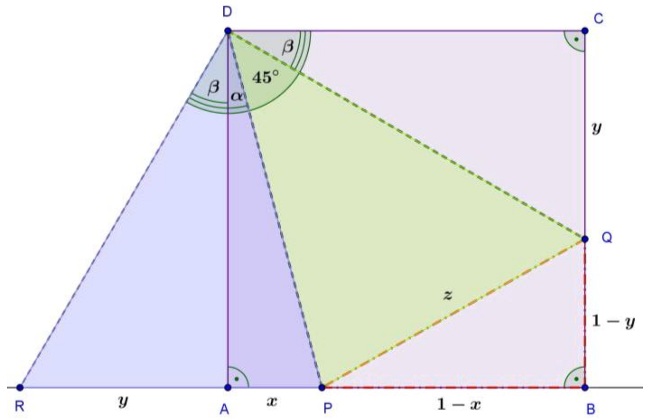
Egy egységnyi oldalú négyzet csúcsai $A;B;C;D$. Az AB oldal tetszőleges pontja P. A Q pont a BC oldalon van, és $PDQ\angle = 45°$.

Mekkora a PBQ háromszög kerülete?

1. Megoldás:

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk (2. ábra), amelyen az $AP = x$, illetve $CQ = y$, $PQ = z$, továbbá az $ADP\angle = \alpha$ és $CDQ\angle = \beta$ jelöléseket választottuk.



2. ábra 1 pont

A választott jelölésekkel egyrészt $BP = 1 - x$ és $BQ = 1 - y$, valamint $\alpha + \beta = 45°$,

továbbá a PBQ háromszög K-val jelölt kerületére $K = 1 - x + 1 - y + z = 2 - x - y + z$. 1 pont

Mérjük fel az AB egyenesre az $AR = y$ szakaszt úgy, hogy a B és R pontokat az A pont elválassza.

Ekkor az ADR és CDQ háromszögekben két-két megfelelő oldal hossza megegyezik, hiszen $AR = CQ = y$ és $AD = CD = 1$, illetve a kiválasztott két-két oldal által bezárt szög mindkét háromszögben derékszög.

Az ADR és CDQ háromszögek tehát egybevágók, és így $ADR\angle = \beta$, valamint $DR = DQ$. 2 pont

Ebből az is következik, hogy a PDR és PDQ háromszögek is egybevágók, mert a PD szakasz közös, és az előbbiek alapján $DR = DQ$, továbbá mindkét háromszögben a kiválasztott oldalak által bezárt szög $\alpha + \beta = 45°$. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy a PDR és PDQ háromszögekben a $PR = x + y$ és a $PQ = z$ szakaszok hossza is egyenlő, azaz $x + y = z$. 2 pont

$, \quad = .$

Ezért a PBQ háromszög K kerülete $K = 2 - x - y + z = 2 - x - y + x + y = 2$, vagyis a PBQ háromszög kerülete 2 hosszúságegység. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a négyzet oldalhossza a, akkor a fentiekhez hasonlóan bizonyítható, hogy $K = 2a$.

2. Megoldás:

A megoldás során az 1. megoldás ábráját és jelöléseit használjuk. 1 pont

Ezekkel a jelölésekkel az ADP háromszögben

$$tg\alpha = \frac{x}{1} = x,$$

a CDQ háromszögben pedig

$$tg\beta = \frac{y}{1} = y.$$

1 pont

Tudjuk, hogy $\alpha + \beta = 45°$, ezért a $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$ trigonometrikus összegzési tételből kapjuk, hogy

$$tg45° = \frac{x + y}{1 - xy},$$

mivel azonban

$$tg45° = 1,$$

ezért

$$\frac{x + y}{1 - xy} = 1,$$

amiből

(1) $$x + y = 1 - xy$$

következik. 2 pont

A PBQ háromszögre felírt Pitagorasz-tételből azt kapjuk, hogy $z^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$,

ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel:

(2) $$z^2 = x^2 + y^2 + 2 - 2x - 2y.$$

A (2) összefüggésből az következik, hogy

(3) $$z^2 = x^2 + y^2 + 2 - 2 \cdot (x+y).$$

(3)-ba (1)-et behelyettesítve

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2 - 2 \cdot (1-xy),$$

innen pedig a műveletek elvégzésével és rendezéssel

(4) $$z^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$ 2 pont

(4) éppen azt jelenti, hogy

$$z^2 = (x+y)^2,$$

és mivel $x; y; z$ pozitív számok, ezért

(5) $$z = x + y.$$ 2 pont

A PBQ háromszög kerülete tehát

$$K = 1 - x + 1 - y + z,$$

amelyből (5) felhasználásával kapjuk, hogy

$$K = 1 - x + 1 - y + x + y = 2.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont