3. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyekre az

$$x^4 + 4 = py^4$$

egyenlet megoldható az egész számok körében.

Megoldás. $p = 2$ esetén py^4 páros szám, így szükségképpen x is az. Ekkor az egyenlet baloldala 4-gyel osztható, ezért y-nak is párosnak kell lennie. Ha x és y is páros szám, akkor $16 \mid x^4$ és $16 \mid y^4$, ami azt jelentené, hogy az egyenlet baloldala 16-tal osztva 4 maradékot adna, míg a jobboldal 16-tal osztható lenne, vagyis az egyenlőség nem állhatna fenn. 1 pont

Ha p páratlan prímszám, akkor x és y különböző paritása esetén az egyenlet két oldalán is különböző paritású szám állna, vagyis ez az eset nem valósulhat meg. Ha x és y is páros lenne, akkor a korábbiak szerint a 16-tal való osztási maradékok nem egyeznének meg az egyenlet két oldalán szereplő kifejezéseknél. Így a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy p, x és y egyaránt páratlan szám legyen. 1 pont

Írjuk fel az egyenletet az alábbi formában:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = py^4,$$

$$\left(x^2 + 2\right)^2 - (2x)^2 = py^4,$$

$$\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right) = py^4.$$ 2 pont

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy az egyenlőség bal oldalán szereplő szorzótényezők legnagyobb pozitív közös osztója 1.

Ha $d \mid x^2 + 2x + 2$ és $d \mid x^2 - 2x + 2$ ($d \in \mathbb{N}$), akkor $d \mid \left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(x^2 - 2x + 2\right) = 4x$.

Mivel a vizsgált tényezők páratlan x esetén páratlan számok, ezért d is az, ami azt jelenti, hogy $d \mid x$. Ezt kihasználva $d \mid x^2 + 2x$ és $d \mid \left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(x^2 + 2x\right) = 2$. Mivel d páratlan szám, ezért d valóban csak 1 lehet. 2 pont

Felhasználva, hogy $x^2 - 2x + 2$ és $x^2 + 2x + 2$ legnagyobb közös osztója 1, két esetet vizsgálhatunk:

1. eset: Léteznek olyan a, b természetes számok, melyekre $(a; b) = 1$ és

$$x^2 - 2x + 2 = a^4 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 2 = pb^4.$$

Ekkor

$$(x-1)^2 + 1 = \left(a^2\right)^2 \quad \text{és} \quad (x+1)^2 + 1 = pb^4.$$

Mivel az $\left(a^2\right)^2$ és $(x-1)^2$ négyzetszámok különbsége 1, ezért $a^4 = 1$ és $(x-1)^2 = 0$, amiből $a = 1$ és $x = 1$. Ezen értékeket a másik egyenletbe helyettesítve $b = 1$ és $p = 5$. 2 pont

2. eset: Léteznek olyan c, d természetes számok, melyekre $(c; d) = 1$ és

$$x^2 - 2x + 2 = pc^4 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 2 = d^4.$$

Ekkor

$$(x-1)^2 + 1 = pc^4 \quad \text{és} \quad (x+1)^2 + 1 = \left(d^2\right)^2.$$

Mivel a $\left(d^2\right)^2$ és $(x+1)^2$ négyzetszámok különbsége 1, ezért $d^4 = 1$ és $(x+1)^2 = 0$, amiből $d = 1$ és $x = -1$. Ezen értékeket a másik egyenletbe helyettesítve $c = 1$ és $p = 5$. 1 pont

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az egyenlet a feltételeknek megfelelően csak $p = 5$ esetén oldható meg. Ekkor az egyenlet x, y-ra adódó megoldásai az $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ és $(-1; -1)$ számpárok. 1 pont