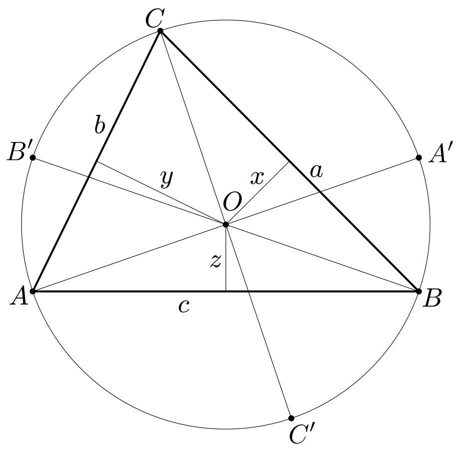
2. Az ABC háromszög csúcsait a köré írt kör O középpontjára tükrözve kapjuk az A', B', C' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $AC'BA'CB'$ hatszög oldalainak négyzetösszege egyenlő a középpontnak a háromszög oldalaitól mért távolságai négyzetösszegének nyolcszorosával.

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit és legyen r a háromszög köré írt kör sugara!

CAC', $C'BC$, ABA', $A'CA$, BCB', $B'AB$ szögek Thalész tétele értelmében derékszögek. 1 pont

A tükrözés miatt $AB' = A'B$, $AC' = A'C$ és $BC' = B'C$. 1 pont

A megfelelő derékszögű háromszögekben felírjuk Pitagorasz tételét:

$$(AC')^2 = (A'C)^2 = 4r^2 - b^2;$$
$$(BC')^2 = (B'C)^2 = 4r^2 - a^2;$$
$$(AB')^2 = (A'B)^2 = 4r^2 - c^2.$$
2 pont

Így a hatszög oldalainak négyzetösszege: $24r^2 - 2\big(a^2 + b^2 + c^2\big)$. 1 pont

Szintén Pitagorasz tétele alapján:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} + r^2 - \frac{b^2}{4} + r^2 - \frac{c^2}{4}.$$
1 pont

Ekkor: $8\big(x^2 + y^2 + z^2\big) = 24r^2 - 2\big(a^2 + b^2 + c^2\big)$. 1 pont

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Összesen: 7 pont