1. feladat: Adja meg az összes olyan (x, y) valós számpárt, amely megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

I. Megoldás: Sem x, sem y nem lehet nulla, mert akkor a második egyenlet nem értelmezhető. (1 pont)

Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá, a második egyenletben pedig hozzunk közös nevezőre

$$\begin{cases} xy(x + y) = 6 \\ \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{3}{2} \end{cases}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Vezessük be az $u = x + y$ és $v = xy$ új ismeretleneket. Behelyettesítés után az egyenletrendszer

$$\begin{cases} vu = 6 \\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \text{(1 pont)}$$

alakban írható. A két egyenlet összeszorzásával

$$u^2 = 9,$$

$$u_1 = 3 \quad \text{és} \quad u_2 = -3. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az ezekhez tartozó v értékek

$$v_1 = 2, \quad \text{illetve} \quad v_2 = -2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletekbe kapjuk, hogy

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -2 \end{cases}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A Viete-formulák felhasználásával x és y az

$$a^2 - 3a + 2 = 0, \quad \text{illetve az} \quad a^2 + 3a - 2 = 0 \qquad \text{(1 pont)}$$

egyenlet gyökei. Az első egyenletből

$$x_1 = 2, y_1 = 1, \quad \text{illetve} \quad x_2 = 1, y_2 = 2, \qquad \text{(1 pont)}$$

míg a másik egyenletből

$$x_3 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, \, y_3 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \quad \text{illetve} \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \, y_4 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kapott valós számpárok mind megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Sem x, sem y nem lehet nulla, mert akkor a második egyenletn nem értelmezhető. (1 pont)

Fejezzük ki a második egyenletből y-t:

$$y = \frac{2x}{3x-2}, \qquad \text{(1 pont)}$$

és helyettesítsük be az első egyenletbe

$$x^2 \cdot \frac{2x}{3x-2} + x \cdot \left(\frac{2x}{3x-2}\right)^2 = 6. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az egyenletet $(3x-2)^2$-tel szorozva, rendezés után kapjuk:

$$x^2 \cdot 2x \cdot (3x-2) + x \cdot (2x)^2 = 6 \cdot (3x-2)^2$$

$$x^4 = (3x-2)^2 \qquad \text{(1 pont)}$$

Szorzattá alakítva:

$$x^4 - (3x-2)^2 = 0$$

$$\left(x^2+3x-2\right)\left(x^2-3x+2\right) = 0\,, \qquad \text{(1 pont)}$$

tehát az

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 + 3x - 2 = 0 \qquad \text{(1 pont)}$$

Az első egyenletből

$$x_1 = 2, y_1 = 1 \quad \text{illetve} \quad x_2 = 1, y_2 = 2, \qquad \text{(1 pont)}$$

míg a másik egyenletből

$$x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \; y_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \quad \text{illetve} \quad x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \; y_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A kapott valós számpárok mind megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. (1 pont)

Összesen: 10 pont