4. Milyen a valós paraméter esetén lesz pontosan két valós gyöke a

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-(a+2)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2a=0$$

egyenletnek a $[0;2\pi]$ intervallumban?

<u>Megoldás:</u>

Vezessük be az $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ jelölést!

Az egyenlet a következő alakba írható:

(1) $$y^2-(a+2)\cdot y+2a=0\,.$$ 1 pont

Az (1) egyenlet az y ismeretlenre felírt paraméteres másodfokú egyenlet, melynek diszkriminánsa, $D=(a+2)^2-8a$. Átalakítással kapjuk, hogy

(2) $$D=(a-2)^2\,.$$

(2) azt jelenti, hogy az (1) egyenletnek mindig van valós megoldása.

A megoldóképletből kapjuk, hogy ezek

$$y_1=a$$

és

$$y_2=2\,.$$ 1 pont

Mivel

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

és

$$-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$$

ezért

$$y_2=2$$

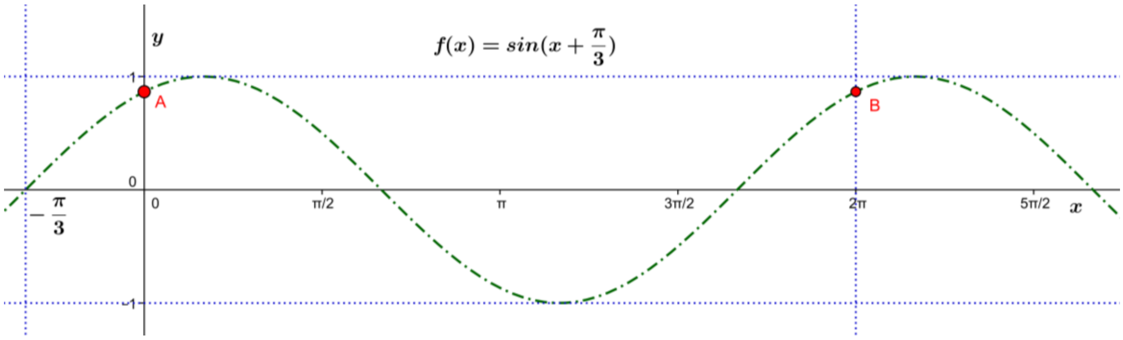
nem lehetséges. 1 pont

Eszerint csak

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a$$

állhat fenn.

Tekintsük most az $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ függvény grafikonját a $[0; 2\pi]$ intervallumon (2. ábra).



2. ábra — 1 pont

A 2. ábrán jelzett A és B pontok koordinátái

$$A\left(0; \sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ és } B\left(2\pi; \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

azaz

$$A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ és } B\left(2\pi; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Az A és B pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ez az egyenes a $[0; 2\pi]$ intervallumon három pontban metszi az $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ függvény grafikonját, ezért a $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletnek a $[0; 2\pi]$ intervallumban három valós megoldása van, így $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nem lehetséges. — 2 pont

Nem állhat fenn

$$a = 1 \text{ és } a = -1,$$

sem, mert ezekre az értékekre

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ illetve } \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

egyenleteknek a $[0; 2\pi]$ intervallumban egy-egy valós megoldása van. — 2 pont

Az ábra alapján belátható, hogy az $a \in [-1; 1]$ intervallumban az

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ a = 1 \text{ és } a = -1$$

értékek kivételével minden a valós számra a

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = a$$

egyenletnek pontosan két valós megoldása van. Ezek az a valós paraméterek a feladat megoldásai. — 2 pont

Összesen: 10 pont