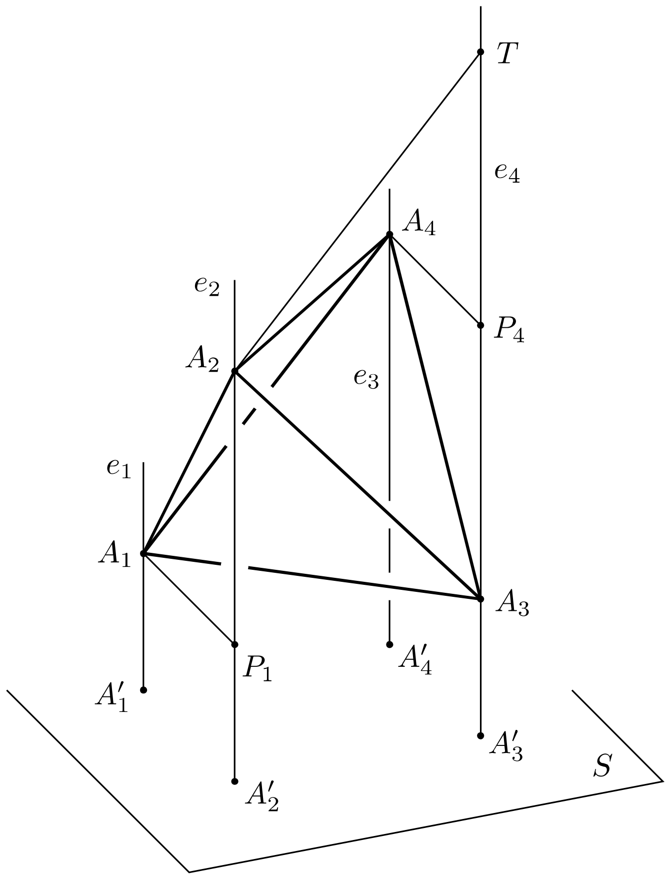
4. feladat

Vetítsünk egy szabályos tetraédert merőlegesen a tér valamely síkjára. Mutassuk meg, hogy ha a tetraéder vetülete paralelogramma, akkor négyzet.

Első megoldás: A tetraéder csúcsait jelölje A_1, A_2, A_3, A_4, merőleges vetületeiket az S síkra A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 úgy, hogy ezek ebben a körüljárási sorrendben paralelogrammát alkossanak. Feltehetjük, hogy a tetraéder mindegyik csúcsa S-nek ugyanazon az oldalán van, mert a síkot önmagával párhuzamosan eltolva az eredetivel egybevágó vetületet kapunk. Legyen d_i az A_i távolsága S-től, e_i az A'_i-ben S-re állított merőleges, P_1 az A_1 merőleges vetülete az e_2 egyenesre, P_4 pedig az A_4 merőleges vetülete az e_3 egyenesre.

Az A_1P_1, $A'_1A'_2$, $A'_4A'_3$, A_4P_4 irányított szakaszok párhuzamosak, egyenlő hosszúak és egyenlő állásúak. Tekintsük azt az eltolást, amely A_1-et A_4-be, és így P_1-et P_4-be viszi. Ennél az e_2 egyenes e_3-ba megy (hiszen ez a P_4-en át e_2-vel húzott párhuzamos). Ezért az A_2 pont képe rajta van e_3-on, távolsága A_4-től pedig a tetraéder élhossza. Ilyen pont (legfeljebb) kettő van: az egyik az A_3, a másik pedig az A_3 pont T tükörképe P_4-re. De A_2 nem mehet A_3-ba, mert akkor A_2A_3 párhuzamos lenne A_1A_4-gyel, és így a tetraéder csúcsai egy síkban lennének. Ezért A_2 képe T, azaz $d_2 - d_1 = d_4 - d_3$ (az A_2P_1, illetve a TP_4 hossza). (3 pont)



A paralelogramma másik párhuzamos oldalpárját használva az analóg gondolatmenet azt adja, hogy $d_4 - d_1 = d_2 - d_3$. A két egyenletből $d_2 = d_4$ és $d_1 = d_3$ adódik. Ezért A_3-nak az e_2 egyenesre eső merőleges vetülete a P_1 ponttal esik egybe. Az $A_1P_1A_2$ és az $A_3P_1A_2$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert átfogóik a tetraéder élei, amik egyenlők, egy-egy befogójuk pedig közös. Ezért a másik két befogó hossza is egyenlő, azaz $A_1P_1 = A_3P_1$. Emiatt $A'_1A'_2 = A'_3A'_2$, és ezzel beláttuk, hogy az $A'_1A'_2A'_3A'_4$ paralelogramma rombusz.

(3 pont)

Mivel $d_1 = d_3$, ezért az A_1A_3 szakasz párhuzamos az S síkkal, és így a vetületének hossza a tetraéder élhossza. Ugyanez érvényes az A_2A_4 szakaszra is, és így a rombusz átlói egyenlők, tehát négyzetről van szó. (1 pont)

Második megoldás: Foglaljuk a szabályos tetraédert egy kockába: legyenek a kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, a szabályos tetraéder csúcsaiba pedig mutassanak a $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektorok. (2 pont)

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok merőleges vetületei a megadott síkra legyenek $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$; ekkor a tetraéder csúcsaiba mutató vektorok vetülete rendre $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$, $\mathbf{a}'+\mathbf{c}'$ és $\mathbf{b}'+\mathbf{c}'$. Ezek a vektorok a paralelogramma egyik csúcsából mutatnak a paralelogramma csúcsaiba. (2 pont)

Válasszuk meg a jelölést úgy, hogy a paralelogramma egyik oldalvektora $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$ legyen. Ekkor a vele szemben fekvő oldalvektor $(\mathbf{b}'+\mathbf{c}')-(\mathbf{a}'+\mathbf{c}')=\mathbf{b}'-\mathbf{a}'$. Ez a két vektor csak akkor lehet egyenlő vagy egymás (-1)-szerese, ha $\mathbf{a}'=\mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b}'=\mathbf{0}$, vagyis ha a kocka egy élének két végpontja ugyanarra a pontra vetül. (1 pont)

Ekkor pedig a kocka vetülete – és vele együtt a szabályos tetraéder vetülete is – négyzet. (2 pont)

Harmadik megoldás: A vetületparalelogramma két átlója a tetraéder két kitérő élének a vetülete. Az átlók felezőpontja egybeesik, ezért a vetítés iránya párhuzamos a két kitérő él felezőpontját összekötő egyenessel, azaz a tetraéder egyik éltengelyével. (2 pont)

A szabályos tetraédert az éltengely körüli $90°$-os forgatás olyan tetraéderbe viszi, amely egy az éltengelyre merőleges síkra vonatkozó tükrözéssel is előállítható az eredeti tetraéderből. A két tetraédernek tehát azonos a vetülete. (3 pont)

A vetület ezért olyan négyszög, amelyet az átlói metszéspontja körüli $90°$-os forgatás önmagába visz, tehát négyzet. (2 pont)