MATEMATIKA

M. 1.

a) Az $ax^2-3bx+9c=0$ egyenlet két gyöke akkor és csak akkor egyenlő, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla, azaz $9b^2-4a\cdot 9c=0$, tehát $b^2-4ac=0$, ami azt jelenti, hogy az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet diszkriminánsa is nulla, tehát az egyenlet gyökei megegyeznek.

Az állítás megfordítása igaz, hiszen ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei egyenlők, akkor $b^2-4ac=0$, így $9b^2-36ac=0$; az $ax^2-3bx+9c=0$ egyenlet diszkriminánsa nulla, tehát gyökei valóban egyenlők.

b) Az $y=x^3-a^2x$ egyenletű görbe egy x_0 pontjában az érintő iránytangensét az $f(x)=x^3-a^2x$ függvény derivált függvényének x_0 helyen vett helyettesítési értéke adja. Most $f'(x)=3x^2-a^2$. $m_1=f'(0)=-a^2$, $m_2=f'(a)=2a^2$. E két érintő pontosan akkor merőleges egymásra, ha $m_1\cdot m_2=-1$. Most $-2a^4=-1$, $a^4=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ vagy $a=\frac{-1}{\sqrt[4]{2}}$.

M. 2.

a) Legyen a legkisebb oldal a, a leghosszabb oldal c, akkor $c=3a$. A $\beta=60°$. A középső oldal b, a cosinustételt alkalmazhatjuk.

$b^2=9a^2+a^2-2\cdot 3a\cdot a\cdot \cos 60°$, $b=a\sqrt{7}$.

A b oldalhoz tartozó szögfelező

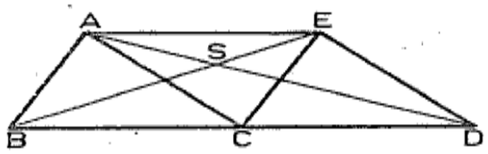
$f=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$. (Hogyan határozhatja meg?)

A keresett arány: $\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$.

b) Az adott függvény az $x=1$ helyen nem értelmezett. Minden más x értékre értelmezett és ezekre az x-ekre $y=2+2^x$. Az $y=2^x$ függvény grafikonját $2j$ vektorral eltolva kapjuk az $y=2^x+2$ függvény grafikonját, figyelembe véve, hogy $x\neq 1$. $2^x+2=3$, ha $x=0$; $2^x+2=4$, ha $x=1$, így a függvény a 4 értéket nem veszi fel; $2^x+2=5$, ha $2^x=3$, $x=\log_2 3$.

M. 3.

a) Készítsen ábrát! Az ABC és az ECD háromszögekben $BC=CD$ és a megfelelő szögek egyenlők, hiszen egy állásúak. Így AB párhuzamos és egyenlő EC-vel, azaz $ABCE$ négyszög paralelogramma. Ezért az ACE háromszög egybevágó az ABC háromszöggel. Az $ACDE$ négyszög is paralelogramma (miért?). A paralelogrammák átlói felezik egymást, így AD és BE az ACE háromszög egy-egy súlyvonalegyenese, tehát S valóban az ACE háromszög súlypontja.



b) Nézzünk meg először egy másik megoldást.

Az egyenlet $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos x}{\sin x}=0$ alakban írható, ahol $\cos 2x \neq 0$, $\sin x \neq 0$. Innen a

$$\sin 2x \sin x+\cos 2x \cos x = 0, \text{ azaz}$$
$$\cos(2x-x)=0$$

egyenlethez jutunk, ennek megoldásai az

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ számok, amelyek az adott egyenletnek

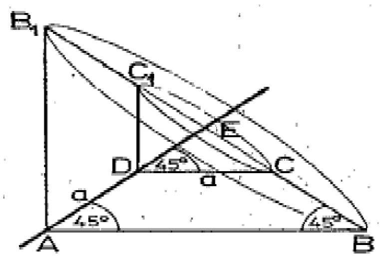
is megoldásai. A feladatban közölt megoldás során elvesztettük a gyököket. Miért?

Mindkét azonosság alkalmazása során *szűkítettük* a függvények értelmezési tartományát. A $\operatorname{tg} 2x$-nek van értelme az $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ helyeken, a $\operatorname{tg} x$-nek nincs! A $\operatorname{ctg} x$ értelmezett az $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ helyeken, az $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ nem!

M. 4.

a) Az $x^2+(2-a)x-2a=0$ egyenlet diszkriminánsa nem lehet negatív, hiszen $D=(a-2)^2+8a=(a+2)^2 \geq 0$. Így minden a-ra van gyöke az egyenletnek. (Az eredeti egyenletről „látható", hogy $x=a$ gyöke, így minden a-ra van gyök!) Az egyenlet gyökei: $x_1=-2$, $x_2=a$. A gyökök előjele tehát $a<0$ esetén egyezik meg, s ekkor mindkét gyök negatív. A gyökök négyzetének összege, a^2+4, akkor a legkisebb, ha $a=0$.

b) A keletkezett forgástest két forgáskúp különbsége.



A nagyobb forgáskúp BE sugarú, AE magasságú, a kisebb CE sugarú, DE magasságú. A feltételek miatt $DE=EC=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $BE=AE=a+\frac{a}{\sqrt{2}}$. Így

$$V=\frac{a^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\pi}{3}-\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\pi}{3}$$

$$V=\frac{a^3\pi}{6}(5+3\sqrt{2}) \text{ térfogategység.}$$

M. 5.

a) Az $x+4>0$ és $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)>0$ egyenlőtlenségeknek együtt kell teljesülniük. Az első megoldása $x>-4$, a másodiké $x<-4$ vagy $x>1$. A függvény tehát $x>1$ esetén értelmezett! Ezen számok körében $\lg(x+4)-\lg(x+4)(x-1)=\lg(x+4)-\lg(x+4)-\lg(x-1)=-\lg(x-1)$. Az adott függvény tehát $y = -\lg(x-1)$, ami $x > 1$ esetén értelmezett. Vázoljuk először az $y = \lg x$ grafikonját! Ha ezt tükrözzük az x-tengelyre, akkor az $y = -\lg x$ függvény grafikonját kapjuk. Ezt az $\vec{i}$ vektorral eltolva adódik a keresett grafikon. Más sorrendben is elkészíthetjük-e a grafikont? Hogyan?

b) Ahhoz, hogy az adott egyenlet kör egyenlete legyen, szükséges, hogy az x^2 és az y^2 együtthatója megegyezzen, tehát $a = -1$. Akkor az egyenlet valóban kör egyenlete, hiszen az $(x-u)^2+(y-u)^2 = 2u^2$ alakból látható, hogy a kör középpontja $C(u; u)$, sugara $r = |u|\cdot\sqrt{2}$. Ezek a körök átmennek az origón és középpontjaik az $y = x$ egyenletű egyenesen helyezkednek el. Ha a $P(2; 2)$ pont rajta van a körön, akkor koordinátái kielégítik a kör egyenletét, tehát

$$(2-u)^2+(2-u)^2 = 2u^2$$

azaz $2(u-2)^2 = 2u^2$, $(u-2)^2-u^2 = 0$, $u = 1$. A körök közül tehát az $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$ megy át a $P(2; 2)$ ponton.

M. 6.

a) A sorozat $(n-1)$. eleme $a_{n-1} = 2(n-1)+3 = 2n+1$. Mivel $a_n - a_{n-1} = 2$, ezért az a sorozat számtani. $a_1 = 2\cdot 1+3 = 5$, $d = 2$. A sorozat első n elemének összege:

$$S_n = \frac{n}{2}(5+2n+3) = n(n+4) = n^2+4n,$$

$$S_1+S_2+\ldots+S_n = (1^2+4)+(2^2+4\cdot 2)+\ldots+(n^2+4\cdot n) = (1^2+2^2+\ldots+n^2)+4(1+2+\ldots+n)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+13).$$

b) Legyen az a és a b oldalak által közrezárt szög γ. Ekkor

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

$$a^2-2ab\sin\gamma+b^2 = 0.$$

Osszuk el b^2-tel az egyenlet mindkét oldalát ($b \neq 0$). Ekkor $\frac{a}{b}$-re másodfokú egyenletet kapunk.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-(2\sin\gamma)\frac{a}{b}+1 = 0.$$

Ennek diszkriminánsa $D = 4(\sin^2\gamma-1)$. Mivel $\sin^2\gamma \leq 1$, ezért $D \leq 0$, azaz csak $D = 0$ lehetséges, vagyis $\sin\gamma = 1$, $\gamma = 90°$ ($\sin\gamma = -1$ nem ad megoldást), s ekkor $a = b$, tehát a másik két szög 45°-os.

M. 7.

a) Alakítsunk szorzattá! Az egyenlet

$(\operatorname{ctg} x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\cos x-1) = 0$ alakban írható.

Az egyenlet gyökei: $x = -\frac{\pi}{6}+n\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$.

b) A két vonal közös pontjainak abszcisszáit az egyenletek által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapjuk, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. A keresett terület:

$$T = \int_{-2}^{1} (-x+2)dx - \int_{-2}^{1} x^2dx = \int_{-2}^{1} (-x+2-x^2)dx$$

területegység.

$$T = \left[-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}-$$

$$-\left(-2-4+\frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2} \text{ területegység.}$$

M. 8.

a) Ahhoz, hogy az A, B, C pontok egy egyenesre essenek, szükséges és elégséges, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok párhuzamosak legyenek. $\overrightarrow{AB} = (4; 4a+4)$, $\overrightarrow{BC} = (1-a; 1-a)$. A párhuzamosság szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\frac{4}{1-a} = \frac{4a+4}{1-a}, \text{ ha } a \neq 1.$$

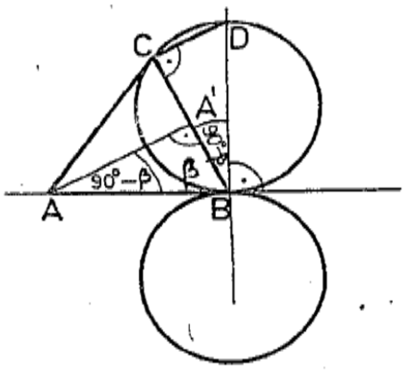
Ha $a = 1$, akkor $\overrightarrow{BC} = 0$, a B és a C pontok egybeesnek, a három pont egy egyenesen van ($2x-y = 2$).

Ha $a \neq 1$, akkor $a = 0$. A közös egyenes egyenlete $x-y = 2$.

(Az AB egyenes egyenlete: $(a+1)x-y = 2$. A C pont akkor van ezen rajta, ha koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz ha $(a+1)(4-a)-2a-2 = 0$, tehát $a = 1$ vagy $a = 0$.)

b) A B pontban az AB-re állított merőlegesen vegyük fel a D pontot úgy, hogy $AB = BD$ legyen. Az $AA'B$ derékszögű háromszög egybevágó a BCD háromszöggel, hiszen megegyeznek két oldalban ($AA' = BC$, $AB = BD$) és a közbezárt szögben. ($A'AB$ és a CBD szögek merőleges szárú hegyesszögek). Így a C pontból a BD szakasz derékszögben látszik, tehát a C pont rajta van a BD átmérőjű körökön, melyek az AB egyenes különböző oldalán helyezkednek el.

Belátható, hogy C pontok mértani helye a BD átmérőjű két kör, kivéve a B pont. (Lássa be!)



M. 9.

a) Az $5x^2+2ax-2a=0$ egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív vagy nulla. Ez most teljesül, hiszen $D=4a^2+40a^2\geq 0$. Az egyenlet két gyökének szorzata

$$x_1x_2 = -\frac{2a^2}{5}.$$

A két gyök akkor egymás reciproka, ha $-\frac{2a^2}{5}=1$, s ez egyetlen a-ra sem teljesül, tehát ilyen a nincs.

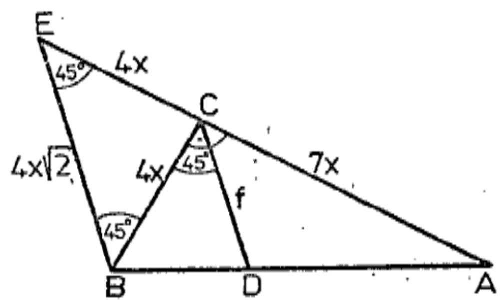
Mivel $x_1+x_2=-\frac{2a}{5}$, ezért akkor egymás ellentettje a két gyök, ha $-\frac{2a}{5}=0$, $a=0$ és ekkor $x_1=0$ és $x_2=0$, s valóban $0=-0$.

b) 1. Az ABC háromszöget a CD szögfelező két háromszögre bontja. E két háromszög területének összege megegyezik a háromszög területével. Legyen

$BC=a=4x$, $AC=b=7x$. Ekkor

$$\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot 7x=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot f\cdot \sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot 7x\cdot f\cdot \sin 45^\circ$$

amiből $x=\frac{11f}{28\sqrt{2}}$. Így $a=\frac{11f}{7\sqrt{2}}$, $b=\frac{11f}{4\sqrt{2}}$.



Dolgozhatunk az ábrának megfelelően is. EB párhuzamos a CD szögfelezővel, így $EC = BC = 4x$, $EB = 4x\sqrt{2}$. Az ACD és AEB háromszögek hasonlóságát felhasználva $4x\sqrt{2} : f = 11x : 7x$, amiből megkapjuk a megoldást.

2. Szerkesszünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelyben a befogók aránya $4 : 7$. Húzzuk meg a derékszög szögfelezőjét, majd a derékszög csúcsából nagyítsuk vagy kicsinyítsük a kívánt nagyságúra.

M. 10.

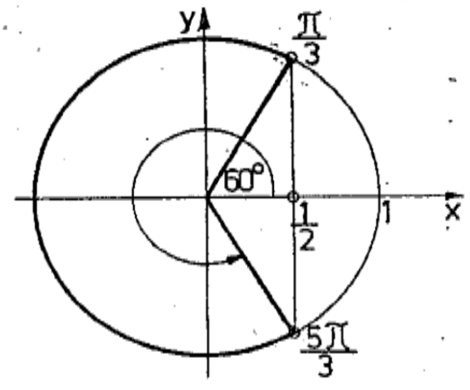
a) Mivel $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$, ezért az első egyenlet:

$$13^2-2xy+xy = 14\cdot 13-49,$$
$$xy = 36.$$

E mellé társítva a második egyenletet, a kapott egyenletrendszer helyettesítő módszerrel megoldható. (Más módon is megoldható! Hogyan?) Az egyenletrendszer megoldása: $x = 9$, $y = 4$ vagy $x = 4$, $y = 9$.

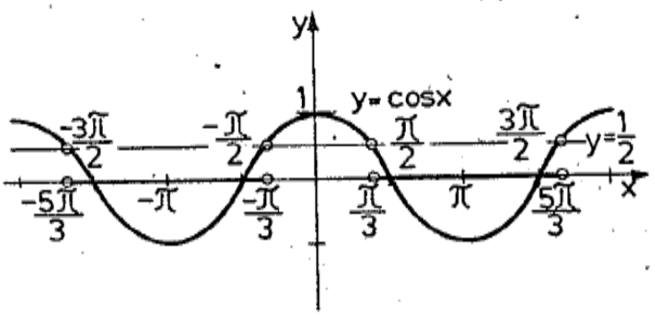
b) Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ és $\cos(\pi-x) = -\cos x$, ezért a $\cos x < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Vegyük fel a derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú, egységnyi sugarú kört és ezen az $\frac{1}{2}$ abszcisszájú pontokat. Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség megoldásai:



$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi, \quad k=0,\pm1,\ldots$$

Ha a koordináta-rendszerben vázoljuk az $y=\cos x$ és az $y=\frac{1}{2}$ függvények grafikonját, úgy szintén leolvasható a megoldás!



M. 11.

a) Legyen az egyik szám $989-x$, akkor a másik $989+x$, ahol $x\geqq 0$. $\left(989=\frac{1}{2}\cdot 1978\right)$.

A két szám szorzata: 989^2-x^2. Ez kisebb vagy egyenlő, mint 989^2. Akkor a legnagyobb, ha $x^2=0$, $x=0$, s a két szám ekkor egyenlő 989-cel.

Dolgozhatunk a számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenséggel is. Ismeretes, hogy

$\sqrt{a\cdot b}\leqq\frac{1}{2}(a+b)$, ahol $a>0$, $b>0$, és az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b$.

Legyen most $a+b=1978$. Ekkor $a\cdot b\leqq\left(\frac{1978}{2}\right)^2$.

$a\cdot b$ pontosan akkor a legnagyobb, ha $a=b$, azaz mindkét összeadandó 989.

Más módon is dolgozhatunk. Hogyan?

b) Ha az adott feltétel $\left(\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}\right)$ és a meghatározandó kifejezés ($\cos 2x$, $\sin 2x$) között közvetlen azonosság ismeretes, akkor ez alkalmazható. Most igazolható, hogy

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

ha $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$$\text{Így } \sin 2x = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}} = \frac{12}{13} \text{ és}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}} = -\frac{5}{13},$$

Ha közvetlen azonosságot nem ismerünk, akkor azonosságok sorozatos alkalmazásával és a függvények értelmezéséből adódó vizsgálattal dolgozhatunk.

Ismeretes a

$$\sin x = \pm\frac{\operatorname{tg} x,}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,$$

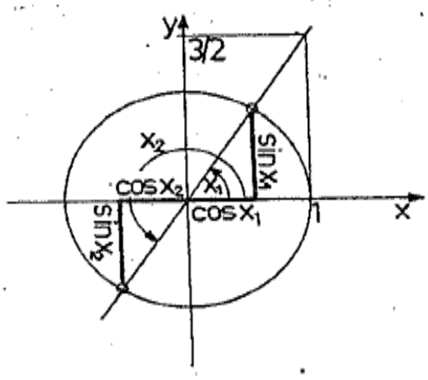
azonosság, ahol a + illetve a − előjel attól függően szerepel, hogy $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ előjele megegyezik, illetve ellentétes-e. (Vagy mégsem eléggé ismeretes az azonosság? Nézze meg a függvénytáblázatot!)

Hasonlóan $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Most $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, tehát $\cos 2x = -\dfrac{5}{13}$.

Mivel $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, ezért a $\sin x\cos x$ szorzat előjelét vizsgáljuk a feltétel alapján.

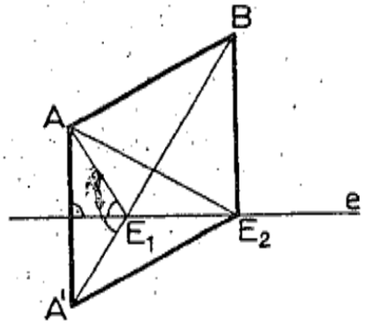
Ha $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{2}$, akkor $\dfrac{\pi}{4}+k\pi < x < \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.



Így vagy $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, s ekkor $\sin x>0$, $\cos x>0$, vagy $\frac{5\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, s ekkor $\sin x<0$, $\cos x<0$, azaz mindkét esetben $\sin x \cos x>0$. Most tehát $\sin 2x=2\sin x \cos x=$ $=2\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{12}{13}$.

M. 12.

a) Legyen az egyik pont (A) tükörképe e-re A'. Az $A'B$ az e egyenest E_1-ben metszi. Legyen E_2 az e egyenes tetszőleges, E_1-től különböző pontja. Az AE_1B háromszög kerülete kisebb, mint az AE_2B háromszögé, hiszen $AE_1+E_1B = A'B<$ $<AE_2+E_2B$. (A háromszögegyenlőtlenséget alkalmaztuk.) Így a lehetséges háromszögek közül az AE_1B kerülete a legkisebb.



(Mi van, ha a B pontot tükrözzük?)

b) A rombusz területe a két átló mértékszámának szorzatával egyenlő. Mivel $AC = 10$, ezért a másik átló $BD = 5$ egység. A B és D pontok az átlók $F(2; 4)$ metszéspontjától $\frac{5}{2}$ egység távolságra vannak és az AC szakasz felező merőlegesére illeszkednek. E felező merőleges egyenlete: $4x+3y = 20$. Az előzőek alapján B és D rajta van az $(x-2)^2+$ $+(y-4)^2=\frac{25}{2}$ egyenletű körön. Az egyenletrendszer megoldása révén kapjuk, hogy $B\left(\frac{1}{2};6\right)$, $D\left(\frac{7}{2};2\right)$. Dolgozhatnak vektorokkal is. Hogyan?

M. 13.

a) Ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, $\gamma = 180°-(\alpha+\beta)$. Így $\sin\gamma = \sin(180°-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Ha $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, akkor $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, azaz $\gamma = \alpha+\beta+k\cdot 360°$ vagy $\gamma = 180°-(\alpha+\beta)+k\cdot 360°$.

Nem következik tehát, hogy létezik olyan háromszög, amelynek szögei α, β, γ, hiszen α, β, γ nem biztos, hogy 0° és 180° közé esnek, és az is lehetséges, hogy összegük nem is 180°, hiszen lehet pl., hogy $\gamma = \alpha+\beta$, és $\alpha+\beta+\gamma \neq 180°$.

b) Legyen az alapkör sugara x cm, a henger magassága m cm. A feltétel szerint $2x^2\pi+2x\pi m = 48\pi$, azaz $x^2+xm = 24$. A hengerek térfogata $V(x;\ m) = x^2\pi m$ (cm³). Mivel $xm = 24-x^2$, ezért a vizsgálandó függvény, $V(x) = x\pi(24-x^2)$, $V(x) = 24x\pi - x^3\pi$, ahol $x>0$. A $V(x)$ függvénynek helyi szélső értéke *lehet* azon a helyen, ahol $V'(x) = 0$. $V'(x) = 24\pi-3x^2\pi$, s ez $x>0$ esetén az $x = \sqrt{8}$ helyen nulla. A $V'(x)$ derivált függvény ezen a helyen úgy vált előjelet, hogy $0<x<\sqrt{8}$ esetén $V'(x)>0$, $\sqrt{8}<x$ esetén $V'(x)<0$, tehát a $V(x)$ függvénynek az $x = \sqrt{8}$ helyen helyi maximuma van, ami egyben abszolút maximum is, hiszen ezt a legnagyobb értéket szigorú monoton növekedéssel éri el, s azután szigorúan monoton fogy.

A 48π cm² felszínű forgáshengerek közül az $x = \sqrt{8}$ cm sugarú és $m = \dfrac{16}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{8}$ cm magasságú henger térfogata a legnagyobb.

M. 14.

a) Mivel a sorozatok elemei pozitív számok, ezért bármely elem a szomszédos elemek mértani közepe.

$a_2 = \sqrt{a_1a_3}$, $b_2 = \sqrt{b_1b_3}$ és $(a_2+b_2)^2 = (a_1+b_1)(a_3+b_3)$.

$a^2_2+2a_2b_2+b^2_2 = a_1a_3+a_1b_3+b_1a_3+b_1b_3$,

$2a_2b_2 = a_1b_3+b_1a_3$,

$2\sqrt{a_1a_3b_1b_3} = a_1b_3+b_1a_3$.

Ez utóbbi egyenletet nullára redukálhatjuk, majd teljes négyzetté alakíthatunk. Az így kapott $(\sqrt{a_1b_3}-\sqrt{a_3b_1})^2 = 0$ egyenlet éppen azt jelenti, hogy $a_1b_3 = a_3b_1$.

b) A $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ azonosság csak olyan x-ekre érvényes, amelyekre $\sin x \geqq 0$. Ennek alkalmazásával kapott $\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2 x} = \cos x - 1$ egyenletnek már nem lehet olyan gyöke, amelyre $\sin x < 0$, tehát ennek már az $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ nem gyöke.

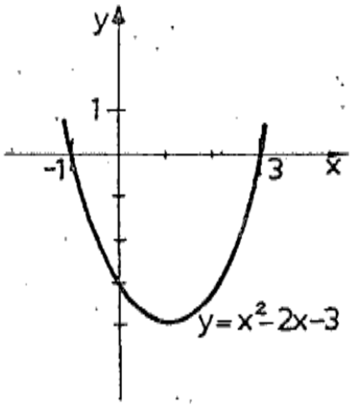
Az egyenlet mindkét oldalának négyzetre emelésével természetesen ismét visszakaptuk az elvesztett gyököt, hiszen helyesen a

$$\sqrt{3}\left(\pm\sqrt{1-\cos^2 x}\right) = \cos x - 1$$

egyenletet kellett volna írni, s ennek mindkét oldalát négyzetre emelve szintén a $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ egyenlethez jutunk. A négyzetre emelés révén olyan gyököket is kaphatunk, amelyek az eredeti egyenletnek nem megoldásai, így a közölt próba elvégzésére valóban feltétlenül szükség van. (Az adott egyenlet más módokon is megoldható! Hogyan?)

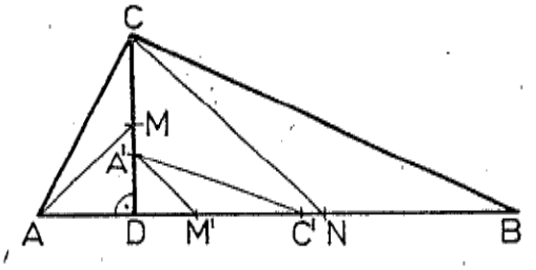
M. 15.

a) Mivel $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, ezért ha az $x = y^2$ függvény grafikonját a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ vektorral eltoljuk, akkor az $y = x^2 - 2x - 3$ függvény grafikonját kapjuk.



Az $y = 2^x$ függvény szigorúan monoton növekedő. Ezért $2^{x^2} < 2^{2x+3}$ pontosan azokra az x-ekre teljesül, amelyekre $x^2 < 2x + 3$, azaz $x^2 - 2x - 3 < 0$. Ennek megoldása az ábráról leolvasható: az egyenlőtlenség a $-1 < x < 3$ feltételnek eleget tevő valós x-ekre teljesül.

b) Az ADC és a CDB háromszögek hasonlók. Forgassuk el – az ábrának megfelelően – 90°-kal az ADC háromszöget a D körül, akkor az $A'DC'$



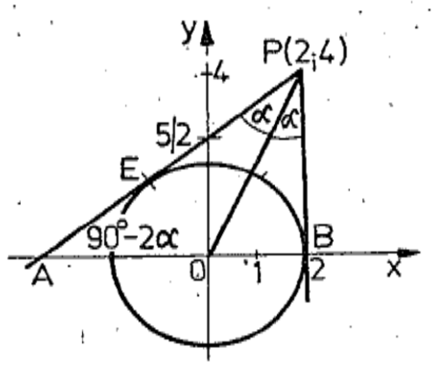
háromszöget kapjuk. A hasonlóság miatt a megfelelő súlyvonalak, $A'M'$ és CN, párhuzamosak, így a forgatás előtt AM és CN merőlegesek voltak.

M. 16.

a) Az egyenletek nullára redukált alakban adottak, így felhasználjuk azt, hogy egy szorzat akkor és csakis akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Egy kétismeretlenes egyenletrendszert megoldani azt jelenti, hogy meg kell határozni az összes olyan számpárt, amelyek minden egyenletet kielégítenek. Az első egyenlet egyik tényezője, az y^2-y+1 minden y-ra pozitív (miért?), így csak olyan x, y számpár lehet megoldás, amelyben x-re az $\lg x^2=0$ teljesül, azaz $x=1$, vagy $x=-1$.

Ha $x=1$, akkor $x^2-6x+5=0$, tehát minden $y>0$ esetben az $(1;\,y)$ számpárok mindkét egyenletet kielégítik. Ha $x=-1$, akkor $x^2-6x+5\neq 0$, tehát $\lg y=0$ kell, hogy legyen, azaz $y=1$, s így az $x=-1$, $y=1$ számpár is megoldás, és más megoldás nincs.

b) A feladat többféle módon is megoldható. A P pont a körön kívül van, ezért két olyan egyenes van, amely átmegy a P ponton és érinti a kört. Készítsünk ábrát! A P ponton átmenő, az y ten-



gellyel párhuzamos, $x = 2$ egyenletű egyenes érinti a kört. (Miért?) A másik érintő egyenes egyenletét trigonometria alkalmazásával keressük meg. Jelölje α az OPB szöget. OP az APB szög szögfelezője. A PAB szög $90° - 2\alpha$. A keresett AP érintő egyenes meredeksége $m = \operatorname{tg}(90° - 2\alpha) = \operatorname{ctg} 2\alpha$, s tudjuk,

hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ezért

$$m = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1} = \frac{3}{4}.$$ Az AP egyenes

egyenlete: $y - 4 = \frac{3}{4}(x-2)$, $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.

Természetesen más módokon is dolgozhatunk. Hogyan?

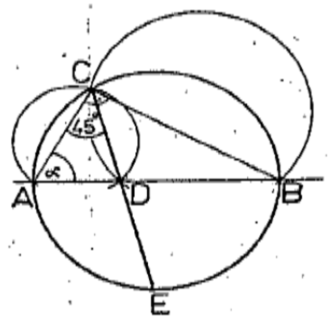
M. 17.

a) $x^2 - 6x - 16 = (x+2)(x-8)$, tehát $x^2 - 6x - 16 < 0$ akkor és csak akkor, ha $-2 < x < 8$.

Az $y = \log_{0,5} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő.

$\log_{0,5}(6x+7) < \log_{0,5}(x^2-9)$ pontosan akkor, ha $6x + 7 > 0$ *és* $x^2 - 9 > 0$ *és* $6x + 7 > x^2 - 9$, azaz $x > -\frac{7}{6}$ *és* $|x| > 3$ *és* $x^2 - 6x - 16 < 0$. E három egyenlőtlenség együtt akkor teljesül, ha $3 < x < 8$.

b) Készítsünk elemző ábrát! A feltétel szerint az ACB derékszögű háromszög AB átfogóját a D



pont $1:3$ arányban osztja, CD a derékszög szögfelezője. A C pontból tehát az AD és a DB szakasz is 45°-ban látszik, azaz C rajta van az AD és a DB szakasz fölé szerkesztett 45°-os látószögű köríven. E köríveknek az AB egyik oldalán (és a másikon is) egyetlen metszéspontjuk van. Így lényegében egyetlen ilyen háromszög létezik (illetve a lehetséges két háromszög egybevágó). Végezze el a szerkesztést!

A szerkesztést egyszerűbben is elvégezhetjük.

A D pont az AB átmérőt $1:3$ arányban osztja. A CD szögfelező felezi az AB szakaszra állított félkörívet, hiszen az AE és EB ívekhez egyenlő (45°-os) kerületi szög tartozik. Ennek alapján az ED egyenes az AB átmérőjű körből kimetszi a C pontot.

Dolgozhatunk még hasonlósággal is. Hogyan?

A szögfelező osztásarány tétele miatt $CB : CA = BD : AD = 3$, így $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{CB}{CD} = 3$. A háromszög hegyesszögei: 71° 34′, illetve 18° 26′.

M. 18.

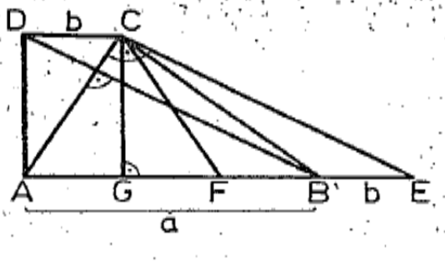
a) Legyen $5^x = y$. Ekkor $5y^2 - 24y - 5 =$

$$5(y-5)\left(y+\frac{1}{5}\right). \quad 5(5^x-5)\left(5^x+\frac{1}{5}\right)<0.$$

Mivel 5^x minden x-re pozitív, ezért $5^x<5$ kell, hogy teljesüljön. Az $y = 5^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, így $5^x<5$ pontosan akkor, ha $x<1$. Az egyenlőtlenség megoldásai az 1-nél kisebb valós számok.

b) Az ábra jelölése szerint a C ponton át a BD átlóval húzott párhuzamos az AB egyenest E-ben metszi. Ha $AB = a$ és $DC = b$, akkor $BE = b$, $AE = a+b$.

Az ACE háromszög derékszögű, átfogója kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak, így $CF = \dfrac{1}{2}(a+b)$.



A CGF derékszögű háromszög átfogója CF, nagyobb vagy egyenlő, mint a CG befogója, mely a trapéz magassága, így hossza m: Tehát $m = \dfrac{1}{2}(a+b)$.

Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $CF = CG$, azaz $a = b$, tehát a trapéz merőleges átlókkal rendelkező téglalap, azaz négyzet.

M. 19.

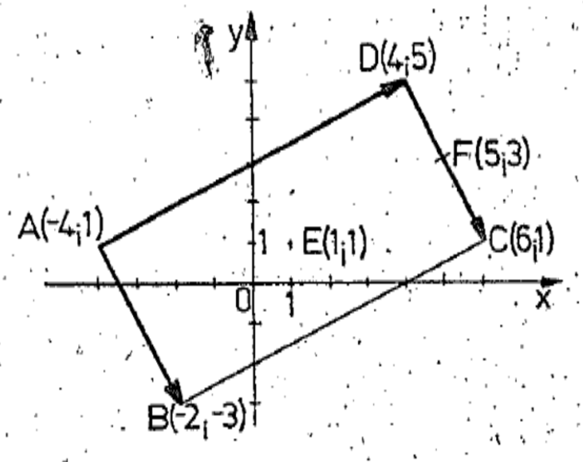
a) Kiemelhetjük x-et.

$$x(x+4\sqrt{x}-32)=0.$$

Az egyenlet egyik gyöke $x_1=0$. Az $x+4\sqrt{x}-32=0$ $\sqrt{x}$-re másodfokú egyenlet, így $\sqrt{x}=4$, $x_2=16$ vagy $\sqrt{x}=-8$, aminek nincs megoldása.

b) Mivel $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2;\ -3)-(-4;\ 1)=(2;\ -4)$, $\overrightarrow{DC}=(2;\ -4)$, ezért a négyszög AB és DC szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők, a négyszög paralelogramma.

$\overrightarrow{AD}=(8;\ 4)$. Az $\overrightarrow{AB}$ pozitív irányú $90°$-os elforgatottja $(4;\ 2)$, párhuzamos $\overrightarrow{AD}$-vel, tehát az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AD}$ egymásra merőlegesek, így $ABCD$ valóban téglalap.



$AB=\sqrt{20}$, $AD=2\sqrt{20}$, a téglalap területe $T=40$ területegység.

Az $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=4\,\overrightarrow{EF}$ összefüggés minden $ABCD$ paralelogrammára érvényes. Ugyanis $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{ED}$ és $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=2\,\overrightarrow{EF}$, azaz valóban $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=4\,\overrightarrow{EF}$. (Természetesen koordinátákkal is belátható a két vektor egyenlősége. Hogyan?)

A sík minden P pontjára érvényes, a $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=$ $=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}$ egyenlőség, hiszen éppen azt láttuk, hogy $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, és $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CD}$.

(Az $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha teljesül a $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}$ egyenlőség a sík minden P pontjára. Lássa be! Ezt a feltételt $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$, illetve $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})$ alakban írva a paralelogramma átlóinak metszéspontjára vonatkozó szükséges és elégséges feltételt kapjuk!)

M. 20.

a) Legyen $a_1=a$, a sorozat hányadosa q. Ekkor $a_2=aq$, $a_3=aq^2$ és $a_4=aq^3$.

$$\left.\begin{aligned} a(1+q^3)&=52,\\ aq(1+q)&=-12.\end{aligned}\right\}$$

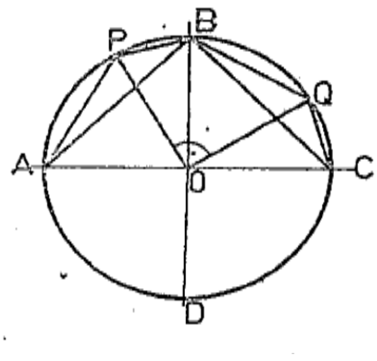
Az egyenleteket eloszthatjuk egymással, hiszen $a\neq 0, q\neq 0, q\neq -1$.

$$\frac{a(1+q)(1-q+q^2)}{aq(1+q)}=-\frac{13}{3},$$

$$3q^2+10q+3=0.$$

Ha $q=-3$, akkor $a=-2$, és $S_5=-122$, ha $q=-\frac{1}{3}$, akkor $a=54$ és $S_5=\frac{122}{3}$.

b) Az $\widehat{AB}$ és a $\widehat{BC}$ ívek egyenlők. Az ABC szög derékszög. Forgassuk el 90°-kal az O pont körül (az ábrának megfelelően) a síkot. A B pont az A-ba,



a C pont a B-be megy át, ... forgatással a Q pont a P-be, hiszen a POQ szög 90°. A forgatás által a BCQ háromszög az ABP háromszöget fedi le, tehát a két háromszög valóban egybevágó.

M. 21.

a) Az azonosságok alkalmazása és az egyenlet rendezése után az

$$(a-b)x^2-(a^2-b^2)x=0$$

egyenletet kapjuk.

Ha $a=b$, akkor minden x valós szám megoldás. Ha $a\neq b$, akkor

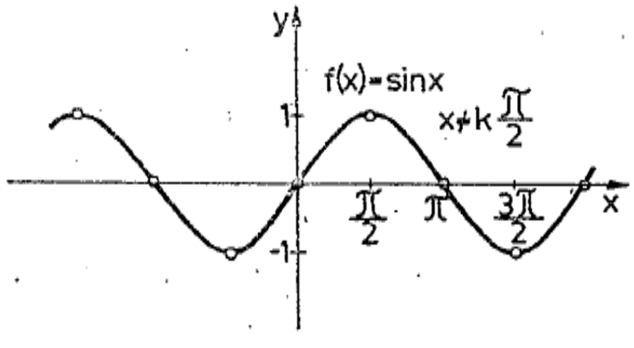
$$x[x-(a+b)]=0,$$

azaz ekkor a gyökök $x_1=0$, $x_2=a+b$. A két gyök egyenlő, ha $a+b=0$, és ekkor $x_1=x_2=0$.

b) Ismeretes, hogy $\sin(\pi-x)=\sin x$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\cos(2\pi-x)=\cos x$; $\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg}x$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x$, $x\neq n\pi$; $\sin(-x)=-\sin x$.

Az $f(x)$ nem értelmezett, ha $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$ nem értelmezett, és akkor, ha a nevezőben álló kifejezés nulla, azaz $x=k\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$ kivételével minden x-re értelmezett a függvény.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{-\operatorname{ctg}x}\cdot\frac{\cos x}{-\sin x}=\sin x,\quad x\neq k\cdot\frac{\pi}{2}.$$



M. 22.

a) Legyen a derékszögű háromszög átfogója c. Ekkor $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ és $a^2+b^2 = c^2$. Mivel $(a\sin\alpha + b\sin\beta)^2 =$

$$= \left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{c}\right)^2 = \left(\frac{c^2}{c}\right)^2 = c^2 \text{ és}$$

$ab(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta) = ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = a^2+b^2 = c^2$, ezért igaz a bizonyítandó feltételes azonosság.

b) Egy kéttényezős szorzat akkor és csak akkor pozitív, ha mindkét tényezője pozitív vagy mindkettő negatív. Mivel $\sqrt{x^2-16}$ nem lehet negatív (miért?) és csak $x^2 \geqq 16$, $|x| \geqq 4$ számokra értelmezett, ezért csak ilyen számokra teljesülhet az, hogy $f(x)$ pozitív. $x^2-2x-15>0$ akkor, ha $x>5$ vagy $x<-3$. Az $f(x)$ tehát akkor és csak akkor pozitív, ha $x<-4$ vagy $x>5$.

M. 23.

a) Legyen az A csúcsnál az α szög. Mivel $AP = AM$, ezért az APM szög $90° - \frac{\alpha}{2}$ nagyságú. Az APM szög a beírható kör rövidebb MP ívéhez tartozó érintőszárú kerületi szög, így egyenlő a rövidebb MP ívhez tartozó MNP szöggel, ami így hegyesszög, s ez egyben azt is jelenti, hogy az MNP háromszög minden szöge hegyesszög.

b) Változót tartalmazó kifejezéssel csak akkor oszthatunk, ha az nem nulla. Látható, hogy azok az x-ek, amelyekre $\cos 2x = 0$, megoldásai az egyenletnek, hiszen ez esetben mindkét oldal helyettesítési értéke 0. A $\cos 2x$-szel való osztással gyököket vesztettünk el! Az elvesztett gyökök:

$$2x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}.$$

Célszerűbb az egyenletet nullára redukálni, szorzattá alakítani és alkalmazni azt a tényt, hogy egy kéttényezős szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

M. 24.

a) Az ABC háromszög területe $t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 30° =$
$= 6$ cm^2. A BD szögfelező az AC oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja ketté, $AD : DC = 2 : 3$. Az ABD és a BDC háromszögek B csúcshoz tartozó magassága megegyezik, így e háromszögek területének aránya szintén $AD : DC$. Az ABD háromszög területe tehát az ABC háromszög területének kétötöde, azaz 2,4 cm^2.

b) Ismeretes, hogy $\sqrt{a^2} = |a|$, azaz megegyezik a-val, ha $a \geqq 0$ és egyenlő $-a$-val, ha a negatív. Ezek szerint

$$\sqrt{(3x-5)^2} = |3x-5| = \begin{cases} 3x-5, \text{ ha } x \geqq \frac{5}{3}, \\ 5-3x, \text{ ha } x < \frac{5}{3}. \end{cases}$$

A $3x-5 = 5$, $x \geqq \frac{5}{3}$ egyenlet gyöke valóban $x = \frac{10}{3}$, az $5-3x = 5$, $x < \frac{5}{3}$ egyenlet gyöke $x = 0$. Ezt a gyököt vesztette el a vizsgázó!

M. 25.

a) A rombusz átlói merőlegesek egymásra, s egyben szögfelezők. (A rombusz átlói természetesen felezik egymást, hiszen a rombusz olyan *paralelogramma*, amelynek két szomszédos oldala egyenlő.)
A rombusz oldala legyen a, a két átló $2e$, $2f$, $e > f$.
$e = a \cos 15°$, $f = a \sin 15°$.
$2e \cdot 2f = 4a^2 \sin 15° \cdot \cos 15° = 2a^2 \sin 30° = a^2$, ami épp az igazolandó állítást jelenti.

Dolgozhatunk egyszerűbben is. A rombusz területe egyrészt $a^2 \sin 150° = \frac{1}{2} a^2$, másrészt $\frac{1}{2} \cdot 2e \cdot 2f$, amiből $a^2 = 2e \cdot 2f$.

b) Az $f(x) = x^2 + 2x + a - 10$ pontosan akkor vesz fel minden x-re pozitív értéket, ha a másodfokú polinom diszkriminánsa negatív. Ekkor ugyanis $f(x)$-nek nincs zérushelye, s mivel $f(x)$ grafikonja az x^2 grafikonjából **j** vektor irányú, párhuzamos eltolással kapható, így negatív értéket nem vehet fel. Most $D = 4-4(a-10) = 44-4a$. $D<0$, ha $a>11$.

M. 26.

a) Az a oldalhoz tartozó súlyvonal legyen $3x$, a b oldalhoz tartozó súlyvonal pedig $3y$. Mivel a háromszög két súlyvonalának metszéspontja a súlyvonalaknak a csúcstól távolabb eső harmadolópontja, s most a súlyvonalak merőlegesek egymásra, ezért ha c a háromszög harmadik oldala, akkor $c^2 = 4x^2+4y^2$, $\frac{a^2}{4} = x^2+4y^2$, $\frac{b^2}{4} = 4x^2+y^2$. Ez utóbbi két egyenletből $a^2+b^2 = 20(x^2+y^2)$, azaz $a^2+b^2 = 5c^2$, amiből $c=\sqrt{\frac{1}{5}(a^2+b^2)}$.

b) Az a, b, c számok pontosan akkor egymás után következő elemei egy számtani sorozatnak, ha $2b = a+c$. Most

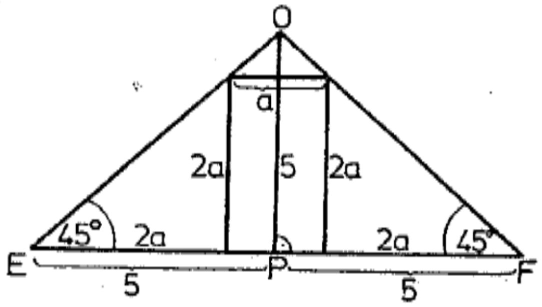
$$2\lg(2^x-1) = \lg 2+\lg(2^x+3),$$
$$\lg(2^x-1)^2 = \lg 2(2^x+3)$$

ahol $2^x-1>0$, azaz $x>0$. Mivel $(2^x-1)^2 = 2(2^x+3)$, ezért $2^{2x}-4\cdot 2^x-5 = 0$, azaz $2^x = 5$ vagy $2^x = -1$. Ez utóbbi egyenletnek nincs gyöke (miért?), az előbbinek $x = \log_2 5$, ami az eredeti feltételnek is megfelel, hiszen ekkor a három szám $\lg 2$, $2\lg 2$, $3\lg 2$.

M. 27.

a) Ismeretes az $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság. Az adott függvény az $x = -2$ helyen nem értelmezett. Minden más x értékre értelmezett és ezekre az x-ekre $y = x^2-2x+4$. Teljes négyzetté kiegészítéssel $y = (x-1)^2+3$. E függvény grafikonját az $y = x^2$ grafikonjának $\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ vektorral való eltolásával kapjuk, figyelembe véve, hogy $x \neq -2$. Mivel $(x-1)^2 \geqq 0$ és a 3 állandó, ezért a függvény az $x = 1$ helyen veszi fel a legkisebb értéket és ez a minimális érték 3.

b) Legyen E, illetve F a gúla alapja két szemközti oldalának felezőpontja, O a gúla csúcsa, P az alapnégyzet szimmetria középpontja. Az EOF sík a gúla szimmetriasíkja. E sík az EOF égyenlőszárú háromszöget metszi ki a gúlából. Mivel $EF = 10$, az EF oldalhoz tartozó súlyvonal 5, ezért EOF egyenlőszárú derékszögű háromszög. Ha a négyzetes oszlop alapéle a, akkor magassága (oldaléle) $2a$, így az ábrából leolvasható, hogy $EF = 5a$. $5a = 10$, $a = 2$ cm. A négyzetes oszlop térfogata $V = 4 \cdot 4 = 16\ \text{cm}^3$.



M. 28.

a) Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Egy kétismeretlenes egyenletrendszert megoldani azt jelenti, hogy meghatározni az összes olyan $[(x, y)]$ számpárt, amely minden egyenletet kielégít.

Ha $y = 0$, akkor $x = t$, ahol t tetszőleges valós szám, hiszen y tényezőként mindkét nullára redukált egyenletben szerepel.

Ha $x = 0$, akkor $y = 0$ (ez már az előző megoldásban is szerepel), vagy $12 + 3y = 0$, azaz $y = -4$. Ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor a

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 12, \\ 4x + 3y &= 18 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása $x = 5$, $y = -\dfrac{2}{3}$, az adott egyenletrendszernek is megoldása.

b) $\sin\beta = \sin[(\alpha+\beta) - \alpha] = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

Használjuk fel a feltételt és rendezzük az egyenletet: $2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$. Ebből már $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$ $(\neq 0)$-val való osztással valóban a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$ egyenlet adódik.

M. 29.

a) A feltételeknek két egyenes felel meg. Az egyik párhuzamos az AB egyenessel, ennek egy irányvektora $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, így egyenlete $x-3y = 2-15$, $x-3y = -13$; a másik átmegy az AB szakasz $F(2;\ 3)$ felezőpontján, ennek egy irányvektora $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{FP} = (0;\ 1)$, így egyenlete $x = 2$.

Felhasználtuk, hogy minden olyan egyenes, amely átmegy az AB szakasz F felezőpontján, az A és a B pontokból egyenlő távolságra van. Minden olyan egyenes, amely AB-vel nem párhuzamos, és nem megy át az F ponton, A-tól és B-től különböző távolságra van.

b) Tudjuk, hogy $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Az adott egyenletet $\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x = 0$ alakban írva, kapjuk, hogy $\cos(3x-2x) = 0$, $\cos x = 0$, tehát $x = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$ Az adott függvény tehát az $y = \cos x$ függvény, amely a legkisebb értékét, a -1-et az $x = = \pi \pm 2n\pi$ helyeken veszi fel.

M. 30.

a) Ha az $x^2+px+q = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2, akkor $p = -(x_1+x_2)$. Tegyük fel, hogy az adott egyenletnek vannak gyökei és ezek összege (-16). Ekkor $a^2-24a+160 = 16$, azaz $a = 12$.

Valóban, ha $a = 12$, akkor az egyenlet $x^2+16x+15 = 0$, gyökei $x_1 = -1$, $x_2 = -15$, a gyökök összege (-16). Az egyenlet gyöktényezős alakja: $(x+1)(x+15) = 0$.

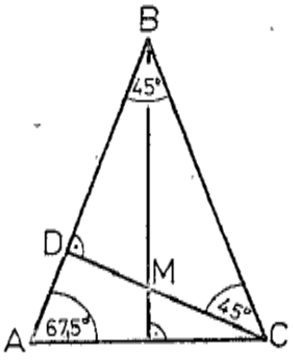
b) Legyen az ABC háromszögben $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, a szemközti szögek α, β, γ. Tudjuk, hogy $c = 2R\sin\gamma$, tehát $R\sqrt{2} = 2R\sin\gamma$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Innen γ $45°$ vagy $135°$, de $\alpha = 75°$, tehát $\gamma = 45°$, s így $\beta = 60°$. $b = 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$ $a = 2R\sin 75° = \frac{R}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})$, hiszen $\sin 75° = \sin(45°+30°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

(A háromszög szögeit elemi úton, trigonometria alkalmazása nélkül is megkaphatjuk. Hogyan?)

M. 31.

a) Végezzünk a nevezőben teljes négyzetté kiegészítést! $y = 2 - \frac{1}{(x+2)^2+3}$. Mivel a 2 állandó, ezért az összeg akkor a legkisebb, ha $\frac{1}{(x+2)^2+3}$ a legnagyobb. E tört számlálója pozitív állandó, s a nevezője is mindig pozitív. A tört akkor a legnagyobb, ha nevezője a legkisebb. Ez $x = -2$ esetén teljesül. Az adott függvény tehát $x = -2$ esetén veszi fel a legkisebb értéket, s ez a minimális érték $\frac{5}{3}$.

b) Legyen a háromszög hegyesszögű. Ekkor az AB oldalhoz tartozó magasság legyen CD. Az ACD és az MBD háromszögek egybevágók, hiszen a C, illetve a B csúcsnál levő szögek egyenlők (merőleges szárú hegyesszögek), az átfogójuk a feltétel szerint



szintén egyenlő. Ezért $BD = CD$, azaz a CDB háromszög egyenlő szárú derékszögű, így az ABC háromszög B csúcsánál 45°-os szög van, míg a másik két szög 67,5°-os.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor a háromszög szögei 135°; 22,5°; 22,5°. Lássa be!

M. 32.

a) Mivel $-a \geqq 0$ és $-b \geqq 0$ kell, hogy teljesüljön, ezért $a \leqq 0$ és $b \leqq 0$, s ekkor valóban $ab \geqq 0$. Az egyenlet mindkét oldala csak nem-pozitív a és b esetén értelmezett. Mivel mindkét oldal nem-negatív, ezért elegendő belátni, hogy a négyzetük egyenlő. $(\sqrt{ab})^2 = ab$; $(\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b})^2 = (\sqrt{-a})^2\cdot(\sqrt{-b})^2 = (-a)(-b)$

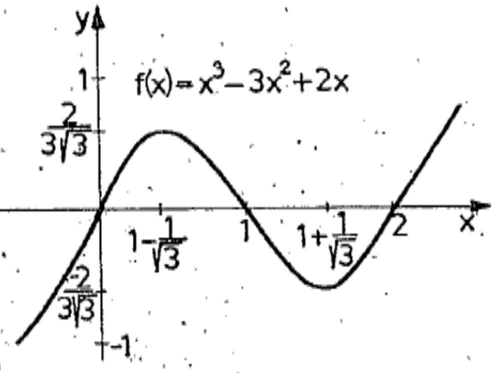
$= ab$, ezért az egyenlet a nem-pozitív a és b számok körében valóban azonosság.

Ha $a \geqq 0$ és $b \geqq 0$, akkor $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, így ha $ab \geqq 0$, akkor $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$.

b) Az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ függvény minden x pontban folytonos, $f(x) = 0$, ha $x = 0$, vagy $x = 1$, vagy $x = 2$. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, amit érdemes szorzattá alakítani, hiszen ha $f'(x)$ egy szakaszon pozitív (negatív), akkor azon a szakaszon a függvény szigorúan monoton nő (fogy). Mivel $f'(x) = 0$, ha

$$x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ ezért } f'(x) =$$

$= 3(x - x_1)(x - x_2)$. Ha $-\infty < x < x_1$, akkor $f'(x) > 0$, $f(x)$ szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x < x_2$, akkor $f'(x) < 0$, $f(x)$ szigorúan monoton fogy, ha $x_2 < x < \infty$, akkor $f'(x) > 0$, $f(x)$ szigorúan monoton nő. Ha $x = x_1$, akkor $f'(x) = 0$ és itt $f'(x)$ pozitív előjelről negatívra vált át, így itt a függvénynek helyi maximuma van, ha $x = x_2$, akkor $f'(x) = 0$ és itt $f'(x)$ negatív előjelről pozitívra vált át, így itt a függvénynek helyi minimuma van.



M. 33.

a) Az adott függvénynek értelme van, ha a ctg x függvény értelmezett és nem nulla, azaz $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$. E kettő együtt akkor teljesül, ha $x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol n tetszőleges egész szám. Minden megengedett x-re

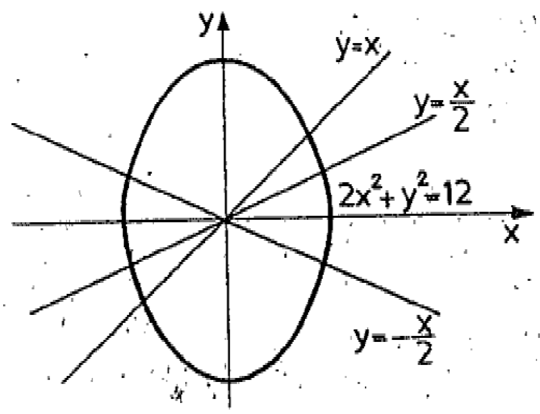
$$\frac{\cos x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{(1 + \sin x)\cos x}{\cos x} = 1 + \sin x$$

Az $f(x)$ függvény az $x = n\frac{\pi}{2}$ kivételével minden x-re értelmezett, és ezen x értékek esetén grafikonja egybeesik az $1+\sin x$ függvény grafikonjával, melyet a $\sin x$ függvény grafikonjából a $\mathbf{j}$ vektorral való eltolással kapunk. A függvény egyetlen helyen sem veszi fel a nulla értéket, hiszen ha $\sin x = -1$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, akkor a függvény nem értelmezett.

b) Az $ax - y = a^2$ egyenletű egyenes akkor és csak akkor érinti a $4y = x^2$ egyenletű parabolát, ha az egyenleteik által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla. Most az egyenlet $x^2 = 4ax - 4a^2$, ennek diszkriminánsa minden a esetén nulla, így az adott végtelen sok egyenes mind érinti a parabolát!

M. 34.

a) A kifejezés $(x-y)(x-2y)(x+2y)$ alakban írható. Ha $x = y$ és $2x^2+y^2 = 12$, akkor $x_1 = 2$, $y_1 = 2$ vagy $x_2 = -2$, $y_2 = -2$; ha $x = 2y$ és $2x^2+y^2 = 12$, akkor $x_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ vagy $x_4 = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; ha $x = -2y$ és $x^2+2y^2 = 12$, akkor $x_5 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_5 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ vagy $x_6 = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



Az első egyenlet grafikonja három, az origón áthaladó egyenes, egyenletük $x-y=0$, $x-2y=0$, $x+2y=0$, a második egyenlet grafikonja ellipszis.

b) Tudjuk, hogy π közelítő értéke század pontossággal 3,14. Ezért $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, tehát $\sin 3>0$, $\frac{3\pi}{2}<$ $<5{,}2<2\pi$, tehát $\sin 5{,}2<0$, azaz $\sin 3>\sin 5{,}2$.

M. 35.

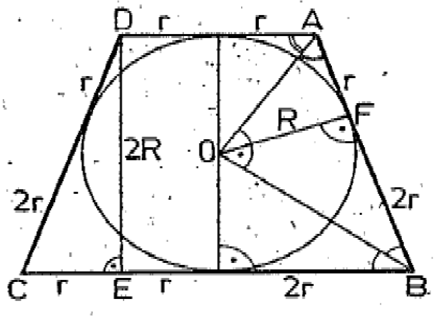
a) A beírható kör középpontját a hegyesszögű csúcsponttal összekötve a háromszög belső szögfelezőjét kapjuk. Az α szöggel szemközti befogó

hossza $a\left(\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$. Így

$$T=\frac{1}{2}a^2\left(\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ez a kifejezés egyszerűbb, $\frac{1}{2}a^2\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ alakban is felírható. Hogyan?

b) Az egyenlő szárú érintőtrapéz szimmetriatengelye körüli megforgatásával csonka kúp keletkezik. Legyen a fedőkör sugara r, akkor az alapkör sugara $2r$, így egy alkotó hossza $3r$. (Miért?) Az r és $2R$ befogójú, $3r$ átfogójú CED derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmazva $r^2+4R^2=$



$=9r^2$, azaz $r^2=\frac{R^2}{2}$. (Az AOB derékszögű háromszögben $R^2=r\cdot 2r$, miért?)

A csonka kúp felszíne $F=r^2\pi+(2r)^2\pi+$ $+(2r+r)\pi\cdot 3r=14r^2\pi=7R^2\pi$ területegység.

M. 36.

a) Ha $x = -1$, akkor $\lg 1 + \lg 3^2 = 0 + 2 \lg 3$; ha $x = -3$, akkor $\lg 3^2 + \lg 1 = 2 \lg 3$, azaz valóban gyökei az adott egyenletnek.

Az $\lg a^2 = 2 \lg a$ azonosság csak $a > 0$ esetén értelmezett! Az $\lg a^2$, $a = 0$ kivételével minden a-ra értelmezett, és ekkor $\lg a = 2 \lg |a|$. Azért veszett el a két gyök, mert „szűkítő" azonosságot alkalmaztunk!

Érdemesebb a következő módon dolgozni:

$$\lg x^2 (x+4)^2 = \lg 3^2, \text{ amiből}$$

$$[x(x+4)]^2 = 3^2, \text{ azaz}$$

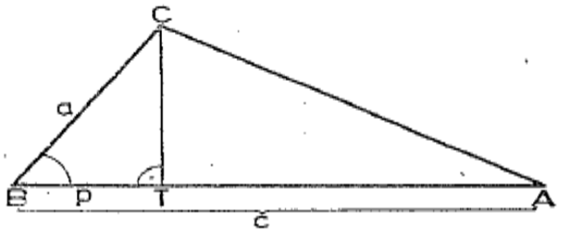
$x(x+4) = 3$ vagy $x(x+4) = -3$. Így minden gyököt megkapunk.

b) Az átló átmegy az A ponton, hiszen $3 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 = -13$. A rombusz BD átlója merőleges az AC átlóra, így egy irányvektora $(-3; 4)$ és átmegy a B ponton, egyenlete $4x + 3y = 16$. Az átlók metszéspontja $F(1; 4)$. Az A pont tükörképe F-re $C(5; 7)$, a B pont tükörképe F-re $D\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$. Hogyan végezhetné el más módon a számítást?

M. 37.

a) Legyen az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, a C pont vetülete az AB szakaszon T, $BT = p$. A befogó tétel megfordítása: ha $a^2 = p \cdot c$, akkor a háromszög derékszögű. A feltétel $a : p = c : a$ alakban is írható. Ez azt jelenti, hogy a CBT és az ABC háromszögekben két-két oldal aránya és az oldalak által közrezárt szög (a B csúcsnál levő szög) megegyezik, a két háromszög tehát hasonló. Mivel a

BTC szög derékszög, ezért a BCA szög is derékszög, azaz az ABC háromszög valóban derékszögű.



b) Ismeretesek a következő azonosságok: $\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 2k\pi)$, $\cos\alpha = \cos(\alpha \pm 2k\pi)$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$. Ezeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\sin 4x - \cos 4x}{1+\sin 4x + \cos 4x} = \frac{2\sin 2x\,(\sin 2x + \cos 2x)}{2\cos 2x\,(\cos 2x + \sin 2x)}.$$

Az $f(x)$ függvény az $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ és az $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$ kivételével minden x-re értelmezett, a megengedett x értékek esetén grafikonja egybeesik a $\operatorname{tg} 2x$ függvény grafikonjával. Készítse el!

M. 38.

a) Legyen a racionális szám, b pedig irracionális, összegük $c = a + b$ irracionális. Ha ugyanis c racionális lenne, akkor $c - a$ is racionális szám, s mivel $c - a = b$ és b a feltétel szerint irracionális, így ellentmondásra jutottunk. c valóban irracionális. (Indirekt bizonyítást végeztünk.)

Két irracionális szám összege lehet racionális, például

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1.$$

b) Az adott függvénynek értelme van, ha a $\operatorname{tg} x$ értelmezett és $1 + \cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ és $x \neq \pi + 2k\pi$, ahol k és n tetszőleges egész szám. Minden megengedett szögre

$$\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{(1+\cos x)\sin x}{(1+\cos x)\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Az $f(x)$ függvény az $x = \pi + 2k\pi$ és az $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ kivételével minden x-re értelmezett, és a megengedett x értékek esetén grafikonja egybeesik a $\operatorname{tg} x$ függvény grafikonjával. $f(x) = 0$, ha $x = 2n\pi$.

M. 39.

a) Hasonló testek felületének aránya a hasonlóság arányának négyzetével, térfogatuk aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő. Ha a gömb sugarát 50%-kal növeljük, ez azt jelenti, hogy 1,5-szeresére változik, a gömb felszíne tehát $1{,}5^2 = 2{,}25$-szörösére, azaz 125%-kal nő. A gömb térfogata $1{,}5^3 = 3{,}375$-szörösére, azaz 237,5%-kal nő.

b) Mivel $1+\sin 2x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$, ezért az egyenlet

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 5) = 0$$

alakban írható. A $\sin x + \cos x + 5$ tényező sohasem lehet nulla (miért?). A másik tényező akkor nulla, ha $\sin x + \cos x = 0$. Azok a szögek, amelyeknek cosinusa 0, nem lehetnek az egyenlet gyökei, mivel sinusuk 1 vagy -1. Ezért most már oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát $\cos x$-szel: $\operatorname{tg} x + 1 = 0$,

$$- = x\ \frac{\pi}{4} + n\pi,$$ ahol n tetszőleges egész szám.

M. 40.

a) A logaritmus értelmezése szerint $\sqrt{x}-1>0$, $\sqrt{x}-1\neq 1$ és $2x-14=(\sqrt{x}-1)^2$

Ez utóbbi egyenletekből $x+2\sqrt{x}-15=0$, $\sqrt{x}=3$ ($\sqrt{x}\neq -5$), $x=9$. Ez valóban gyök, hiszen $\log_2 4 = 2$.

b) Az ABE háromszög hasonló a KDE háromszöghöz, hiszen két-két szögük páronként egyenlő, a hasonlósági arány $AE : EK = 2 : 3$, így $EB : ED = 2 : 3$. Az AED háromszög hasonló az FEB háromszöghöz (Miért?), a hasonlósági arány $DE : EB = 3 : 2$. Így $AE : EF = 3 : 2$, amiből $EF = AE \cdot \frac{2}{3}$, tehát $EF = \frac{4}{3}$ egység.

M. 41.

a) Az $ACBD$ négyszög C és D szemközti csúcsainál fekvő szögek 90°-osak, összegük 180°, tehát a négyszög húrnégyszög. Mivel $AD = BD$ (miért?), ezért a rövidebb AD és BD ívek egyenlők, így az ívekhez tartozó ACD, BCD kerületi szögek is egyenlők, azaz CD valóban szögfelezője az ACD szögnek.

b) Pontosan akkor van minden α-ra megoldása az egyenletnek, ha diszkriminánsa pozitív vagy nulla. Most $D = (\sin\alpha - 1)^2 + 2\cos^2\alpha \geqq 0$ minden α-ra teljesül, hiszen az összeg mindkét tagja pozitív vagy nulla. A két gyök akkor és csakis akkor egyenlő, ha $D = 0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha = 1$ *és* $\cos\alpha = 0$, azaz $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol n tetszőleges egész szám.