2010. szeptember 17.

1. Biz. n egész között van néhány olyan, melyek összege osztható n-nel.

2. Ha az 1, 2, …, $2n$ számok közül választunk $n+1$-et, akkor egy kiválasztott oszt egy másikat.

3. Ha $(a;b)=1$, akkor létezik x, y egészek, melyekre $ax-by=1$.

4. Egy sakkmester 77 nap alatt legfeljebb 132 partit játszott de minden nap játszott legalább egyet. Biz. van néhány egymás utáni nap, melyek alatt éppen 21 partit játszott.

5. Az 1, 2, …, 101 számokat valamilyen sorrendben felírták. Biz letörölhető 90 úgy, hogy a maradék monoton növő, vagy csökkenő legyen.

6. Mely számoknak van olyan többese, amelyben csak 1 és 2 jegyek vannak?

7. Biz. valamely Fibonacci szám legalább 2010 darab 0-ra végződik.

8. Egy 5 m^2-es szobában van 9 szőnyeg, mindegyik 1 m^2 területű. Biz. van két szőnyeg, melyek legalább 1/9 m^2 területen fedik egymást.

9. Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely kielégíti a $P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$ egyenlőséget, valahányszor a, b, c olyan valós számok, amelyekre teljesül $ab+bc+ca=0$.

10. Egy $ABCD$ konvex négyszögben a BD átló nem szögfelezője sem az $ABC\angle$, sem a $CDA\angle$ szögnek. A P pont az $ABCD$ négyszög belsejében fekszik és teljesül rá $PBC\angle=DBA\angle$ és $PDC\angle BDA\angle$. Biz $ABCD$ húrnégyszög $\Leftrightarrow$ $AP=CP$.

11. Mely számoknak van olyan többese, amelynek szomszédos jegyei különböző paritásúak?

2010. október 1.

1. Az ABC háromszög BE és CF magasságai az M pontban metszik egymást. FE és BC egyenesek metszéspontja U. BC felezőpontján át párhuzamost húzunk az $EUB\angle$ szög felezőjével ez a CA, AB, MC, MB egyeneseket rendre a P, Q, X, Y pontokban metszi. Igazoljuk, hogy az APQ és MXY háromszögek köré írt körök ugyanakkora sugarúak.

2. Az ABC háromszögben $AB\neq AC$. Az A-ból induló magasság talppontja L. E és F az AD és BC felezőpontjai, G a B pont merőleges vetülete az AF egyenesen. Igazoljuk, hogy az EF egyenes érintője a GFC köré írt körnek.

3. $ABCD$ paralelogramma, az ABC háromszög köréírt körének BE átmérője. Igazoljuk, hogy az ADE és ABC háromszögek köré írt körök ugyanakkora sugarúak.

4. Az ABC háromszögben $AC\neq 3AB$. A BC oldal felezőpontján át párhuzamost húztunk a $BAC\angle$ szög felezőjével ez az AB és AC egyeneseket X és Y pontokban metszi. X

tükörképe *Y*-ra legyen *Z*. *BY* és *CZ* egyenesek metszéspontja *D*. Igazoljuk, hogy a $BDC\angle$ szög szögfelezője párhuzamos *XY*-nal.

A szakkör végén az előző szakkör 10-es példáját beszéltük meg és bebizonyítottuk az izogonális konjugáltról szóló következő tételt:

5. Az *ABC* háromszög síkjának egy tetszőleges *P* pontja esetén az *AP*, *BP*, *CP* egyenesek tükörképei rendre az *A*-ból, *B*-ből, *C*-ből induló szögfelezőkre egy ponton –*P* izogonális konjugáltján– mennek keresztül.

2010. október 15.

1. Max hány szám lehet egymás után, ha bármely 7 szomszédos öszege <0, bármely 11 szomszédos öszege >0?

2. Egy konvex *n* szög minden átlóját behúztuk, nem megy át 3 egy ponton. (a) Hány részre vágtuk a sokszöget? (b) Hány háromszög keletkezett az ábrán?

3. Egy horgászversenyen 5-en vannak, lehet holtverseny. Hányféle lehet a végeredmény?

4. Egy *n* elemű halmaznak hányféleképpen adhatjuk meg két diszjunkt részhalmazát?

5. *n* gyerek ül egy kerek asztal körül. Átülhetnek valamelyik szomszédos székre. Hány ülésrend alakulhat ki?

6. Hány *n* betűs szó alkotható az *a*, *b*, *c*, *d* betűkből, ha *a* és *b* nem lehet szomszédos?

7. {1,2,…,2001} halmaznak *S* darab 77 elemű részhalmaza van, melyben az elemek összege páros, *T* darab ahol páratlan. Melyik nagyobb és mennyivel?

8. Az 1, 2, …, 2*n* számok egy permutációját nevezük jónak, ha valamely két szomszédos különbségének abszolút értéke *n*. Biz az összes permutáció több, mint fele jó.

Olimpiai szakkör 2010. október 29.

1. Prím-e $4^{545}+545^4$?

2. 600 db 6-os és néhány 0 van egy számban. Lehet-e négyzetszám?

3. 1!, 2!, …100! Kihagyható-e közülük egy úgy, hogy a maradék szorzata négyzetszám legyen?

4. $4^{13}+4^{1000}+4^n$ Van-e olyan poz. egész *n*, amelyre négyzetszám?

5. $15x^2-7y^2=9$ egész megoldásait keressük.

6. Biz. n^5+n^4+1 $n>1$ egészre nem prím.

7. 9-jegyű számban nincs 0, minden jegy egyszer szerepel, utolsó jegy 5. Lehet-e négyzetszám?

8. Mely poz. egész n-re van poz egészekből álló megoldása az $(x+y+z+v)^2=n^2(xyzv)$ egyenletnek?

2010. november 12.

Egyenlőtlenségek

2010. november 26.

1. Egy körút mentén van k benzinkút, bennük összesen annyi benzin, amennyi egy autónak elég a kör megtételéhez. Igazoljuk, hogy valamely kúttól indulva körbe lehet autózni. Az induló kútnál üres az autó tankja és be tudjuk tölteni akár az összes benzint is a tankba.

2. Végtelen négyzetrács egy negyedének rácspontjaihoz írható-e egy-egy egész, hogy minden sor és oszlop minden egészet pont egyszer tartalmazzon?

3. Bbh minen egész egyértelműen írható fel kül. Fib. számok összegeként, ha szomszédosak nem szerepelhetnek az összegben.

4. Egy kör mentén van n pont, ezekhez a-t vagy b-t írunk. Bbh max $[(3n–4)/2]$ húr húzható, melyek végeinél kül. betűk vannak és melyek nem metszik egymást a kör belsejében.

5. Az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz összes részhalmazát tekintjük, amelyekben nincsenek szomsz. számok. Minden részhalmazban összeszorozzuk az elemeket, majd az eredményt négyzetre emeljük. Mennyi ezen számok összege? (n=3-ra 23.)

6. Egy $m\times n$-es mátrix minden sorában bekarikázzuk a legnagyobb p számot, minden oszlopában áthúzzuk a legnagyobb q számot. Bbh legalább pq számot kétszer is jelöltünk.

7. Egy végtelen sakktáblán n lépést téve hány kül. mezőre kerülhet egy huszár?

8. Adott n(>1) egyenes, nincs köztük párhuzamos, nem megy át három egy ponton. Bbh megszámozhatók a kialakult síkrészek $\neq 0$, max n abszolút értékű egész számokkal úgy, hogy bármely egyenes mindkét oldalán a számok összege 0.

9. $a_0=9$, $a_{n+1}=3a_n^4+4a_n^3$, bbh a_{10} végén több, mint 1000 db. 9-es van.

2010. december 17.

1. $a_1=a_2=1$, $a_3=-1$, $a_n=a_{n-1}a_{n-3}$. $a_{2010}=?$

2. $a_0=2$, $a_1=7$, $a_{n+1}=7a_n-12a_{n-1}$. Adjunk explicit képletet.

3. $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$. $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$. BBH f periódikus.

4. $a_1=a_2=1$, $a_n=(a_{n-1}^2+2)/a_{n-2}$, $(n>2)$ BBH a_i egész.

5. Biz 10001, 100010001, 1000100010001, … mind összetett.

6. $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+(1/a_n^2)$, korlátos-e a sorozat? Biz $a_{9000}>30$.

7. $a(1)=1$, $a(2)=12$, $a(3)=20$, $a(n+3)=2a(n+2)+2a(n+1)-a(n)$BBH $1+4a(n)a(n+1)$ négyzetszám.

8. Adott néhány poz szám, páronkénti szorzataik összege1. BBH letörölhető közülük egy, hogy a maradék összege $<\sqrt{2}$.

9. $a(n)$= a Pascal háromszög n-ik sorának elemeinek reciprokösszege. Korlátos-e a sorozat?

10. $a_1=3$, $a_{n+1}= a_n/2$, ha a_n páros, $(a_n+1983)/2$ ha a_n páratlan. BBH a sorozat periódikus. min periódus=?

2011. Január 7.

1. Egy tetraéder éleire valós számokat írtunk, a kitérő élekre írt számok összege ugyanannyi. Ezután minden csúcshoz hozzárendeltük az oda befutó élekre írt számok összegét. Ezek az összegek valamilyen sorrendben az *a*, *b*, *c*, és *d* számok, amelyekre $a=b=2c=2d$ teljesül. Biz. az élekre írt számok között a 0 is előfordul.

2. Tekintsük az $y=x^2$ parabolát. Keressük meg az összes olyan egész meredekségű egyenest, ami áthalad a $P(0;4)$ ponton és a parabola belsejébe eső szakasza is egész hosszúságú.

3. Keressük meg a 2010-nél nagyobb egészek közt a legkisebb olyan *S* számot, amelyet elosztva a 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokkal, maradékul kétszer kapjuk az 1, 2, 3 számok mindegyikét.

4. Biz. a *t* területű *ABCD* konvex négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha $(AB+CD)(AD+BC)=4t$.

5. Az *ABC* háromszögben *AD* és *BE* szögfelezők, *D* és *E* a kerületen van. Mekkora az *A*-nál levő szög, ha *DE* felezi az *ADC* szöget?

6. Tudjuk, hogy *a*, *b*, *c* pozitív számok, $abc=1$. Igazoljuk :
$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq 1.$$

7. A síkon van véges sok, párhuzamos szélű sáv, összes szélességük 100. Mutassuk meg, hogy a sávok eltolhatók önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy együtt letakarjanak egy adott, 1 sugarú kört.

8. Bergengóciában a lottón 6 számot húznak 36-ból. Hány szelvényt kell kitölteni a biztos betli szelvényhez?

2011. január 21.

1. Biz. $\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{14}{4!}+\frac{23}{5!}+....+\frac{k^2-2}{k!}+....+\frac{9998}{100!}<3$.

2. Elhelyezhető-e egy kocka úgy, hogy csúcsainak egy síktól való távolságai 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 legyen?

3. Bizonyítsuk, hogy **a)** 97^{97}; **b)** 1997^{17} nem lehet szomszédos természetes számok köbeinek összege.

4. Az *ABC* háromszög belső pontja *P*, *AB*=*BC*. $ABC\angle=80°$, $PAC\angle=40°$, $ACP\angle=30°$. *BPC* $\angle$=?

5. Egy súlykészletben a következő grammos súlyok vannak: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, mindből egy darab. A kétkarú mérlegünk mindkét serpenyőjébe tehetünk súlyokat. **a)** Biz. semelyik súlyt sem mérhetjük le több, mint 34 módon. **b)** Adjunk példát olyan súlyra, melyet 34 módon mérhetünk le.

6. Az *ABC* háromszögben *AB*=*AC* és a *BAC* szög α. Legyen *D* az *AB* szakaszon, *AD*=*AB*/*n*. Legyenek P_1, P_2. … , P_{n-1} a *BC* oldal *n*-edelő pontjai. Mekkora lesz α függvényében a fenti szögösszeg, ha *n*=2011?

7. Van-e olyan hatjegyű pozitív egész, jelölje *A*, melyre az *A*, 2*A*, 3*A*,.....,500000*A* közt nincs olyan, mely hat azonos jegyre végződne?

8. Megadható-e egy poz. egészekből álló növő számtani sorozat **a)** 11; **b)** 10 000; **c)** végtelen sok egymást követő eleme úgy, hogy a számok jegyeinek összege is növő számtani sorozat szomszédos elemei legyenek?

9. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan függvény, melyre $f(f(x))=x^2-1996$ minden valós *x*-re.

2011. február 4.

Ezt a szakkört Gyenes Zoltán tanár úr tartotta.

2011. február 18.

1. Az *ABC* háromszög *AB* oldalát kívülről érintő hozzáírt kör *AB*-t a *P* pontban, *AC* meghosszabbítását a *Q* pontban érinti; a *BC* oldalt kívülről érintő kör pedig *AC* meghosszabbítását az *U* pontban, *AB* meghosszabbítását az *X* pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a *PQ* és az *UX* egyenesek metszéspontja egyenlő távol van az *AB* és a *BC* egyenesektől.

2. Az a_1, a_2, ..., a_n és b_1, b_2, ..., b_k pozitív egészek; az $a_1+a_2+...+a_n$ és a $b_1+b_2+...+b_k$ összegek egyenlők, és kisebbek *nk*-nál (*n*>1, *k*>1). Bizonyítsuk be, hogy az

$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_k$ egyenlőségben szereplő mindkét összegből elhagyható néhány (de nem az összes) tag úgy, hogy az egyenlőség továbbra is fennálljon.

3. Mutassuk meg, hogy egy páratlan fokú, egész együtthatós polinomfüggvény grafikonjában csak véges sokszor fordulhat elõ, hogy két (különbözõ) egész abszcisszájú pont távolsága egész szám.

4. Az ABC háromszög nem egyenlő szárú; a BC, CA, AB oldal felezőpontját jelölje rendre A_1, B_1, C_1. A háromszög oldalain a C-ből az A-ba és onnan a B-be vezető út felezőpontja legyen A_2, az A-ból a B-be és onnan a C-be vezető út felezőpontját jelölje B_2, végül a B-ből a C-be és onnan az A-ba vezető út felezőpontja legyen C_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

5. Legyen n rögzített, 1-nél nagyobb egész szám. Adjunk meg olyan $x_1, x_2, ..., x_n$ valós számokat, amelyekre teljesülnek az $x_1+x_2+...+x_n=2(n-1)$ és az $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+...+(x_n-1)^2=n$ egyenlőségek, és x_n értéke a lehető legnagyobb.

6. Tekintsük azt a kört, amely áthalad azon a három ponton, ahol egy adott háromszög szögfelezõi metszik a szemközti oldalakat. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalegyenesei ebbõl a körbõl három olyan húrt metszenek ki, amelyek közül valamelyiknek a hossza egyenlõ a másik kettõ hosszának az összegével. (Ha a kör a háromszög oldalegyenesét nem metszi, hanem érinti, akkor a megfelelõ húrt 0 hosszúságúnak vesszük.)

7. Van-e olyan n-oldalú sokszög, amelyben a hegyesszögek száma $n^2-30n+236$?

2011. március 4.

Az OKTV II és III kategória döntőinek feladatait beszéltük meg

2011.május 6.

1. Egy nem szabályos háromszög köréírt körének középpontja O, az oldalegyeneseket érintő körök középpontjai: A_1, A_2, A_3, A_4. Bizonyítsuk be, hogy az A_i, A_j, A_k pontok OA_n egyenestől mért előjeles távplságainak az összege nullával egyenlő; (i,j,k,n az 1,2,3,4 számok tetszőleges permutációját jelentik. Két pontnak egy egyenestől mért távolsága akkor azonos előjelű, ha az egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak.)

2. Jelölje k(n) az n pozitív egész legnagyobb páratlan osztóját és legyen $A(n)=k(1)+k(2)+.....+k(n)$, $B(n)=1+2+....+n$. Mutassuk meg, hogy a $3A(n)=2B(n)$ egyenlőség végtelen sok n-re teljesül.

3. Az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O, sugara R. Az AO egyenes a BOC kört A_1-ben, a BO egyenes a COA kört B_1-ben, a CO egyenes az AOB kört C_1-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \geq 8R^3$.

4. Az a_1, a_2, ..., a_n valós számokra $2 \le a_i \le 3$, $n \ge 3$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1+a_2+....+a_n=s$, akkor $\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\ldots\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2} \le 2s-2n$.

5. Jelölje A(n) az első n darab prímszám összegét. Bizonyítsuk be, hogy A(n) és A(n+1) között mindig van négyzetszám.

6. Egy sakk körmérkőzésnek k résztvevője volt (k páratlan); mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott; győzelemért 2, döntetlenért 1, vereségért 0 pontot kaptak. A verseny végén mindenkinek más volt az elért pontszáma. Legfeljebb mennyi lehetett a döntetlen játékok száma?

7. Az ABC háromszög beírt körének sugara legyen egységnyi. Jelölje r_a az AB és AC oldalakat, valamint a háromszög köréírt körét belülről érintő kör sugarát; hasonlóan értelmezzük az r_b és r_c sugarakat is. Határozzuk meg $r_a+r_b+r_c$ minimumát.