

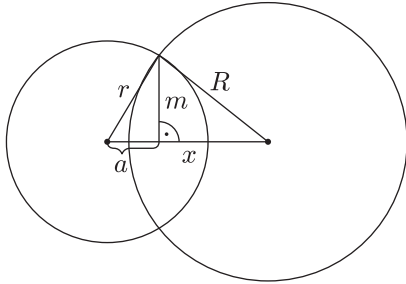
4. Két, egy síkban lévő, egymást metsző kör középpontjainak távolsága 12 egység. Mindkét kör sugarának hossza egész szám. A metszéspontjukat összekötő egyenes a középpontjaik által meghatározott szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás. Használjuk a következő ábra jelöléseit!

Helyes ábra használható jelölésekkel.

1 pont



Jelölje r és R a körök sugarát, x a középpontok távolságát, m pedig a metszéspontokat összekötő szakasz felét!

Nyilvánvaló, hogy a metszéspontokat összekötő szakasz merőleges a középpontokat összekötő szakaszra, így két derékszögű háromszög keletkezik.

Írjuk fel ezekre Pitagorasz tételét!

$$r^2 = a^2 + m^2,$$

$$R^2 = (x - a)^2 + m^2.$$

1 pont

Az egyenleteket kivonva egymásból a következő összefüggéshez jutunk:

$$R^2 - r^2 = x^2 - 2ax,$$

$$(R - r)(R + r) = x(x - 2a).$$

Mivel: $x = 12$; $a = 4$; $x - a = 8$, behelyettesítés után adódik:

$$(R - r)(R + r) = 48.$$

1 pont

A 48-at két tényezőre bontva öt eset adódik:

$$1 \cdot 48, \quad 2 \cdot 24, \quad 3 \cdot 16, \quad 4 \cdot 12 \quad \text{és} \quad 6 \cdot 8.$$

Az öt eset felismerése.

1 pont

1 · 48 ekkor $R = 24,5$ és $r = 23,5$ (a sugarak nem egészek),

2 · 24 ekkor $R = 13$ és $r = 11$,

3 · 16 ekkor $R = 9,5$ és $r = 6,5$ (a sugarak nem egészek),

4 · 12 ekkor $R = 8$ és $r = 4$ (a körök érintik egymást),

6 · 8 ekkor $R = 7$ és $r = 1$ (a körök nem metszik egymást).

A megoldást nem jelentő esetek kizárása magyarázattal.

2 pont

(Ha magyarázat nélkül jelennek meg az esetek, illetve nem jelenik meg minden eset, akkor ez a 2 pont bontható.)

A feladat feltételeinek megfelelő megoldás tehát: $R = 13$ és $r = 11$.

A helyes megoldás megadása.

1 pont

Összesen: 7 pont