1. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\log_5(x+4)\cdot\log_5(x-1)=\log_5\left((x+4)^2\cdot(x-1)\right)-2$$

egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

A logaritmus értelmezése miatt $x>-4$, illetve $x>1$, ezért a feladat megoldásait az $A=\left]1;\infty\right[$ halmazon keressük. 1 pont

Az egyenlet jobb oldala a logaritmus azonosságai miatt átalakítható, így

(1) $\log_5(x+4)\cdot\log_5(x-1)=2\cdot\log_5(x+4)+\log_5(x-1)-2$. 2 pont

Végezzük el az $a=\log_5(x+4)$ és a $b=\log_5(x-1)$ helyettesítéseket, ezekkel (1) a következő alakba írható:

(2) $a\cdot b=2a+b-2$. 2 pont

A (2) egyenlet rendezésével és kiemeléssel:

(3) $(a-1)\cdot(b-2)=0$.

A (3) egyenlet szerint $a=1$ vagy $b=2$ lehetséges. 2 pont

Ha $a=1$, akkor $\log_5(x+4)=1$, ebből a logaritmus definíciója szerint $x+4=5$, azaz $x=1$ következik. Ez a szám azonban nem eleme az $A=\left]1;\infty\right[$ halmaznak, ezért nem megoldás. 1 pont

Ha pedig $b=2$, akkor $\log_5(x-1)=2$, innen a logaritmus definíciója alapján azt kapjuk, hogy $x-1=25$, azaz $x=26$. 1 pont

Ez a szám megfelel a feladat feltételeinek és behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy valóban megoldása a feladatnak. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont