5. Hány rendezett (x, y, z) valós számhármas megoldása van az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66. \end{cases}$$

Megoldás. Az első egyenletből fejezzük ki z-t, majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$z = 11 - x - y$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = x^2 + 2y^2 + 3(11 - x - y)^2 = 66, \qquad \text{1 pont}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3\big(121 + x^2 + y^2 - 22x - 22y + 2xy\big) = 66,$$

$$4x^2 + 5y^2 + 297 - 66x - 66y + 6xy = 0. \qquad \text{1 pont}$$

Tekintsük ezt egy x-ben másodfokú y paraméterű egyenletnek. 1 pont

Rendezés után:

(I) $$4x^2 + 6(y - 11)x + \big(5y^2 - 66y + 297\big) = 0.$$

Ha az eredeti egyenletrendszernek van valós megoldása, akkor ennek a másodfokú egyenletnek is, ez utóbbi pontosan akkor áll fenn, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz

$$D = \big(6(y - 11)\big)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \big(5y^2 - 66y + 297\big) \geqq 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$D = 36\big(y^2 - 22y + 121\big) - 16\big(5y^2 - 66y + 297\big) =$$

$$= 4 \cdot \Big(9\big(y^2 - 22y + 121\big) - 4\big(5y^2 - 66y + 297\big)\Big) =$$

$$= 4 \cdot \big(-11y^2 + 66y - 99\big) = -44 \cdot \big(y^2 - 6y + 9\big) = -44 \cdot (y - 3)^2 \geqq 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $(y - 3)^2 = 0$, azaz $y = 3$. 2 pont

Ezt (I)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $4x^2 - 48x + 144 = 0$, aminek egyetlen megoldása az $x = 6$.

Mindezek felhasználásával $z = 11 - x - y = 11 - 6 - 3 = 2$, tehát egyetlen ilyen valós számhármas létezhet, a $(6, 3, 2)$. 1 pont

A megoldás kielégíti az egyenletrendszert.

Összesen: 7 pont