Egyenlőtlenségek

June 18, 2014

Vannak olyan esetek, amikor a szokásosan alkalmazott számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség közvetlen alkalmazása megtréfál bennünket.

1, Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyeknek összege 3. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Megoldás: Először is próbálkozzunk a szokásos becsléssel. Jól látható, hogy a nevezőben szereplő összeget csak nála kisebbel tudnánk becsülni, de azzal a törtek értéke, így az egész baloldali kifejezés értéke növekszik.

Próbálkozzunk a Titu-lemmával, az ,,ellenség kedvenc fegyverével". Ehhez a törteket bővítjük a számlálóikkal:

$$\frac{a^2}{a+ab^2} + \frac{b^2}{b+bc^2} + \frac{c^2}{c+a^2c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+(ab^2+bc^2+ca^2)} \geq \frac{3}{2}.$$

A befejezéshez azt kellene belátni, hogy

$$\frac{9}{3+(ab^2+bc^2+ca^2)} \geq \frac{3}{2},$$

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leq 3.$$

Ez viszont nem is igaz állítás. Pl. legyen $a = b = 1,49$ és $c = 0,02$. Ekkor

$$ab^2+bc^2+ca^2 > ab^2 = 3,307949.$$

Itt érdekes megemlíteni (Schultz János, 111 egyenlőtlenség 84. feladat), hogy amennyiben a feltételen nem változtatunk, viszont a számlálóban négyzeteket írunk, akkor (bár elég kemény becslésekben, de) működik a Titu-lenmma, illetve a CBS-egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+c^2} + \frac{c^2}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Az eredeti egyenlőtlenség bizonyításához a következő tagonkénti átírás eredményre vezet:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}.$$

Ekkor már becsülhető a törtek nevezője alulról, mert ezzel csökkentjük a kifejezést:

$$a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Ezt mindháromra elvégezve a bizonyítandó állítás:

$$a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Ez viszont igaz, mert

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2,$$

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9,$$

azaz

$$ab+bc+ca \leq \frac{3}{2},$$

egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a=b=c=1$.

Az összegere vonatkozó feltételt kihasználva nem alsó, hanem felső becslést kellett végül adnunk. Átfordítottuk az egyenlőtlenséget. Innen a neve is ,,Cauchy-féle megfordítási technika". Erről a módszerről Ábrahám Gábor tanár úrtól kaptam az első információkat.

A nevező jóval összetettebb, ezért talán nem érdektelen a következő feladat tárgyalása sem:

2, Legyenek az a, b, c, d olyan pozitív valós számok, amelyek összege 4. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$

Megoldás: Alakítsuk ismét át az egyenlőtlenség baloldalát.

$$\frac{a}{1+b^2c} = a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} = a - \frac{b\sqrt{a \cdot ac}}{2} \geq a - \frac{b(a+ac)}{4}.$$

Ezt mindhárom tagra elvégezve a bizonyítandó egyenlőtlenség baloldala alulról becsülhető:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{1+b^2c} \geq \sum_{cyc} a - \frac{1}{4}\sum_{cyc} ab - \frac{1}{4}\sum_{cyc} abc.$$

$$\sum_{cyc} ab \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{cyc} a\right)^2 = 4,$$

$$\sum_{cyc} abc \leq \frac{1}{16}\left(\sum_{cyc} a\right)^3 = 4.$$

Ez utóbbi belátásához a következő gondolatmenettel is eljuthatunk. A négytagú összeg harmadik hatványa öszesen 64 darab harmadfokú tagból áll. Ezek az a, b, c, d cseréjére szimmetrikusak. Szétosztjuk a 64 darab tagot négy 16-os csoportba úgy, hogy mindegyik csoportból hiányozzon egy-egy betű és a három betű összes kitevője megegyezzen. Auzátn vehetjük ennek a 16 számnak a mértani közepét. Ebben a három betű már első hatványon fog szerepelni.

Visszatérve a bizonyítandó egyenlőtlenségre:

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq a+b+c+d-2=2.$$

Most egy kis kitérőt teszünk, hogy megnézzük hasonló módszer működik-e az ismert Nesbitt-egyenlőtlenségnél.

3, Igazoljuk a fenti módszerrel, hogy tetszőleges a, b, c pozitív számokra

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Megoldás: Feltűnő, hogy itt nincsen az összegre vonatkozó külön feltétel, ahogyan az előző két feladatnál. Az ,,átfordításhoz" pedig vélhetően ilyenre szükség lenne. Vegyük észre, hogy a számllóbn ésa nevezőben is elsőfokúak a polinomok. Emiatt, ha mindegyik tagot egy tetszőleges λ pozitív számmal szorozzuk, akkor az öszeg változik, de a bizonyítandó állítás nem. Emiatt nyugodtan vehetjük az összegt pl. 1-nek, $a+b+c=1$.

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\frac{a-a^2}{1-a}+\frac{a^2}{1-a}+\frac{b-b^2}{1-b}+\frac{b^2}{1-b}+\frac{c-c^2}{1-c}+\frac{c^2}{1-c}\geq$$

$$\geq a+b+c+\frac{a^2}{1-a}+\frac{b^2}{1-b}+\frac{c^2}{1-c}\geq 1+\frac{(a+b+c)^2}{3-a-b-c}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Itt nem is helyes a ,,megfordítási" technika, sokkal inkább a ,,leválasztási" technika lenne találó. Minden esetre a módszer itt is működik. A normalizálás aozokban az esetekben használható ótlet, amikor a szereplő betűk ,,dimenziói" a két oldalon megegyeznek.

A Nesbitt-egyenlőtlenségre Róka Sándor összegyűjtött 12 bizonyítást, amelyeket a ZALAMAT 2006-os konferenciáján mondott el Nagykanizsán. Az előbbi bizonyítás ezek között nem szerepel. Nem szerepel a következő igen szellemes bizonyítás sem. Ez nem tartozik a témánkhoz, de mégis meg kell mutatnom.

Vegyük a következő kifejezéseket:

$$S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},$$

$$M=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b},$$

$$K=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Látjuk, hogy $M + K = 3$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$M + S = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3.$$

Ugyanezzel a módszerrel

$$K + S = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{b+a}{c+a} \cdot \frac{c+b}{a+b}} = 3.$$

Az eddigiek alapján

$$M + K + 2S \geq 6, \text{ továbbá } M + K = 3.$$

Tehát

$$S \geq \frac{3}{2}.$$

Folytassuk tovább a megfordítási technika bemutatását:

4, Legyenek a, b, c, d pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Megoldás: Végezzük el a következő átalakítást mindegyik tagra:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}.$$

A három összegéből:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

5, A*z a, b, c pozitív valós számok összege 3. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3.$$

Megoldás: Kezdjük ismét a szokásos átfordító átalakítással :

$$\frac{a+1}{b^2+1} = (a+1) - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq (a+1) - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a + 1 - \frac{ab+b}{2}.$$

Mindhármat felírva és összeadva

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3 + \frac{a+b+c}{2} - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

6, Az a, b, c pozitív valós számokra $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1.$$

Megoldás: Alkalmazzuk a szokásos átfordítást:

$$\frac{1}{a^3+2} = \frac{2}{2(a^3+2)} = \frac{2+a^3}{2(a^3+2)} - \frac{a^3}{2(a^3+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{a^3+1+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{3a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a^2.$$

A hármat összeadva:

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 1.$$

Közös feldolgozásra

A most következő négy feladatot közös feldolgozásra szántam. Arra is próbáltam utalást tenni ezzel, hogy nem szabad csak egy technikával próbálkoznunk, más fontos technikák is sikerrel alkalmazhatóak egyenlőtlenségek bizoyítására.

1, Legyenek $0 < a, b, c < 1$ valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Megoldás: Az a, b, c számok 0 és 1 közé esnek, így az $1-a$, $1-b$, $1-c$ számok is 0 és 1 közé esnek. Ebben az intervallumban $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$, íg az egyenlőtlenség bal oldalát felülről tudjuk becsülni:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Most már tudjuk alkalmazni a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget mindkét szorzatra:

$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{a+b+c}{3} + \frac{1-a+1-b+1-c}{3} = 1.$$

Az állításnál élesebb megfogalmazás segített, egy erősebb egyenlőtlenség bzonyítása már azonnal adódott.

2, Legyenek az a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyeknek összege 3. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

Megoldás: Tudjuk, hogy $a + b + c = 3$. Négyzetre emelve kifejezhetjük a páros szorzatok összegét.

$$2(ab + bc + ca) = 9 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Ezt beírva a bizonyítandó egyenlőtlenségbe, azt kell most belátnunk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq 9.$$

Alkalmazzuk a számatni-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $a^2, \sqrt{a}, \sqrt{a}$ számokra:

$$a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}\sqrt{a}} = 3a.$$

Hasonlóan becsülhetjük a b-t és a c-t tartalmazó három tagot is. A három egyenlőtlenség összegéből:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq 3(a + b + c) = 9.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a^2 = \sqrt{a},\ b^2 = \sqrt{b},\ c^2 = \sqrt{c}$, azaz $a = b = c = 1$.

3, Az a, b, c egy olyan háromszög oldalai, amelynek kerülete 3 egység. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-c}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Megoldás: Alkalmazzunk az áttekinthetőség érdekében helyettesítéseket. Legyen $x = \sqrt{b+c-a}, y = \sqrt{c+a-b}$ és $z = \sqrt{a+b-c}$. Ekkor

$$x^2 + y^2 + z^2 = b + c - a + c + a - b + a + b - c = a + b + c = 3.$$

Fejezzük ki most az ab, bc, ca szorzatokat a helyettesítés alapján.

$$a = \frac{y^2+z^2}{2}, b = \frac{z^2+x^2}{2}, c = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

A páros szorzatok összege

$$ab+bc+ca = \frac{x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3y^2z^2+zx^2}{4} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{4}.$$

Az előzőekben láttuk, hogy $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, ezt is felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{36}{9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}.$$

Ismét célszerű helyettesítést alkalmaznunk. Legyen $m = xy, n = yz$ és $p = zx$. A közös nevezővel beszorozva az egyenlőtlenség a következő ekvivalens alakot ölti:

$$(m + n + p)(m^2 + n^2 + p^2 + 9) \geq 36\sqrt{mnp}.$$

A bizonyítás befejezését két számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség felírása és összeszorzása adja. Elsőként három szám, majd 12 szám között írjuk fel a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$m + n + p \geq 3\sqrt[3]{mnp},$$

$$m^2 + n^2 + p^2 + 9 \geq 12\sqrt[12]{m^2n^2p} = 12\sqrt[3]{mnp}.$$

A két egyenlőtlenség szorzata éppen a bizonyítandó állítást adja:

$$(m + n + p)(m^2 + n^2 + p^2 + 9) \geq 36\sqrt[3]{mnp}\sqrt[6]{mnp} = 36\sqrt{mnp}.$$

A második egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor, ha $m = n = p = 1$, azaz $x = y = z = 1$, így végül $a = b = c = 1$.

4, Tudjuk, hogy a pozitív a, b, c, d valós számok összege 4. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$

Megoldás: Alkalmazzuk a foglalkozáson megismert ,,megfordítási" technikát.

$$\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}.$$

A négy tagra elvégezve ezt a becslést

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 4 - \frac{a+b+c+d}{2} = 2.$$

Egyenlőség akkor és a csak akkor, ha $a = b = c = d = 1$.