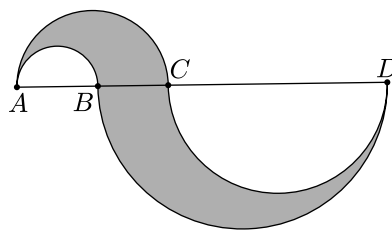


3. Az AB , AC , BD és CD szakaszok, mint átmérők felé félköríveket rajzoltunk az ábrán látható módon. Fejezzük ki a színezett rész területét a és b segítségével, ha $AD = a$ és $BC = b$!



Megoldás. Jelölje r_{BD} a BD , r_{CD} a CD , r_{AC} az AC , r_{AB} az AB átmérőkhöz tartozó sugarat.

Ekkor a keresett terület:

$$T = \frac{r_{BD}^2 \pi}{2} - \frac{r_{CD}^2 \pi}{2} + \frac{r_{AC}^2 \pi}{2} - \frac{r_{AB}^2 \pi}{2}. \quad 2 \text{ pont}$$

Alakítsuk át a területet, mivel a sugár az átmérő fele, és a közös π -t és a nevezőben lévő 2-t kiemelhetjük:

$$T = \frac{\pi}{8} (BD^2 - CD^2 + AC^2 - AB^2). \quad 1 \text{ pont}$$

Legyen $AB = x$. Ekkor

$$T = \frac{\pi}{8} ((a-x)^2 - (a-b-x)^2 + (x+b)^2 - x^2). \quad 1 \text{ pont}$$

Végezzük el a négyzetre emeléseket, és vonjunk össze; vagy az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot felhasználva hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$T = \frac{\pi}{8} ((a-x - (a-b-x))(a-x + (a-b-x)) + (x+b-x)(x+b+x)),$$

$$T = \frac{\pi}{8} (b(2a-2x-b) + b(2x+b)),$$

$$T = \frac{\pi}{8} (2ab), \quad 2 \text{ pont}$$

azaz a keresett terület $T = \frac{ab\pi}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont