsük ezt az első egyenletbe:

$$5^{(2-y)y} = 5^{-3},$$

amiből $y_1 = 3$, $y_2 = -1 < 0$, ezért csak y_1 jöhet számításba. Ha $y = 3$, akkor $x = \frac{1}{5}$, s ez az egyetlen megoldás.

M. VII.

1. Az egyenlet ekvivalens a $3x^2 - 4x = 0$ egyenlettel. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

2. Az A pontból az adott egyenesre bocsátott merőleges egyenes egyenlete: $4x + 3y = 37$. A két egyenes metszéspontja: $M(4; 7)$, $AM = 10$ egység.

3. Tegyük fel, hogy léteznek ilyen sorozatok. A számtani szorozat három eleme legyen $a-d$; a; $a+d$. Az első mértani sorozat három eleme: $a-d+1$; a; $a+d$. A második mértani sorozat három eleme: $a-d$; a; $a+d+3$. A mértani sorozat tulajdonsága alapján

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= (a+d)(a-d+1) \\ a^2 &= (a+d+3)(a-d) \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $a_1 = 6$, $d_1 = 3$ vagy $a_2 = 0$, $d_2 = 0$. Az első esetben az első mértani sorozat elemei 4, 6, 9, a hányados $q = \frac{3}{2}$, a második mértani sorozat elemei 3, 6, 12, a hányados $q = 2$. A második esetben nincs megoldás, hiszen ha lenne, akkor a második mértani sorozat három egymás utáni eleme 0, 0, 3, s ilyen mértani sorozat nincs.

4. a) $x^4 + x^2 - 1 = 1$, amiből $x^2 = 1$ vagy $x^2 = -2$. Mivel $x^2 > 0$, ezért $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

b) Mivel $5^{\sqrt{x}} \geqq 1$ és $-x^2 \leqq 0$, ezért az egyenletnek nincs valós gyöke.

c) $\lg(1-x) = 1$ vagy $\lg(1-x) = -1$. Az elsőből $1-x = 10$, $x_1 = -9$, a másodikból $1-x = \frac{1}{10}$, $x_2 = \frac{9}{10}$.

5. Az adott egyenletnek nincs értelme, ha

$$\cos\alpha = 0, \quad \text{azaz} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\sin\alpha = 0, \quad \text{azaz} \quad \alpha = n\pi,$$

$$\cos 2\alpha = -1, \quad \text{azaz} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k_1\pi,$$

$$\cos 2\alpha = 1, \quad \text{azaz} \quad \alpha = n_1\pi,$$

ahol k, n, k_1, n_1 tetszőleges egész számok. Az egyenlet tehát $\alpha = k\cdot\frac{\pi}{2}$ kivételével minden α szögre értelmezett. Azt, hogy valóban azonosság, úgy láthatjuk be, hogy az egyenlet egyik oldalán álló kifejezést addig alakítjuk át azonosan, amíg a másik oldalon álló kifejezést nem kapjuk:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = -\frac{4\cos 2\alpha}{4\cos^2\alpha\sin^2\alpha} =$$

$$= -\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{4\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - 1}.$$

6. a) Mivel $1-x \geqq 0$ és $x \geqq 0$, ezért a $0 \leqq x \leqq 1$ számokra értelmezhető a kifejezés.

b) Nincs értelmezve, ha a gyök alatti kifejezés nincs értelmezve vagy negatív értékű. $\operatorname{tg} x$ nincs értelmezve, ha $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$, a $\operatorname{ctg} x$ nincs értelmezve, ha $x = k\pi$. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ pontosan akkor negatív, ha $\operatorname{tg} x$ negatív. A kifejezés tehát az $n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ számokra értelmezhető, ahol n tetszőleges egész szám.

c) $\frac{x+1}{x} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{x+1}{x}\cdot x^2 > 0$ és $x \neq 0$, azaz $x(x+1) > 0$, ami $x < -1$ vagy $x > 0$ esetén teljesül.

7. Ha $2\cos\alpha - 1 = 0$, azaz $\alpha = \frac{\pi}{3}$, akkor az egyenlet $-4x + 4 = 0$, $x = 1$, tehát a gyök pozitív.

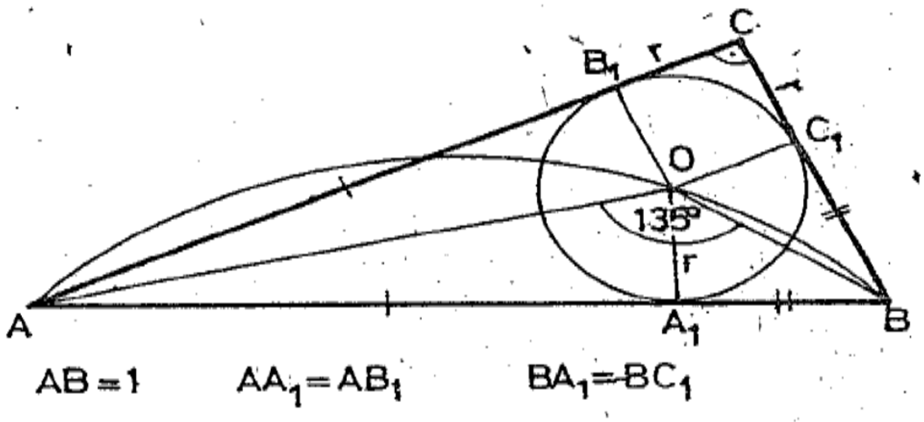
Ha $2\cos\alpha - 1 \neq 0$, akkor az egyenlet pontosan másodfokú. A gyökök akkor és csak akkor valósak, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív.

$D = 16 - 4(2\cos\alpha - 1)(4\cos\alpha + 2) \geqq 0$, amiből $\cos^2\alpha \leqq \frac{3}{4}$. A feltétel alkalmazásával $0 < \cos\alpha \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz $\frac{\pi}{6} \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ha $\alpha = \frac{\pi}{6}$, akkor két egyenlő gyöke van az egyenletnek ($x_1 = x_2 = \sqrt{3} + 1$). A gyökök előjelét a gyökök és az együtthatók közötti összefüggések alapján állapíthatjuk meg. A két gyök szorzata: $\frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1}$. A számláló az α minden szóba jövő értékére $\left(\frac{\pi}{6} \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ pozitív. A nevező pozitív, ha $\frac{1}{2} < \cos\alpha \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$, negatív, ha $0 < \cos\alpha < \frac{1}{2}$. A két gyök egyező előjelű tehát, ha $\frac{\pi}{6} \leqq \alpha < \frac{\pi}{3}$, s ekkor mindkét gyök pozitív, mert összegük $\frac{4}{2\cos\alpha - 1} > 0$.

A két gyök különböző előjelű, ha $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

8. Legyen a beírt kör sugara r. Az érintőszakaszok egyenlősége miatt a derékszögű háromszög kerülete: $k = 2 + 2r$. A keresett arány: $\frac{k}{r} = 2\left(1 + \frac{1}{r}\right)$.

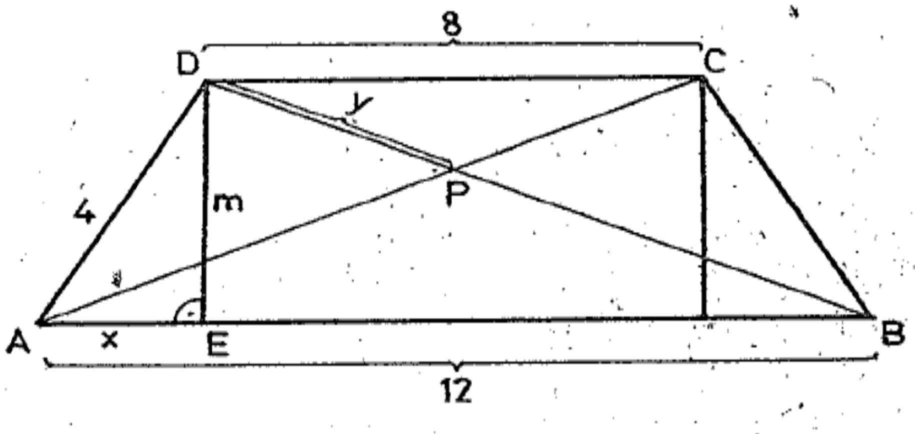
Az AOB szög 135°-os, hiszen AO és OB a hegyesszögek szögfelezői, ami szerint az OAA_1 és az OBA_1 szögek összege 45°. Vizsgáljuk tehát az olyan AOB háromszögeket, amelyekben $AB = 1$, és az O csúcspontnál 135°-os szög van. A $\frac{k}{r} = \frac{k}{OA_1}$ pontosan akkor lesz a legkisebb, ha az ABO háromszög AB oldalához tartozó OA_1 magasság a legnagyobb. Mivel az ABO háromszögek O csúcsai egy, az A és B pontokon átmenő köríven fekszenek, OA_1 akkor lesz a lehető legnagyobb, amikor az ABO háromszög egyenlő szárú ($AO = OB$). Ekkor az OAA_1 szög és az OBA_1 szög 22,5°-os, s így a CAB szög, valamint a CBA szög is 45°-os, $AC = CB$.



A $\frac{k}{r}$ arány tehát akkor lesz a lehető legkisebb, ha az ABC háromszög egyenlő szárú.

M. VIII.

1. $AE = x = 2$. A trapéz magassága $m = 2\sqrt{3}$ cm, hiszen $m^2 = 4^2 - 2^2$. A trapéz területe



$t = 20\sqrt{3}$ cm². A trapéz átlója $BD = \sqrt{112}$ cm. Az ABP és a CDP háromszögek hasonlók, így ha $DP = y$, akkor $y:8 = (\sqrt{112} - y):12$, amiből az átlók metszéspontjának a 8 cm-es oldal végpontjaitól való távolsága $y = 1{,}6\sqrt{7}$ cm.

2. a) Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = 1$ vagy $\sin x = -1$, így ezek az x-ek nem megoldásai az egyenletnek. Legyen $\cos x \neq 0$, ekkor $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = 1$ vagy $\operatorname{tg} x = -1$. Az egyenlet gyökei:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

b) $2^{2x} = 2^5$ akkor és csak akkor, ha $2x = 5$, $x = 2{,}5$.

c) Az egyenletben szereplő függvényeknek csak akkor van értelme, ha $x > -3$ *és* $x > -9$, azaz ha $x > -3$. Ekkor $\lg (x+3)^2 = \lg (x+9)$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $(x+3)^2 = (x+9)$. $x_1 = 0$, $x_2 = -5$. A feltétel miatt az egyenlet egyetlen gyöke $x = 0$.

3. A keresett egyenes átmegy A-n és érinti az origó középpontú, 10 egység sugarú kört. Kövessük a lehetséges szerkesztés lépéseit számolással! Az E_1 illetve E_2 érintési pontok rajta vannak az $x^2+y^2 = 100$ egyenletű körön, valamint az OA átmérőjű körön, amelynek egyenlete $(x-7)^2+(y+1)^2 = 50$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása $x_1 = 8$, $y_1 = 6$; $x_2 = 6$, $y_2 = -8$, így $E_1(8;\ 6)$, $E_2(6;\ -8)$. A feltételnek két egyenes felel meg, az AE_1 egyenes egyenlete $4x+3y = 50$, az AE_2 egyenes egyenlete $3x-4y = 50$.

Dolgozhatunk paraméteresen is. Az A ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete $y+2 = m(x-14)$, ez érinti az $x^2+y^2 = 100$ egyenletű kört, tehát az egyenletek által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla ($12m^2+7m-12 = 0$,

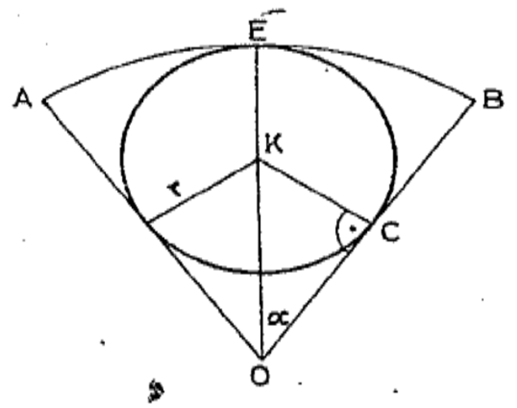
$$m_1 = -\frac{4}{3},\ m_2 = \frac{3}{4}\Big).$$

Dolgozhatunk vektorokkal is! Mivel $OA = 10\sqrt{2}$, ezért OE_1AE_2 négyzet; az átlók metszéspontja $K(7;-1)$. $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KE_1}$, ahol $\overrightarrow{OK} = (7;-1)$, s ennek pozitív irányú $90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{KE_1} = (1;\ 7)$, így $\overrightarrow{OE_1} = (7;-1)+(1;\ 7) = (8;\ 6)$, $E_1(8;\ 6)$. Hasonlóan $\overrightarrow{OE_2} = (7;-1)+(-1,\ -7) = (6;-8)$, $E_2(6;-8)$.

4. Az első egyenlet gyökei $3-\sqrt{9-c}$; $3+\sqrt{9-c}$, a másodiké 8; 16. Mivel $3+\sqrt{9-c} > 0$, ezért a mértani sorozat négy tagja közül három biztosan pozitív, így a negyedik is az, tehát $3-\sqrt{9-c} > 0$, azaz $\sqrt{9-c} < 3$, $3+\sqrt{9-c} < 6$. Ezek szerint az első egyenlet gyökei kisebbek a második egyenlet gyökeinél, a négy elem növekvő sorrendben: $3-\sqrt{9-c}$, $3+\sqrt{9-c}$, 8, 16. Így a sorozat hányadosa 2, és $(3+\sqrt{9-c})\cdot 16 = 8^2$, amiből $c = 8$. Ekkor az első egyenlet gyökei 2; 4, azaz $c = 8$ valóban megoldás.

5. Ha $R > r$ és $0 < 2\alpha < 180°$, akkor az alakzat egyértelműen megszerkeszthető. (Hogyan?) $OE = R$, $EK = KC = r$. Mivel egyrészt $KO = R-r$,

másrészt $KO = \frac{r}{\sin\alpha}$, ezért $R-r = \frac{r}{\sin\alpha}$, $r = R\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.



6. Az egyenlő együtthatók módszerével kapjuk, hogy $(4+3a)x = 2+ab$ és $(4+3a)y = 3-2b$. Ha $a \neq -\frac{4}{3}$, akkor van megoldás, egy megoldás van, a megoldás $x = \frac{2+ab}{4+3a}$, $y = \frac{3-2b}{4+3a}$. Ha $a = -\frac{4}{3}$, akkor az egyenletrendszer a következővel egyenértékű:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y &= \frac{3}{2} \\ 3x-2y &= b. \end{aligned}\right\}$$

Így ha $a = -\frac{4}{3}$ *és* $b \neq \frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás. Ha $a = -\frac{4}{3}$ *és* $b = \frac{3}{2}$, akkor minden olyan x, y számpár megoldás, amely kielégíti a $3x-2y = \frac{3}{2}$ egyenletet. A megoldások $x = 2t+\frac{1}{2}$, $y = 3t$ alakban írhatók, ahol t tetszőleges valós szám.

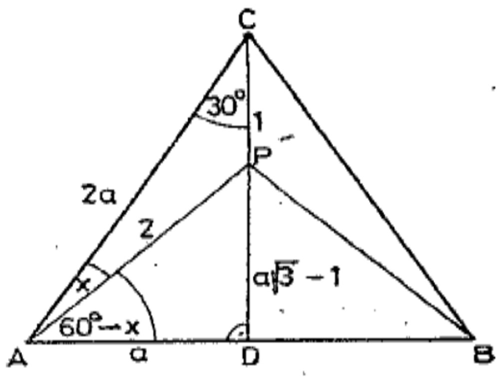
7. Az alakzat egyértelműen megszerkeszthető, így van egyértelmű megoldás. (Hogyan végezhetjük el a szerkesztést?) Jelölje $2a$ az egyenlő oldalú háromszög oldalának hosszát.

A háromszög területe ekkor $T = a^2\sqrt{3}$. Az APD derékszögű háromszögben $PD = a\sqrt{3} - 1$, így $(a\sqrt{3} - 1)^2 + a^2 = 4$. Ebből $a = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$ (a másik gyök negatív), $a^2 = \dfrac{9+3\sqrt{5}}{8}$, s így

$$T = \frac{\sqrt{3}}{8}(9 + 3\sqrt{5}).$$

Dolgozhatunk trigonometria alkalmazásával is. Az APC háromszögben ismert két oldal és a nagyobbikkal szemközti ACP szög, ami 30°. Így a sinustétel két egymás utáni alkalmazásával $\sin x = \dfrac{1}{4}$,

$a = 2\sin(x + 30°) = \dfrac{1}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$, mivel $\cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Vagy: $a = 2\cos(60° - x)$.



8. $2^{4y^2} = 2^{2+\sin^2 x}$, így $4y^2 = 2 + \sin^2 x$. Mivel $\sqrt{y} \geq 0$, ezért csak $\cos x \geq 0$. $y = \cos^2 x$, $1 - y = \sin^2 x$. Ezt a másik egyenletbe behelyettesítve és rendezve: $4y^2 + y - 3 = 0$. y nem lehet negatív, ezért $y = \dfrac{3}{4}$, így $\cos x \geq 0$ miatt $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

Az egyenletrendszert kielégítő számpárok

$$(x, y) = \left(\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3}{4}\right).$$

M. IX.

1. a) Alakítsuk át az egyenletet:

$$(x-1)^2(x+3)^2-(x-1)^2(x+2)^2=0,$$
$$(x-1)^2[(x+3)^2-(x+2)^2]=0,$$
$$(x-1)^2(2x+5)=0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=x_2=1$, $x_3=-2{,}5$.

b) Alakítsunk szorzattá:

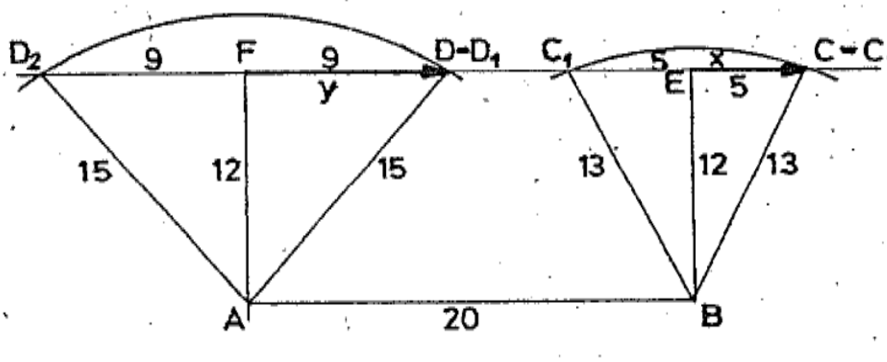
$$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(3-\sqrt{x})}=0.$$

Mivel $\sqrt{x}+1>0$, ezért az egyenletnek nincs gyöke.

c) Az egyenletnek nincs gyöke, hiszen ha $1+\cos 2x=0$, akkor $\cos x=0$. Ez a $\frac{2\cos^2 x}{\cos x}=0$ alakból jól látható.

2. A szerkesztés vizsgálata során kiderül, hogy négy megfelelő trapéz van. Legyen $EC=x$ és $FD=y$.

Ekkor $x^2=13^2-12^2=5^2$, $x=\pm 5$; $y^2=15^2-12^2=9^2$, $y=\pm 9$. Előjeles szakaszokat figyelembe véve $EC_2=5$, $EC_1=-5$, $FD_1=9$, $FD_2=-9$. A négy trapéz AB-vel párhuzamos oldala: $D_1C_1=20-(9+5)=6$ cm, $D_1C_2=20+5-9=16$ cm, $D_2C_1=9+20-5=24$ cm, $D_2C_2=9+20+5=34$ cm. A megfelelő trapézek területe: 156, 216, 264, ill. 324 cm².



3. Az adott egyenlet $a\neq 2$ esetén pontosan másodfokú.

a) A két gyök akkor és csak akkor egyenlő, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla. Mivel $D=16(a-1)$, ezért $a=1$, s ekkor $x_1=x_2=-1$.

b) Mivel minden megengedett a esetén

$x_1 x_2 = \frac{a-2}{a-2} = 1$, ezért ha $a \geqq 1$ és $a \neq 2$, akkor a két gyök egymás reciproka.

4. Mivel $\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{\pi}{2}$, ezért $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Így $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

$x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2n\pi$, vagy $x+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}+2n\pi$, ahol n tetszőleges egész szám. Az egyenlet megoldásai:

$x = 2n\pi$ vagy $x = \frac{2\pi}{3}+2n\pi$.

(Ha alkalmazzuk a $\sin(\alpha+\beta)$-ra és a $\cos(\alpha-\beta)$-ra megismert azonosságokat, akkor a

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$

egyenlethez jutunk, amely $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ alakban is írható.

5. Az A pont nincs rajta az adott egyenletű befogón, így a B pont van rajta, tehát $B(6; 4)$. A másik befogó egyenese átmegy az A ponton, az előző befogó egyenesére merőleges, így egyenlete $x-y = -4$. A derékszögű csúcspont $C(3; 7)$. A két befogó hossza: $AC = 5\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$ egység. A háromszög területe $t = 15$ területegység.

6. Legyen $2^{x-y} = z$, $z > 0$. Az első egyenlet ekkor: $z^2+z-2 = 0$. Ennek pozitív gyöke 1; $2^{x-y} = 1$, $x-y = 0$, azaz $x = y$. Ezt felhasználva a második egyenlet a következő: $2^{2x+1}+2^{1-2x} = 5$.

$$2\cdot(4^x)^2-5\cdot(4^x)+2 = 0,$$

Ha $4^x = 2$, akkor $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, ha $4^x = \frac{1}{2}$, akkor $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

7. A szabályos háromoldalú gúla alaplapja szabályos háromszög, a gúla csúcspontjának merőleges vetülete az alaplap súlypontjába esik. A gúla magassága $m_1 = a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az alaplap súlyvonalának kétharmada $\frac{a}{2}$, a súlyvonal hossza ezért $\frac{3}{4}a$. Jelölje b

az alapél hosszát. Ekkor $b^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2$,

$b=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az alaplap területe $t=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

A gúla térfogata $V=\frac{t\,m_1}{3}=\frac{3a^3}{32}$ térfogategység.

Jelölje m_2 a gúla oldallapjának a magasságát. Ekkor $m_2{}^2=a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{13a^2}{16}$, $m_2=\frac{a}{4}\sqrt{13}$.

A gúla felszíne: $F=3\cdot\frac{b\cdot m_2}{2}+t=$

$=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}(1++\sqrt{13})$ területegység.

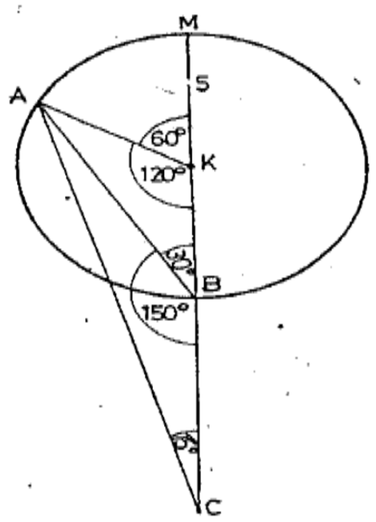
8. A cosinustételt alkalmazhatjuk: $c^2=a^2+b^2-ab$. Mivel $c=5a-b$, ezért $(5a-b)^2=a^2+b^2-ab$, $3a(8a-3b)=0$. Ez utóbbi egyenletnek eleget tevő legkisebb természetes számok: $a=3$, $b=8$ egység. Így $c=7$ egység. A háromszög területe: $t=6\sqrt{3}$ területegység.

M. X.

1. Az alapon fekvő szög legyen α, a két szár által bezárt szög 2γ, így $\gamma=90°-\alpha$. Az α hegyesszög, $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, így $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, tehát $\operatorname{tg}\gamma=$

$$=\frac{12}{5}.\ \operatorname{tg}2\gamma=\frac{2\cdot\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=-\frac{120}{119}.$$

2. AKB szög 120°, az AKB háromszög egyenlő szárú, $AK=KB=5$ egység, $AB=5\sqrt{3}=BC$. A rövidebb AM ívhez tartozó középponti szög 60°, így a hozzá tartozó MBA kerületi szög 30°,



az ABC szög így 150°, az ABC háromszög AC alapján fekvő szögek nagysága 15°. Az ABC háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}(AB \cdot BC \cdot \sin 150°) = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{4} =$$

$= 18{,}75$ területegység.

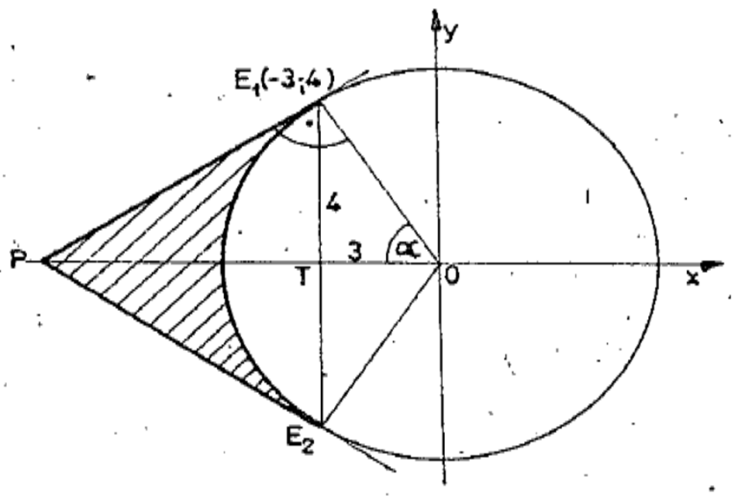
3. a) Az egyenletnek minden 0-tól különböző valós szám megoldása. (Úgy is mondhatjuk, hogy az egyenlet a megengedett számok körében azonosság.)

b) Az egyenlet a pozitív valós számok körében azonosság.

c) Az egyenletben szereplő függvények csak pozitív x-ekre értelmezettek. Ekvivalens átalakításokkal az $(\lg^2 x - 3) \lg x = 0$ egyenletet kapjuk. Ha $\lg x = 0$, akkor $x_1 = 1$, ha $\lg^2 x = 3$, akkor $x_2 = 10^{\sqrt{3}}$ vagy $x_3 = 10^{-\sqrt{3}}$. Mind a három szám gyöke az egyenletnek.

4. Az érintési pontok $E_1(-3; 4)$ és $E_2(-3; -4)$, az érintők az abszcissza tengely P pontjában metszik egymást. Az OE_1P derékszögű háromszög OP átfogójához tartozó magasság $E_1T = 4$ egység, így a magasságtétel szerint $PT = \frac{16}{3}$, $PO = \frac{25}{3}$.

Az OE_1PE_2 deltoid területe $t = \frac{100}{3}$ területegység.



Jelölje α az E_1OP szöget. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Az E_1OE_2 körcikk középponti szöge 2α radián, így a körcikk területe $t_2 = r^2\alpha$, ahol $r = 5$ és $\alpha = 0{,}93$ radián, így $t_2 = 23{,}3$. A keresett terület: $t = t_1 - t_2 = 10$ területegység.

5. Az egyenletnek csak olyan x szám lehet a gyöke, amelyre $1 - 8 \cdot 9^x \geqq 0$, azaz $3^{2x} \leqq \frac{1}{8}$ Az ilyen x-ekre az egyenlet bal oldalán álló függvény helyettesítési értéke $3^{2x} \cdot 3 \leqq \frac{3}{8}$ a jobb oldalon álló függvény értéke pedig nem kisebb egynél, tehát az egyenletnek nincs megoldása. Ezt a következő módon is beláthatjuk:

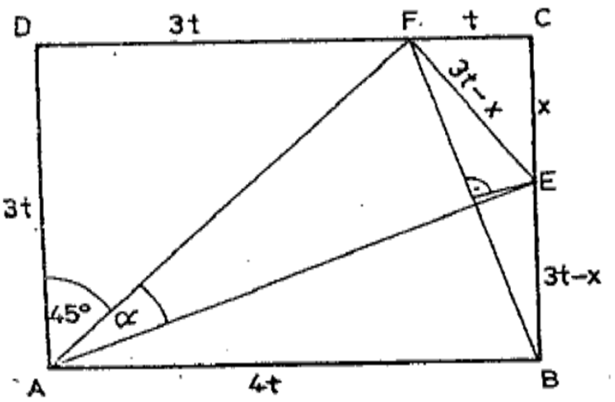
Az egyenlet rendezése, négyzetre emelése, majd újbóli rendezése után a

$$9 \cdot (3^{2x})^2 + 2 \cdot 3^{2x} = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek nincs gyöke, hiszen a bal oldal mindig pozitív.

6. Legyen $BC = 3t$, ekkor $AB = 4t$. Az FAD derékszögű háromszög egyenlő szárú, ezért $DF = 3t$, s így $FC = t$. Legyen $CE = x$, ekkor $FE = EB = 3t - x$. Az FCE derékszögű háromszög területe 6 területegység, így $tx = 12$ és $t^2 + x^2 = (3t - x)^2$, ahonnan $t = 3$ és $x = 4$ adódik. Így $AB = 12$, $BC = 9$. Mivel $BE = 5$, ezért $AE = 13$. Az EAF szög cosinusát az FAE háromszögből cosinustétellel számíthatjuk ki. $AF = 9\sqrt{2}$, $FE = 5$;

$$\cos \alpha = \frac{162 + 169 - 25}{13 \cdot 18\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$



7. A feltétel szerint $bc > 0$; $x = d$ nem lehet az egyenletnek gyöke. A két oldal egyforma változtatásával a feltételek mellett az adottal ekvivalens $x^2 - (a+d)\,x + (ad - bc) = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa

$D = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + bc$, mindig pozitív, hiszen $bc > 0$ és $(a-d)^2 \geqq 0$.

Az adott másodfokú egyenletnek két különböző gyöke van, ha a gyökök nem egyenlők d-vel:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\,(a + d \pm \sqrt{D}).$$

Az $a + d \pm \sqrt{D} = 2d$ egyenletből $(a-d)^2 + 4bc = (d-a)^2$, ami a $bc > 0$ feltétel miatt nem teljesülhet, így az adott egyenletnek két különböző valós gyöke van, x_1 és x_2.

8. Az első szám: $1 + 10 + \ldots + 10^{2n-1} =$

$= \dfrac{1}{9}\,(10^{2n} - 1)$. A másik: $2\,(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) =$

$= \dfrac{2}{9}\,(10^{n} - 1)$. A két szám különbsége: $d =$

$$= \frac{1}{9}\,(10^{2n} - 2\cdot 10^{n} + 1) = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2 = \left(3\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right)^2 =$$

$= [(3(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1})]^2$. A különbség négyzetgyöke tehát csupa 3-asból áll.

M. XI.

1. $$K(a) = \frac{a}{(a-1)^2} - \frac{(1-a+a^2)a}{(1-a)\,(1+a)\,(1-a+a^2)} +$$

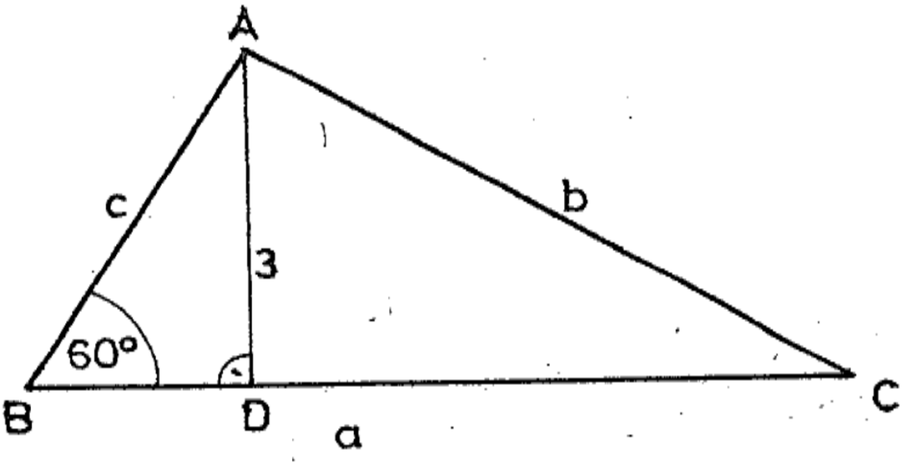
$$+ \frac{2a^2 - 2a + 2}{(1-a^2)\,(a-1)} = \frac{a(a+1) + a(a-1) - 2a^2 + 2a - 2}{(a-1)^2\,(a+1)} =$$

$$= \frac{2}{a^2 - 1}.$$

A kifejezésnek nincs értelme, ha $a = 1$ vagy $a = -1$. (Az $1 - a + a^2$ kifejezés mindig pozitív értéket vesz fel. Miért?) $K(a) > 0$, ha $a^2 > 1$, azaz $a < -1$ vagy $a > 1$, $K(a) = 0$ egyetlen a-ra sem teljesül, míg $K(a) < 0$, ha $a^2 < 1$, azaz ha $-1 < a < 1$.

2. Az ABD derékszögű háromszögben $AB = 2\sqrt{3}$ egység, így $BC = 6\sqrt{3}$ egység. A cosinustételt alkalmazhatjuk:

$b^2 = 108 + 12 - 36$, $b = 2\sqrt{21}$ egység.



3. A feltétel szerint $a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}=S$. Tudjuk, hogy $a_2=a_1q$, $a_4=a_3q, \ldots, a_{2n}=a_{2n-1}q$. Így $a_2+a_4\ldots+a_{2n}=(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1})q=$ $=S\,q$.

4. Az egyenlet csak pozitív x-ekre értelmezett. Vegyük mindkét oldal tizes alapú logaritmusát, majd rendezzük az egyenletet:
$2\lg^2 x-\lg x-1=0$; $\lg x=1$, $x_1=10$ vagy $\lg x=$ $=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Mindkét gyök megoldása az adott egyenletnek.

5. $AB=r\sqrt{2}$, $AC=r\sqrt{3}$. Két megfelelő háromszög van. Az ABC_1 háromszög A csúcsánál fekvő szög $45°-30°=15°$-os, az ABC_2 háromszög A csúcsánál fekvő szög $45°+30°=75°$.

Az ABC_1 háromszög területe:

$$t_1=\frac{1}{2}\cdot r\sqrt{2}\cdot r\sqrt{3}\cdot\sin 15°.$$

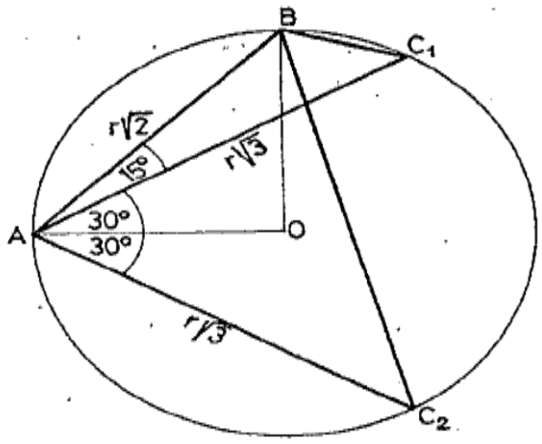
Az ABC_2 háromszög területe:

$$t_2=\frac{1}{2}\cdot r\sqrt{2}\cdot r\sqrt{3}\cdot\sin 75°.$$

Mivel $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ és

$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, ezért

$t_1=\frac{r^2}{4}(3-\sqrt{3})$ és $t_2=\frac{r^2}{4}(3+\sqrt{3})$ területegység.



6. Mivel az $F(4;\,1)$ pont a körön van, ezért $r^2 = 16+9$, $r = 5$. Az AC egyenesnek (egyenlete $3x+y = 13$) az adott körrel két metszéspontja van, az F ponton kívül a C pont. A négyzet másik két csúcspontja $B(7;\,2)$, $D(1;\,0)$. Ezeket AC felező merőlegesének (egyenlete: $x-3y = 1$) és az F középpontú $AF = \sqrt{10}$ sugarú körnek (egyenlete: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$) metszéspontjaként kaphatjuk. (Dolgozhatunk vektorok alkalmazásával is. Hogyan?)

7. Az egyenlet diszkriminánsa $D = \left(3a-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9} > 0$, így mindig van valós gyök. Mivel $x_1+x_2 = 5-3a$ és $x_1x_2 = 6-7a$, ezért $x_1{}^2+x_2{}^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9a^2-16a+13 = \left(3a-\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{53}{9}$. Ez akkor a legkisebb, ha $3a-\frac{8}{3} = 0$, $a = \frac{8}{9}$. A gyökök négyzetösszegének minimális értéke $\frac{53}{9}$. (A $9a^2-16a+13$ másodfokú függvény abszolút szélsőértékét differenciálszámítás alkalmazásával is megkaphatjuk. Hogyan?)

8. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög CA oldalát az A ponton túl $AD = AB = c$-vel. A DBC háromszög D csúcsánál levő szöge $90° - \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, a B csúcsánál levő szöge $90° + \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. A DBC háromszögre alkalmazzuk a sinustételt:

$$\frac{b+c}{a}=2=\frac{\sin\left(90^\circ+\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right)}{\sin\left(90^\circ-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Mivel $\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\neq 0$, ezért $2=\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$,

azaz valóban $3\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$.

Megjegyzés. A középiskolai törzsanyagon túlmenő eszközöket felhasználva más megoldásokat is készíthetünk.

1. Jelöljük a szokásos módon s-sel a háromszög félkerületét, ϱ-val a beírható kör sugarát. Ismeretesek a következő összefüggések:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{s-b},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s-c},\ t=\varrho s=$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ezekből $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\dfrac{\varrho^2}{(s-b)(s-c)}=$

$$=\frac{\varrho^2 s^2(s-a)}{s^2(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{s-a}{s}=\frac{b+c-a}{a+b+c}=$$
$$=\frac{2a-a}{a+2a}=\frac{1}{3}.$$

2. A háromszögekre érvényes összefüggés a tangenstétel:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

A BCD háromszögben $CDB \sphericalangle = \frac{CAB \sphericalangle}{2} = \frac{\alpha}{2}$, $CBD \sphericalangle = \beta + \frac{\alpha}{2}$. A CD és BC oldalakra alkalmazva a tételt, $CD = b+c = 2a$ felhasználásával:

$$\frac{1}{3} = \frac{2a-a}{2a+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$