3. Oldja meg az $x^2 + y^2 - 8z = 14$ egyenletet az egész számok halmazán!

I. Megoldás:

Az $x; y$ egész számok nem lehetnek egyszerre párosak, mert akkor x^2 és y^2 is 4-gyel osztható, így az egyenlet bal oldala 4-gyel osztható, miközben a jobb oldal nem osztható 4-gyel. 1 pont

Az sem állhat fenn, hogy az $x; y$ egész számok közül az egyik páros, a másik páratlan, mert ekkor az egyenlet bal oldala páratlan egész szám, míg a jobb oldala páros. 1 pont

Ezért csak az lehetséges, hogy az $x; y$ egész számok mindegyike páratlan. 1 pont

Legyen ezért $x = 2k + 1$ és $y = 2m + 1$, ahol $k; m \in Z$. 1 pont

Eszerint $4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 - 8z = 14$, ahonnan rendezéssel:

(1) $4k^2 + 4k + 4m^2 + 4m - 8z = 12$. 1 pont

(1) mindkét oldalát 4-gyel osztva azt kapjuk, hogy $k^2 + k + m^2 + m - 2z = 3$, amelyből kiemelés után

(2) $k \cdot (k+1) + m \cdot (m+1) - 2z = 3$. 2 pont

A k és $k+1$, illetve m és $m+1$ közvetlen egymás utáni egész számok, ezért $k \cdot (k+1)$, illetve $m \cdot (m+1)$ páros számok. 2 pont

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $2z$ is páros egész szám, ezért (2) bal oldala páros, jobb oldala pedig páratlan egész szám. Ez nem lehetséges, tehát (2) nem teljesülhet egyetlen $k; m; z$ egész számokból álló számhármasra sem.

Minden esetet megvizsgáltunk, megoldást egyetlen esetben sem kaptunk, az $x^2 + y^2 - 8z = 14$ egyenletnek tehát nincs megoldása az egészekből álló számhármasok halmazán. 1 pont

Összesen: 10 pont

II. Megoldás:

Az $x; y$ egész számok mindegyike páratlan. (előző megoldásban részletezve) 3 pont

Átrendezve az egyenletet:

$$x^2 - 1 + y^2 - 1 - 8z = 12$$

$$(x-1)(x+1) + (y-1)(y+1) - 8z = 12$$

Itt a két szorzatban két egymás utáni páros szám áll, tehát mindkét szorzat osztható 8-cal. 2 pont

A bal oldal egy 8-cal osztható szám ***z*** értékétől függetlenül. 3 pont

A jobb oldalon a 12 nem osztható 8-cal. 1 pont

Tehát nincs megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont