Bevezető feladatok generátorfüggvényre

A diákoknak gyakran bemutatjuk a Pascal háromszög és a polinomok egyszerű kapcsolatát, a binomiális-tételt:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Hasznos, ha a Pascal háromszöggel kapcsolatos más összefüggések említésekor is előkerülnek a polinomok.

1. feladat
Rajzoljunk egy „nagy” Pascal háromszöget (legalább 10 sort)! Adjuk össze a Pascal háromszög n-edik sorában az elemek négyzetösszegét az $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ esetekben! Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg összefüggést, bizonyítsunk!

Segítő lökés
Keressük meg az eredményt a Pascal háromszögben.

Megoldás

Tétel:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}.$$

Az összefüggés szépen bizonyítható kombinatorikusan. Egy lehetőség, ha tekintjük a négyzetrács egy négyzetnyi darabját és összeszámoljuk, hogy egyik csúcsából hányféleképpen juthatunk el a szemköztes csúcsba, majd aszerint is összeszámoljuk a lehetőségeket, hogy hol keresztezzük közben a másik két csúcs közti átlót.

Gondolhatunk arra is, hogy n fiú és n lány közül kell kiválasztanunk n embert. Más formulát, de azonos eredményt kapunk, ha figyelembe vesszük a nemeket a választásnál és ha nem vesszük figyelembe.

Az algebrai megközelítésben négyzetreemeljük a $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ összefüggést és meghatározzuk benne x^n együtthatóját a bal oldalon is és a jobb oldalon is.

Az összefüggés és a kombinatorikai valamint az algebrai bizonyítás is általánosítható, teljesül a

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}\binom{m}{s-k} = \binom{n+m}{s}.$$

Most egy téglalap egyik csúcsából a szemköztesbe futó utakat számoljuk össze és azt nézzük, hogy egy bizonyos vonalat hol metsz az út. Vagy n lány és m fiú közül választunk ki s-et. Vagy $(1+x)^{n+m}$ hatványban számoljuk ki x^s együtthatóját közvetlenül a binomiális tételből illetve az $(1+x)^n$, $(1+x)^m$ polinomok kifejtett alakjának összeszorzásából.

2. feladat

Rajzoljunk egy „nagy” Pascal háromszöget (legalább 10 sort)! Adjuk össze a Pascal háromszög n-edik sorában az elemek négyzetösszegét váltakozó előjellel az $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$, $n=6$ esetekben! Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg összefüggést, bizonyítsunk!

Segítő lökés

Keressük meg az eredményt a Pascal háromszögben!

Megoldás

Mivel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(n-k)}$$

és

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k,$$

így a keresett épp x^n együtthatója az $(1+x)^n(1-x)^n$ szorzatban. Másrészt

$$(1+x)^n(1-x)^n = (1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k},$$

így a kérdezett érték zérus, ha n páratlan illetve

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}},$$

ha n páros.

Az előző feladat is általánosítható, ennek végiggondolását az olvasóra bízzuk.

Az alábbi példát és II. megoldását egy hongkongi oktatótól hallottam.

3. feladat

A dobókockát „szabályos”-nak nevezem, ha minden oldalára egyenlő eséllyel esik és „szokásos”-nak, ha rajta az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok vannak, mindegyik egyszer.

Lehet-e két szabályos dobókockára nem szabályosan felírni pozitív egészeket úgy, hogy a két kocka feldobásakor a dobott számok összegének eloszlása ugyanaz legyen, mint két szokásos szabályos dobókocka feldobása esetén?

I. megoldás (*Esetek*)

A 2-t, mint összeget csak úgy kaphatjuk meg, ha mind a két kockán van 1-es és csak úgy kaphatjuk meg pontosan egyféleképpen, ha mind a két kockán pontosan egy 1-es van.

Ezek után a 3-as összeget kétféleképpen kaphatjuk meg pontosan kétféleképpen: vagy mindkét kockán még egy 2-es van, vagy az egyiken nincs 2-es, a másikon pedig két 2-es van:

A) $(1, 2, 2), (1)$; **B)** $(1, 2), (1, 2)$.

A 4-es összeget háromféleképpen kell megkapnunk. Ebben az eddigi számokon kívül csak a 3-asok segíthetnek. Így az alábbi lehetőségeink vannak:
AA) $(1,2,2,3,3,3),(1)$;
AB) $(1,2,2,3,3),(1,3)$;
AC) $(1,2,2,3),(1,3,3)$;
AD) $(1,2,2),(1,3,3,3)$;
BA) $(1,2,3,3),(1,2)$;
BB) $(1,2,3),(1,2,3)$.
Az 5-ös összeget négyféleképpen kell megkapnunk. Ebben az eddigi számokon kívül csak a 4-esek segíthetnek. A lehetőségek:
AAA) $(1,2,2,3,3,3),(1,4,4,4,4)$;
ABA) $(1,2,2,3,3,4),(1,3,4)$;
ABB) $(1,2,2,3,3),(1,3,4,4)$;
ACA) $(1,2,2,3),(1,3,3)$;
AD) $(1,2,2),(1,3,3,3)$; – túl sok 5-ös!
BAA) $(1,2,3,3,4,4),(1,2)$;
BAB) $(1,2,3,3,4),(1,2,4)$;
BAC) $(1,2,3,3),(1,2,4,4)$;
BBA) $(1,2,3,4,4),(1,2,3)$;
BBB) $(1,2,3,4),(1,2,3,4)$;
BBC) $(1,2,3),(1,2,3,4,4)$, mint **BBA)**
A 6-ot összegként ötféleképpen kell megkapnunk. Ebben az eddigi számokon kívül csak a 5-ösök segíthetnek. Így:
AAA) $(1,2,2,3,3,3),(1,4,4,4,4)$ – túl sok 6-os!
ABAA) $(1,2,2,3,3,4),(1,3,4,5)$;
ABB) $(1,2,2,3,3),(1,3,4,4)$; – túl sok 6-os!
ACAA) $(1,2,2,3,5,5),(1,3,3,5)$;
ACAB) $(1,2,2,3,5),(1,3,3,5,5)$;
ACAC) $(1,2,2,3),(1,3,3,5,5,5)$;
BAAA) $(1,2,3,3,4,4),(1,2,5,5,5)$;
BABA) $(1,2,3,3,4,5),(1,2,4,5,5)$;
BABB) $(1,2,3,3,4),(1,2,4,5,5,5)$;
BACA) $(1,2,3,3,5,5),(1,2,4,4,5)$;
BACB) $(1,2,3,3,5),(1,2,4,4,5,5)$;
BBAA) $(1,2,3,4,4,5),(1,2,3,5)$;
BBAB) $(1,2,3,4,4),(1,2,3,5,5)$;
BBBA) $(1,2,3,4,5,5),(1,2,3,4)$;
BBBB) $(1,2,3,4,5),(1,2,3,4,5)$;
BBBC) $(1,2,3,4),(1,2,3,4,5,5)$; – mint **BBBA)**
A 7-es összegnek hatféleképpen kell kijönnie. Ebben az eddigi számokon kívül csak a 6-osok segíthetnek. Így:
ABAAA) $(1,2,2,3,3,4),(1,3,4,5,6)$;
ACAA) $(1,2,2,3,5,5),(1,3,3,5)$; – nem lehetséges.
ACAB) $(1,2,2,3,5),(1,3,3,5,5)$; – nem lehetséges.
ACACA) $(1,2,2,3),(1,3,3,5,5,5)$;
BAAA) $(1,2,3,3,4,4),(1,2,5,5,5)$; – nem lehetséges.

BABAA) $(1,2,3,3,4,5),(1,2,4,5,5,6)$;
BABBA) $(1,2,3,3,4,6),(1,2,4,5,5,5)$;
BACA) $(1,2,3,3,5,5),(1,2,4,4,5)$; – túl sok 7-es.
BACB) $(1,2,3,3,5),(1,2,4,4,5,5)$; – túl sok 7-es.
BBAA) $(1,2,3,4,4,5),(1,2,3,5)$; – nem lehetséges.
BBABA) $(1,2,3,4,4,6),(1,2,3,5,5,6)$;
BBBAA) $(1,2,3,4,5,5),(1,2,3,4,6,6)$;
BBBBA) $(1,2,3,4,5,6),(1,2,3,4,5,6)$;
Az eddigi jó kitöltések így fejezhetők be, illetve ezért nem fejezhetők be:
ABAAAA) $(1,2,2,3,3,4),(1,3,4,5,6,8)$; Jó!
ACACA) $(1,2,2,3),(1,3,3,5,5,5)$; – A 12 vagy nem jön ki vagy háromszor is kijön.
BABAA) $(1,2,3,3,4,5),(1,2,4,5,5,6)$; – A 12 nem jön ki.
BABBA) $(1,2,3,3,4,6),(1,2,4,5,5,5)$; – A 12 nem jön ki.
BBABA) $(1,2,3,4,4,6),(1,2,3,5,5,6)$; – A 10 csak kétszer jön ki.
BBBAA) $(1,2,3,4,5,5),(1,2,3,4,6,6)$; – A 12 nem jön ki.
BBBBA) $(1,2,3,4,5,6),(1,2,3,4,5,6)$. Jó!
Tehát a szokásos dobókockán kívül mégy egy megoldás van:
$(1,2,2,3,3,4),(1,3,4,5,6,8)$.

II. megoldás (*Generátor függvény*)
A szokásos szabályos dobókockához rendeljük a

$$p(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

polinomot. A polinom kitevői a kockán előforduló számoknak felelnek meg. A polinom együtthatói mind 1-esek, ez annak felel meg, hogy mindegyik szám egyszer szerepel a kockán. A p polinom négyzete két kocka együttes feldobásáról „mesél”:

$$p^2(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \cdot \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) =$$

$$x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Az x^8 együtthatója 5, ez épp azt fejezi ki, hogy a 8-as összeg ötféleképpen áll elő. Valóban, ha elvégezzük a fenti szorzást, akkor az alábbi „találkozások” adnak x^8-os tagot:

$$x^2 \cdot x^6, \quad x^3 \cdot x^5, \quad x^4 \cdot x^4, \quad x^5 \cdot x^3, \quad x^6 \cdot x^2.$$

A szorzásnál a kitevők összeadódnak, így a

$$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$$

összeg-előállítások valósulnak meg a kitevőkben. Tehát a szorzatként kapott polinom együtthatói azt mutatják meg, hogy az adott tag kitevője hányféleképpen állítható elő kéttagú összegként az eredeti polinomok előforduló kitevőiből, azaz az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból.

Keressünk most két másik kockát, A-t és B-t. Az A kockán szerepeljenek az n_1, n_2, ... számok, méghozzá n_1 éppen a_1-szer, n_2 pedig a_2-ször, ..., míg a B kockán legyenek az m_1, m_2, ... számok rendre b_1-szer, b_2-ször, ...

Ezek a kitöltések egy-egy polinomot határoznak meg:

$A(x) = a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \ldots$, $\quad B(x) = b_1x^{m_1} + b_2x^{m_2} + \ldots$.

Az a_1, a_2, ..., b_1, b_2 számok itt mind pozitív egészek, azt fejezik ki, hogy bizonyos számok hányszor fordulnak elő a kockán. Az $a_1+a_2+\ldots$ és a $b_1+b_2+\ldots$ összegek az egyes kockákra rákerülő számok számával, azaz a kocka lapjainak számával, tehát 6-tal egyeznek meg. A polinomok nyelvén: $A(1) = B(1) = 6$.

Ha az A, B kockák megfelelnek a feladat feltételeinek, akkor a nekik megfelelő polinomokra

$$A(x)B(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

A jobb oldali polinom így is írható:

$$\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^2 = x^2(x^2 + x + 1)^2(x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2.$$

Az

$$x, \quad (x^2 + x + 1), \quad (x + 1), \quad (x^2 - x + 1) \tag{1}$$

polinomok $\mathbb{Q}[x]$-ben ($\mathbb{R}[x]$-ben is) irreducibilis polinomok. $\mathbb{Q}[x]$-ben is igaz a számelmélet alaptétele. Ráadásul a Gauss lemma kimondja hogy ha egy A egész együtthatós polinom felbomlik két racionális együtthatós polinom szorzatára, akkor ugyanezen polinomok megfelelő számszorosai már olyan egész együtthatós polinomok, amelyek szorzata A. Ezért az $A(x)$, $B(x)$ polinomokat is a (1) polinomok szorzataként kell előállítani.

Az $A(1) = B(1) = 6$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha mindkét polinomban benne van az $(x + 1)$ és az $(x^2 + x + 1)$ tényező. Szükséges még, hogy a konstans tagok 0-k legyenek, az az ne forduljon elő x^0 egyik polinomban sem, ne kelljen 0-t írni a kockákra. Ez azt jelenti, hogy mindkét polinomban szerepel az x tényező is. Ezért csak két eset marad:

I. $A(x) = B(x) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Ez a két szokásos szabályos kockának felel meg.

II. $A(x)$ és $B(x)$ valamilyen sorrendben az $x(x+1)(x^2+x+1)$, $x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2$ polinomoknak felel meg. Mivel

$$x(x + 1)(x^2 + x + 1) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$

és

$$x(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8,$$

így az alábbi jó megoldáshoz jutunk:

Az egyik kocka számai: $1, 2, 2, 3, 3, 4$,

a másik kocka számai: $1, 3, 4, 5, 6, 8$.

4. feladat

Adjuk meg az n, p, $q = 1 - p$ paraméterű binomiális eloszlás várható értékét és szórását!

Megoldás

Az órán nem az alábbi megoldással kezdjük, a binomiális együtthatókkal való számolás sok-sok jó lehetőséget ad. Lásd pl.

`http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/elemimat_tisztitva.pdf`

5.4. Pascal háromszög fejezetének 5.9.b) feladatát és annak megoldásait a 385-386. oldalakon.

Mostani módszerünk meglehetősen általános, alkalmas tetszőleges olyan nemnegatív egész értékű χ valószínűségi változó várható értékének és szórásának kiszámítására, amelynek generátorfüggvénye (lásd alább) ismert, de teljes megértése az analízis mélyebb ismeretét igényli. Vezessük be a $p(\chi = k) = p_k$ rövidítő jelölést. A χ valószínűségi változó generátorfüggvényének nevezzük a

$$P_\chi(x) = \sum_k p_k x^k$$

kifejezést, amely véges valószínűségi változó esetén – mint a binomiális eloszlás is – polinom, az általános esetben hatványsor. A teljes valószínűség:

$$P_\chi(1) = \sum_k p_k = 1.$$

Most az

$$E_\chi = \sum_k k p_k$$

várható értéket keressük. Mivel

$$P'_\chi(x) = \sum_k k p_k x^{k-1},$$

így

$$E_\chi = P'_\chi(1) = \sum_k k p_k.$$

A binomiális eloszlás esetén $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, tehát

$$P_\chi(x) = \sum_k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k = (q + px)^n.$$

Ebből

$$P'_\chi(x) = np(q + px)^{n-1},$$

azaz

$$E_\chi = P'_\chi(1) = np(q + p)^{n-1} = np.$$

Áttérünk a χ valószínűségi változó

$$D_\chi^2 = \sum_k k^2 p_k - \left(\sum_k k p_k\right)^2$$

szórásnégyzetének meghatározására. $P_\chi''(x) = \sum_k k(k-1)p_k x^{k-2}$, így $P_\chi''(1) = \sum_k k(k-1)p_k$, és ebből

$$\sum_k k^2 p_k = P_\chi''(1) + P_\chi'(1),$$

$$D_\chi^2 = P_\chi''(1) + P_\chi'(1) - \left(P_\chi'(1)\right)^2.$$

Mivel

$$P_\chi''(x) = n(n-1)p^2(q+px)^{n-2},$$

így

$$D_\chi^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = npq.$$

A binomiális eloszlás szórása tehát

$$D_\chi = \sqrt{npq}.$$