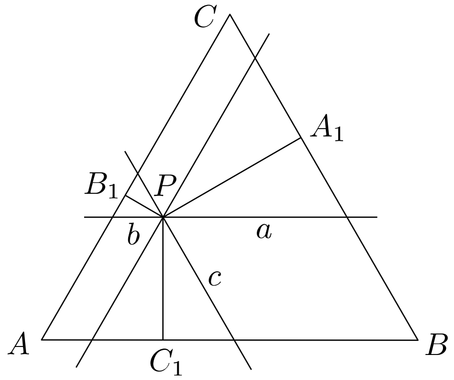
**3. feladat**

Legyen $P$ az $ABC$ szabályos háromszög belső pontja, továbbá $A_1$, $B_1$ és $C_1$ a $P$ pont merőleges vetülete rendre a $BC$, $CA$, illetve $AB$ oldalon. Bizonyítsuk be, hogy

$$AC_1 \cdot BA_1 + BA_1 \cdot CB_1 + CB_1 \cdot AC_1 \ = \ C_1B \cdot A_1C + A_1C \cdot B_1A + B_1A \cdot C_1B\,.$$

**Első megoldás**: Húzzunk a $P$ ponton keresztül egyeneseket az $ABC$ háromszög oldalaival párhuzamosan. Ezek a háromszöget földarabolják három kisebb szabályos háromszögre és három parallelogrammára. (2 pont)




Az $A$, $B$, $C$ csúccsal szemközti kis szabályos háromszög oldalát jelöljük rendre $a$-val, $b$-vel, illetve $c$-vel. Ezek egyúttal a parallelogrammáknak is oldalhosszai, így

$$AC_1 = b + \frac{c}{2}\,, \quad BA_1 = c + \frac{a}{2}\,, \quad CB_1 = a + \frac{b}{2}\,,$$

$$C_1B = \frac{c}{2} + a\,, \quad A_1C = \frac{a}{2} + b\,, \quad B_1A = \frac{b}{2} + c\,. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ezeket a bizonyítandó formulába helyettesítve beszorzás és rendezés után mindkét oldalon

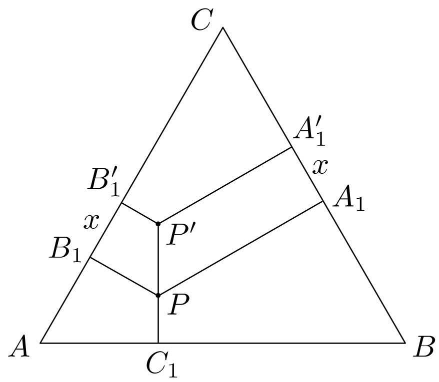
$$\frac{7}{4}(bc + ca + ab) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

adódik, tehát a két oldal egyenlő. (2 pont)

**Második megoldás**: A bizonyítandó egyenlőség abban az esetben nyilvánvalóan igaz, amikor $P$ éppen a háromszög $O$ középpontjával esik egybe, hiszen akkor a benne szereplő összes szakasz egyenlő hosszú.

Legyen most $P$ és $P'$ a háromszög két olyan belső pontja, amelyekkel a $PP'$ egyenes a háromszög valamelyik oldalára merőleges. Bebizonyítjuk, hogy ha a feladat állítása igaz $P$ és $P'$ közül az egyikre, akkor a másikra is igaz. (2 pont)

Ebből már következik, hogy az állítás minden $P$-re igaz, ugyanis az $O$ középpontból tetszőleges másik $P$ belső pontba el tudunk jutni olyan elmozdítások egymásutánjával, amelyeknél a pont valamelyik oldalra merőleges irányban mozdul el. Valóban, ha $O$-ból egy adott $P$ belső pontba akarunk eljutni, akkor $P$-ből húzzunk valamelyik oldalra merőleges egyenest, ez biztosan metszi a háromszög valamelyik szimmetriatengelyét egy $P'$ belső pontban, és ekkor $O$-ból először $P'$-be lépve legfeljebb két lépésben eljutunk $P$-be. (1 pont)




Tegyük fel tehát, hogy $PP'$ merőleges egy oldalegyenesre. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $PP' \perp AB$, és hogy $P'$ van távolabb $AB$-től. Legyenek $A_1'$, $B_1'$ és $C_1'$ a $P'$ merőleges vetületei az oldalakon, ekkor $C_1' = C_1$. Az $AC$ és $BC$ oldalegyenesek a $PP'$ egyenessel egyenlő (30°-os) szöget zárnak be, ezért a $PP'$ szakasz vetülete a két oldalon egyenlő. (1 pont)

Legyen $x = A_1A_1' = B_1B_1'$, ezzel a bizonyítandó egyenlőséget $P'$-re vonatkozóan így írhatjuk fel:

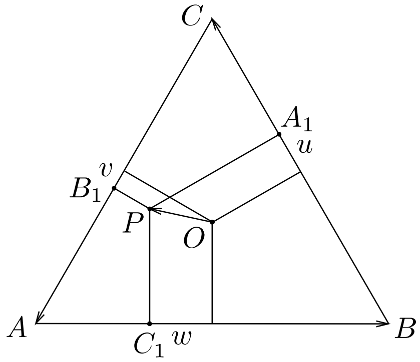
$$\begin{aligned} &AC_1 \cdot (BA_1 + x) + (BA_1 + x) \cdot (CB_1 - x) + (CB_1 - x) \cdot AC_1 = \\ &\qquad = C_1B \cdot (A_1C - x) + (A_1C - x) \cdot (B_1A + x) + (B_1A + x) \cdot C_1B \end{aligned}$$

Beszorzás után az $x$-et nem tartalmazó tagok a $P$-re felírt egyenlőséget adják. Az $x$-et tartalmazó tagok részben kiesnek, a megmaradók pedig $(CB_1 - BA_1) \cdot x = (A_1C - B_1A) \cdot x$ alakban írhatók. Ez az egyenlőség valóban fennáll, hiszen $CB_1 + B_1A = BA_1 + A_1C$ a háromszög oldalhossza. Tehát a feladat állítása akkor és csak akkor igaz a $P'$ pontra, ha $P$-re igaz. (3 pont)

**Harmadik megoldás**: Válasszuk a háromszög oldalát 2 egységnyinek, és jelöljük $u$-val, $v$-vel, $w$-vel az $A_1$, $B_1$, illetve $C_1$ pont előjeles távolságát a megfelelő oldal felezőpontjától, az előjelet a háromszög körüljárása irányában pozitívnak tekintve. Ekkor az $AC_1 = 1+w$, $C_1B = 1-w$ stb. formulákat fölhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség az

$$(1+w)(1+u)+(1+u)(1+v)+(1+v)(1+w) = (1-w)(1-u)+(1-u)(1-v)+(1-v)(1-w)$$

alakot ölti. Beszorozva és átrendezve azt kapjuk, hogy ez az egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha $u+v+w=0$. (3 pont)




Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy $u+v+w=0$. Ehhez tekintsük az $\overrightarrow{OP}$ vektort, ahol $O$ az $ABC$ háromszög középpontja, és vetítsük az oldalegyenesekre. Az $u$, $v$, $w$ számok éppen a vetületek előjeles hosszával egyenlők, ezért előállíthatók $\overrightarrow{OP}$ és az oldalvektorok skaláris szorzatai segítségével:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = u \cdot |\overrightarrow{BC}| = 2u\,,$$

és hasonlóan $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CA} = 2v$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 2w$. Emiatt valóban

$$u+v+w = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{0} = 0\,. \qquad \text{(4 pont)}$$