

3. Egy halmaz elemei olyan pozitív egész számok, amelyek oszthatóak az 5, 11, 23, 31 prímszámok mindegyikével, de más prímszámokkal nem. A halmaz bármely két elemének a szorzata nem négyzetszám. Mennyi az ilyen halmazok elemszámának maximuma?

Megoldás. Vegyük a halmaz minden elemének prímtényező felbontását. Két elem szorzata akkor lesz négyzetszám, ha a szorzatban minden kitevő páros. 1 pont

Páros számot két páros vagy két páratlan összegeként kaphatunk. 1 pont

Ezért ha két elemben mind a négy kitevőnek megegyezik a paritása, akkor a szorzat négyzetszám. 2 pont

Ha két elem esetén legalább egy kitevőnek más a paritása, akkor a szorzat nem négyzetszám. 1 pont

Ezért minden elemben a kitevőknél kétféleképpen dönthetünk, lehet páros vagy páratlan. 1 pont

Ezért az ilyen halmazok elemszámának maximuma $2^4 = 16$. 1 pont

Összesen: 7 pont