

5. Tekintsük a következő 99 darab egyenletből álló 99 változós egyenletrendszert!

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 + a_3 = 2, \\ a_3 + a_4 = 3, \\ \vdots \\ a_{98} + a_{99} = 98, \\ a_{99} + a_1 = 99. \end{array} \right.$$

Mennyi a következő összeg pontos értéke?

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots + a_{97} - a_{98} + a_{99}.$$

Megoldás. Vonjuk ki rendre a párosadik sorszámú egyenletekből az előző egyenleteket!

A második egyenletből kivonva az első adódik:

$$a_3 - a_1 = 1 \rightarrow a_3 = a_1 + 1.$$

A negyedik egyenletből kivonva a harmadikat adódik:

$$a_5 - a_3 = 1 \rightarrow a_5 = a_3 + 1 = a_1 + 2.$$

\vdots

A 98-adik egyenletből kivonva a 97-ediket:

$$a_{99} - a_{97} = 1 \rightarrow a_{99} = a_{97} + 1 = a_{95} + 2 = \dots = a_3 + 48 = a_1 + 49.$$

Majd hasonlóan vonjuk ki rendre a páratlanadik sorszámú egyenletekből az előző egyenleteket!

A harmadik egyenletből kivonva a második adódik:

$$a_4 - a_2 = 1 \rightarrow a_4 = a_2 + 1.$$

Az ötödik egyenletből kivonva a negyediket adódik:

$$a_6 - a_4 = 1 \rightarrow a_6 = a_4 + 1 = a_2 + 2.$$

\vdots

A 97-edik egyenletből kivonva a 96-odikat:

$$a_{98} - a_{96} = 1 \rightarrow a_{98} = a_{96} + 1 = a_{94} + 2 = \dots = a_4 + 47 = a_2 + 48.$$

Végül a 99-edik egyenletből kivonva a 98-adikat:

$$a_1 - a_{98} = 1 \rightarrow a_1 = a_{98} + 1.$$

Innen adódik (az előző eredményeket összekapcsolva), hogy az a_i -k 99 egymást követő szám:

3 pont

$$\begin{aligned} a_{99} &= a_{97} + 1 = a_{95} + 2 = \dots = a_3 + 48 = a_1 + 49 = a_{98} + 50 = a_{96} + 51 = \\ &= a_{94} + 52 = \dots = a_4 + 97 = a_2 + 98. \end{aligned}$$

Kiszámoljuk a_1 , a_{99} pontos értékét. $a_{99} + a_1 = 99$, és $a_{99} = a_1 + 49 \rightarrow a_1 = 25$, $a_{99} = 74$.

Innen a többi a_i is adódik: -24 -től 74 -ig az egész számok.

2 pont

(Bármilyen módon a helyesen megoldott egyenletrendszer (akár megsejtve a megoldást, és leellenőrizve) 5 pontot érjen!)

A kérdéses összeg sokféleképpen megadható, például:

$$\begin{aligned} S &= (a_{99} - a_{98}) + (a_{97} - a_{96}) + \dots + (a_3 - a_2) + a_1 = 50 + 50 + \dots + 50 + a_1 = \\ &= 49 \cdot 50 + 25 = 50^2 - 25 = 2475. \end{aligned}$$

(Itt azt használtuk ki, hogy az egy zárójelben lévő két szám között az egyenletrendszer megoldása alapján mindig 50 a különbség.)

2 pont.

Vagyis a kérdéses S összeg értéke: $S = 2475$.

Összesen: 7 pont