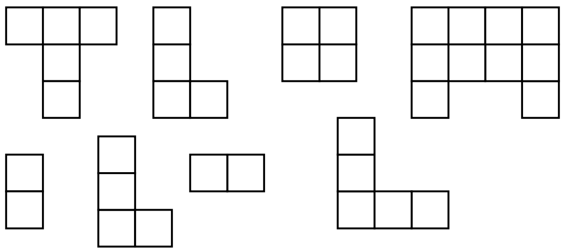
Első feladatsor

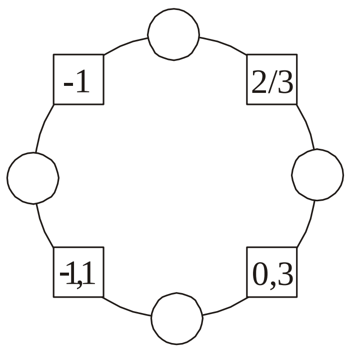
1. Az alábbi síkidomokból rakj össze egy téglalapot!



2. Tegyél ki zárójeleket úgy, hogy az eredmény 0 legyen!

$$2+2\cdot 2-2:2+2\cdot 2-2:2-2$$

3. Az alábbi ábrán mindegyik körbe beírjuk a két szomszédos szám átlagát. Melyik nagyobb: a körökben vagy a négyzetekben álló számok átlaga? Magyarázd meg az eredményt!



4. A hetedikesek fociszakkörében az összes résztvevő hetede lány. A jó hangulatú edzések eredményeként még tizenhárman jöttek a játszani. Ennek eredményeként több lett a lány, de arányuk csökkent. Mennyivel nőtt a fiúk száma a keretben?

5. A kétkarú mérleg úgy működik, mint a mérleghinta. Ha a két serpenyőjébe egyenlő tömegeket teszünk, akkor egyensúlyban van; ha valamelyik oldalon nagyobb a tömeg, akkor arrafele lebillen. Van egy 5, egy 4, egy 3, egy 2 és egy 1 kilogrammos „súlyunk”. Az egyik sajnos hibás, 1 grammal eltér a tömege a névlegestől. Egy kétkarú mérleg segítségével állapítsd meg, melyik a hibás „súly”! Törekedj arra, hogy minél kevesebbszer mérjél!

Második feladatsor

1. Egy furcsa szigeten járunk. Az itt élők egy része lovag, másik része lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Természetesen a szigetlakók ismerik egymást, tudják egymásról, hogy ki lovag, ki lókötő. Mi nem ismerjük őket. A szigeten sétálva két őslakóval találkoztunk. Egyikük így nyilatkozott saját magukról:
-Legalább az egyikünk lovag.
Meg tudod-e állapítani, melyikük miféle?

2. Az *ABCD* trapéz *BC* szárának felezőpontja *E*. A trapéz területe hányszorosa az *AED* háromszög területének?
(A megoldáshoz ne felejts el ábrát készíteni!)

3. Készíts bűvös négyzetet az első kilenc, hárommal nem osztható prímszámból!
(Az 1 nem prím.)

4. 8 darab 1 cm^3-es kis kockából építettünk egy nagyobb kockát. A nagy kocka felszínén levő kis 1 cm^2-es négyzeteket akarjuk kiszínezni úgy, hogy a szomszédosak különbözőek legyenek. Két négyzet akkor szomszédos, ha van közös oldala. Legalább hány színt kell használjunk?

5. Kezdetben egy darab számunk van, az 1. Meglevő számainkat gyarapíthatjuk a következő művelet segítségével: egy meglevő számot növelhetünk valahány pozitív egész százalékával, ha így ismét egész számot kapunk. (A százaléknál 1-től 100-ig bármi lehet.)
Mutasd meg, hogy 1-től 100-ig minden egész számot elő lehet állítani!

Harmadik feladatsor

1. K=2002+(1+2+...+2001)·2
Igazold, hogy K egy természetes szám négyzete! (Számológépet ne használj!)

2. Egy csapatban úgy aránylik a fiúk száma a lányokéhoz, mint 5 a 3-hoz. A fiúk átlagéletkora 13, a lányoké 11 év. Mennyi a csapat átlagéletkora?

3. A sapkák (folytatás)
Három gyereket hívtam ki. Becsukták a szemüket. Két kék és három piros sapkám van. Egy-egy sapkát a gyerekek fejére tettem, a maradék kettőt eldugtam. Aki (miután kinyitotta a szemét) biztosan tudja, megmondhatja a saját sapkája színét, tippelni nem szabad. Az első gyerek nem tudta, a második sem. A harmadik ki tudja-e találni a sapkája színét? Ki kell-e ehhez nyissa a szemét?

4. Egy négyszögről négy gyerek tett egy-egy kijelentést. Íme az általuk mondottak:
Aladár: — Ez a négyszög egy paralelogramma.
Balambér: — Én úgy látom, hogy ez egy négyzet.
Csenge: — Szerintem kétségtelenül egy deltoidról van szó.
Daniella: — Valójában egy trapézról beszélünk.
Utólag kiderült, hogy három gyerek állítása igaz, egyiküké pedig hamis volt. Milyen négyszögről beszélgettek?

5. Egy asztalra kilenc egyforintost tettünk egymás mellé. Balról jobbra haladva fölső oldaluk rendre fej, fej, fej, írás, fej, írás, írás, fej, írás. Ketten játszanak, felváltva lépnek. Egy játékos egy lépésben kiválasztja az egyik olyan érmét, amelyen fej van fölül, és azt, valamint az összes tőle jobbra levő érmét az ellenkező oldalára fordítja. Az nyer, aki eléri, hogy minden érmén írás legyen felül. Te vagy az egyik játékos, nyerni szeretnél. Kezdeni akarsz, vagy inkább másodikként lépnél? Hogyan játszanál?

Negyedik feladatsor

1. Ismét a lovagok és lókötők szigetén járunk. Egy reggel kissé álmosan hallgattuk két bennszülött beszélgetését. Íme párbeszédük egy részlete:
A: Legalább egyikünk lókötő.
B: Különböző típushoz tartozunk.
Meg tudod-e állapítani, melyikük miféle?

2. Tegyél ki zárójeleket úgy, hogy a műveletek elvégzése után 0 legyen az eredmény!

$$2+2\cdot2-2:2+2\cdot2-2:2-2: 2+2\cdot2-2:2+2\cdot2-2:2-2$$

3. Egy szultán, akinek 143 felesége volt, 1000 napon keresztül adót szedett. Az első napon 144 aranyat, a többi napokon pedig mindig egy arannyal többet szedett, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani a feleségei között. Meg tudta-e tenni?

4. Andris egy négyzetet a következőképpen színezett ki: először 9 egyforma (egybevágó) kis négyzetre osztotta, majd első lépésként kiszínezte a középső kis négyzetet. Másodszor a megmaradó 8 kis négyzet mindegyikét újra 9 egybevágó, még kisebb négyzetre osztotta, és mindegyikben kiszínezte a középső kis négyzetet. Ezt az eljárást végül is összesen ötször hajtotta végre. Az eredeti négyzet hanyad részét színezte ki?

5. Egy kétkarú mérlegen 1-től 40-ig minden egész grammot szeretnénk mérni. Legkevesebb hány darabos súlykészletre van ehhez szükségünk? Mekkorák az egyes súlyok?

Ötödik feladatsor

1. Számológép nélkül számold ki a pontos eredményt!
(1/1+1/2+1/3+….+1/2002)+(2/2+2/3+….+2/2002)+(3/3+3/4+.…+3/2002)+.…+(2001/2001+2001/2002)+(2002 /2002)

2. Két 1cm oldalú négyzetet úgy helyeztünk el a síkon, hogy az egyik középpontja a másiknak az egyik csúcsa. Mekkora a közös részük területe?

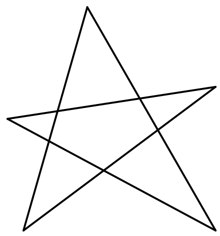
3. Andris megkérte szüleit, hogy gondoljanak egy-egy pozitív egész számra. A gondolt számok összegét Beának, szorzatát Csillának súgta meg. Bea így szólt: „Én nem tudom kitalálni a gondolt számokat.” Csilla válaszolt: „Én sem.” Rövid gondolkodás után Bea felkiáltott: „Akkor én már tudom őket!” Milyen számokra gondoltak Andris szülei? Csilla ki tudja-e találni ezeket?

4. Két kupac kavics van az asztalon, mindkettőben 5-5 kavics. Ketten játszanak. Egy játékos egy lépésben kiválaszt egy kupacot, onnan annyi kavicsot vehet el, amennyit akar. (Legalább egyet el kell vennie.) Az nyer, aki az utolsó kavicso(ka)t elveszi. Kinek van nyerő stratégiája?

5. Egy 200 méter hosszú vasúti hídon egy személy meghallja, hogy jön a vonat. Amikor a vonat a hídtól 300 méterre van, az ember éppen elmenekülhet a híd bármelyik végére. Emberünk hol áll a hídon, ha mind a vonat, mind az ember állandó sebességgel halad?

Hatodik feladatsor

1. Mekkora az ábrán látható csillagötszög szögeinek az összege?



2. Egy számban a tizedesvesszőt két helyiértékkel balra vittük, majd az így kapott számhoz hozzáadtuk az eredeti szám 4/5 részét. Így az 1617,57 számot kaptuk. Mi volt az eredeti szám?

3. Egy szabályos hatszög csúcsait pirosra illetve kékre színeztük. Két színezés akkor különböző, ha egyik nem forgatható a másikba. Hány különböző színezés van?

4. Az 5 cm oldalú szabályos háromszög egy belső P pontjára a háromszög mindhárom oldalával párhuzamos egyeneseket fektettünk. Mely P pontban (vagy pontokban) lesz a legnagyobb e párhuzamosok háromszögbe eső darabjainak az összege? Mekkora ez az összeg?

5. Mely számrendszerben lesz a 441 alakú szám négyzetszám?

Hetedik feladatsor

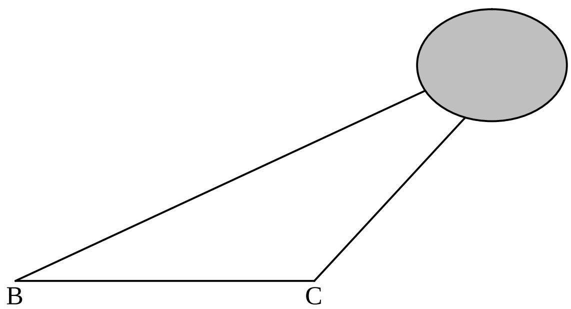
1. Szabály, hogy a tízes számrendszerben egy egész szám akkor osztható 2-vel, ha 0-ra, 2-re, 4-re, 6-ra vagy 8-ra végződik. Keress szabályt arra, hogy egy kettes-, hármas-, négyes-, ötös-, hatos számrendszerbeli szám mikor osztható 2-vel! A talált szabályt bizonyítsd is be!

2. Shakespeare egyik drámájában az egyik női főszereplőnek három ládája van: egy arany, egy ezüst és egy ólom. Az egyikbe elrejtette a képét. Kérői közül az nyerheti el a kezét, aki kitalálja, melyik láda rejti a festményt. A szerencsétlen kérőket a ládákon lévő felirat segíti. (Most nem az eredeti kérdések következnek, az túl könnyű lenne.)
Íme, a feliratok.
Aranyláda: „A kép nem az ezüstládikában van."
Ezüstláda: „A kép nem ebben a ládikában van."
Ólomláda: „A kép ebben a ládikában van."
Tudjuk, hogy a feliratok között van igaz is, és van hamis is. Melyik ládát válassza a kérő, ha el szeretné venni az ifjú hölgyet?
Extra feladat: melyik mű melyik szereplőjéről van szó? Hogy szól az eredeti rejtvény?

3. (Fischer András javaslata)
Van egy 6x6-os és egy 8x8-as sakktáblánk. Mindkettőt legfeljebb két részre bonthatjuk, mégpedig csak úgy, hogy a keletkező részek is „derékszögűek" legyenek. Állítsunk össze a darabokból egy 10x10-es táblát!
Extra feladat: András megoldásában az összeállított tábla nem sakktábla színezésű. Van-e olyan megoldás, amelyikben a nagy tábla színezése szabályos?

4. Hány olyan háromjegyű (pozitív egész) szám van, amelynek jegyei között szerepel a 9-es?

5. Kétbalkezes Pisti azt a feladatot kapta, hogy szerkessze meg az ábrán az ABC háromszög köré írható kör középpontját. Persze, azonnal ráborított egy kis tintát az ábrára. Segíts neki! Hogy tudja mégis megszerkeszteni a középpontot? (A pacába nem szabad rajzolni, nem látszik, hol van az A pont, nem lehet a körzőt, a vonalzót a pacába beletenni, a pacán nem látszik a ceruza, a paca kitörölhetetlen stb.)



Nyolcadik feladatsor

1. Bontsd fel az 1000-et három szám összegére úgy, hogy ha az elsőből 4-et kivonunk, a másodikhoz 4-et hozzáadunk, a harmadikat 3-mal elosztjuk, a kapott számok aránya 2:3:5 legyen!

2. Hány olyan 1000000-nál kisebb pozitív egész van, amely számjegyeinek összege páros és a rákövetkező egész számjegyeinek az összege is páros?

3. Mekkorák lehetnek annak a háromszögnek a szögei, amelyet valamelyik szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bont?

4. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek jegyei között nem szerepel sem a 9-es, sem a 8-as számjegy?

5. Keress oszthatósági szabályt arra, hogy mikor osztható egy 4-es számrendszerbeli szám 3-mal!

Kilencedik feladatsor

Az alábbi hat feladatból ötnek a megoldását add be! A hatodik nem számít, nem lehet vele több pontot szerezni. A második megoldásokat, általánosításokat továbbra is külön jutalmazom.

1. Tímár Mihály a Szent Borbálával 3 nap alatt hajózott Komáromból a Vaskapuig. Visszafele 7 nap alatt tette meg az utat. (Egészen addig, míg el nem süllyedt.) Jókai idejében még tutajok is úsztak a Dunán. Egy tutaj hány nap alatt ért Komáromból a Vaskapuig? (A szokásos feltételek: a hajó éjjel-nappal állandó sebességgel halad, a folyó mindig ugyanakkora sebességgel folyik, stb.)

2. Adott az e egyenes és egyik oldalán tőle különböző távolságban két pont: A és B. Szerkessz az egyenesen olyan P pontot, hogy PA és PB egyenese ugyanakkora szöget zárjon be e-vel!

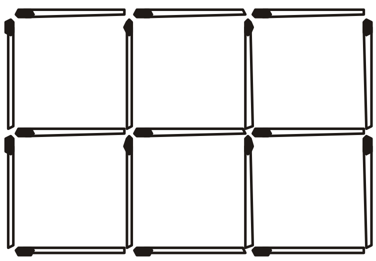
3. Dani és Cili az országúton egymástól 68 méterre várakoznak Antira. Dani Cilitől balra áll. Antit Danival összekötő egyenes az úttal 15°-os szöget zár be, míg Dani és Cili egyenese az úttal 30°-ot fog közre. Dani a lehető leghamarabb akar az útra érni. Milyen messze van az úttól, ha tudjuk, hogy Cilitől balra érkezik?

4. Ez a feladat már a következő évből származik. Az N szám úgy keletkezik, hogy egymás mellé leírjuk a számokat 1-től 2004-ig. (N = 123...20032004) Lehet-e N négyzetszám?

5. Gráfia szigetén 5 város van. A városok közül néhányat úttal kötöttek össze. Rajzold meg a sziget úthálózatának térképét, ha az egyes városokból

a) 3,3,2,2,1
b) 4,4,3,2,1
c) 3,3,3,3,3 út indul!

6. A 2×3-as téglalaprács kirakásához 17 gyufa kell. (ld az ábrát) 1000 gyufával mekkora téglalapot lehet kirakni?



Tizedik feladatsor

1. Az *ABCD* trapéz alapjai *AB* és *CD*. Átlóinak metszéspontja *M*. Bizonyítsd be, hogy *BCM* és *DAM* háromszögek területe egyenlő!

2. Alf, a tévésorozatból ismert Földön kívüli lény Angliában, Melmacban járt a nyolcosztályos általános iskolába. Minden év végén ő is kapott bizonyítványt. Ha nem bukott meg, pótapukájától ajándékot kapott: annyi macskát, amennyi az éppen befejezett évfolyam sorszámának és Alf évei számának szorzata. Tanulmányai során Alf egyszer megbukott. Az iskola befejezése után Alf macskáinak a száma osztható volt 1998-cal. (Csak a pótpapájától kapott cicákat, nem születtek újak stb.) Melyik évet ismételte Alf?

3. Gráfia szigetén 5 város van. Bármely két város között van repülő- vagy buszjárat, de csak az egyik. Tudjuk, hogy semelyik három várost nem lehet körbeutazni egyféle közlekedési eszközzel. Igazold, hogy minden városból pontosan két repülőjárat indul!

4. 50 különböző pozitív egész összege 2496. Bizonyítsd be, hogy közülük legalább kettő páros!

5. Egy kocka hat lapját pirossal és kékkel színeztük. Egy-egy oldalhoz csak egyféle szín használható, de a kocka színezéséhez nem kell mindkét színt felhasználni. Hányféleképpen színezhetjük a kockát, ha azokat tekintjük különbözőnek, amelyek nem forgathatók egymásba?

Tizenegyedik feladatsor

1. Matematikaország határán lakott az Érdekes család. Egy szép napon vendégek érkeztek hozzájuk: pontosan annyian voltak, mint ahány tagja van az Érdekes családnak. Szép idő volt, ezért heten elmentek sétálni. Az otthon maradottak közül egy kis idő múlva a családtagok számánál eggyel kevesebb ember felkerekedett biciglizni. Mivel közeledett az ebédidő, ezért néhányan visszatértek Érdekesék házába: a visszatérők száma hárommal volt kevesebb a családtagok számánál. Így a családtagok számánál néggyel kevesebben voltak a házban. Hány tagú az Érdekes család?

2. a) Aladár egy órán keresztül kerékpározott 60km/h-s sebességgel, majd – mivel már fáradtabb volt – még egy órát, de már csak 40km/h-s sebességgel. Balambér ugyanennyi ideig tekert, ugyanannyi utat tett meg, mint Aladár, de ő végig egyenletesen hajtott. Mekkora volt Balambér sebessége? (Azaz mekkora Aladár átlagsebessége?)
b) Alajos 6km-en keresztül bandukolt 2km/h-s sebességgel, majd gyorsított, s még 6km-t tett meg, de már 4km/h-s sebességgel. Csenge ugyanennyi utat tett meg, ugyanannyi idő alatt, mint Alajos, de ő végig egyenletes tempóban haladt. Mekkora volt Csenge sebessége? (Azaz mekkora Alajos átlagsebessége?)

3. Öt darab 1-es és két darab 2-es számkártyánk van. Hány különböző hétjegyű számot tudunk a számkártyákkal kirakni?

4. Egy szabályos sokszög átlói és oldalai számának szorzata 160. Mekkora a sokszög belső szöge?

5. Igazold, hogy öt egész szám negyedik hatványai közül ki lehet választani kettőt úgy, hogy különbségük osztható legyen 10-zel! Lehet-e a feladatban a 10-et nagyobb számra cserélni? (Azaz a feladat állítását élesíteni, javítani.)

Tizenkettedik feladatsor

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek 7-szerese négyzetszám, 28-szorosa köbszám?

2. Az *ABC* egyenlőszárú háromszög alapja *AC*. Az *AB* száron felvettünk egy *P*, a *BC* szár egyenesén pedig egy *Q* pontot úgy, hogy *AP*=*CQ*. (A *Q* pont nincs rajta a száron.) A *PQ* szakasz *M*-ben metszi az alapot. Készíts ábrákat, figyeld meg, mit tudsz leolvasni róluk! Sejtése(i)det igazold!

3. Az *ABC* egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögeinek *AD* és *CE* szögfelezői az *O* pontban metszik egymást. Az *O*, *D*, *C* pontokra illeszkedő kör *K* középpontja az *AC* szakaszon van. Számítsd ki az *ABC* háromszög szögeit!

4. Péter, András, Ádám, Dani és Áron egy szekrénybe tették a matematikafüzetüket. Mivel informatikáról késve indultak a matekórára, ezért a szekrényhez érkezvén mindegyik fölkapott egy füzetet, s órára sietett. Csak az órán derült ki, hogy egyik gyereknek se a saját füzete jutott. Hányféleképpen hozhatták magukkal a füzeteket?

5. Egy folyón, és mellette egy tavon egy-egy evezős tartott edzést. Mindketten 8km/h sebességgel eveztek (az állóvízhez képest). Egy vonalból indultak, ugyanolyan távolságra eveztek, majd visszafordultak, és visszaeveztek a kiindulási helyre. Melyikük ért vissza hamarabb? Mennyi a két evezős visszatéréséig eltelt idők aránya, ha a folyó sebessége 4km/h?

Tizenharmadik feladatsor

1. Kartonból vágjunk ki egy szabályos sokszöget, középpontját rögzítsük, és forgassuk e pont körül! Hány oldala lehet a sokszögnek, ha 25,5°-os elforgatás után egybeesik eredeti kontúrjával?

2. a) Egy vendégfogadóshoz egyszer beállított egy vándor. Pénze nem volt, de felajánlotta a fogadósnak, hogy 6 szemből álló ezüstláncából minden nap ad egy szemet, amíg csak ott marad a fogadóban. (A lánc nyílt.) Legalább hány szemet kell a láncból elfűrészelnie ahhoz, hogy a vándor hat napon keresztül mindennap el tudjon számolni a fogadóssal? (Szabad visszajáró pénzként visszakérni az előzőleg adott láncszemeket.)
b) Milyen hosszú a lánc, legfeljebb hány napig maradhat a fogadóban a vándor, ha elég két szemet elfűrészelnie?

3. Az *ABC* derékszögű háromszög egyik szöge 75°, az átfogó hossza 4cm. Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magasság?

4. Egy társaságban mindenkinek páratlan sok ismerőse van. Igazold, hogy páros sok ember van a társaságban! (Az ismeretség kölcsönös.)

5. Melyik az a két négyzetszám, amelyek különbsége 100? Melyek azok, amelyek különbsége 2002?

Tizennegyedik feladatsor

1. Egy társaságban 5 tagú elnökséget választottak. Az elnökség tagjai Alajos, Bendegúz, Csenge, Detre és Eleonóra. Egymás közül ki akarnak nevezni egy elnököt, egy helyettest, egy titkárt, s ketten titulus nélkül maradnak. Alajos csak akkor vállalja az elnökséget, ha Eleonóra a helyettes, s Detre rang nélkül marad. Detre és Csenge csak együtt vállalnak tisztséget. Bendegúz nem vállal semilyen posztot. Hányféleképpen alakíthatják meg az elnökséget?

2. Keresd meg a koordináta-rendszerben azokat az (x,y) pontokat, melyekre
$[x]+[y]=[x+y]$ teljesül! (Itt $[x]$ x egészrészét jelenti.)

3. Egy szabályos huszonötszög 11 csúcsát pirosra színeztük.Találhatunk-e minden esetben három piros csúcsot úgy, hogy ezek egy egyenlő szárú háromszög csúcsai legyenek?

4. Számold ki!
$(1-1/2^2)\cdot(1-1/3^2)\cdot(1-1/4^2)\cdot\ ...\ \cdot(1-1/100^2) = ?$

5. Az *ABCD* és a *KLMN* téglalapok megfelelő oldalai párhuzamosak, s az ábra szerint helyezkednek el. Mit mondhatunk az *ALCN* és a *KBMD* négyszögek területéről?

Tizenötödik feladatsor

1. Az ABC háromszög AB oldalának hozzáírt köre az AC illetve BC oldal meghosszabbítását rendre az E illetve F pontban érinti. Igazold, hogy $AE = s\text{-}AC$, $BF = s\text{-}BC$, ahol s a háromszög kerületének a fele!

2. Oldd meg az alábbi egyenletet! x és y pozitív egészek.
$1/x+1/y=8/15$

3. Az e egyenes ugyanazon oldalán fekszik a k és a K kör. Mindkettő érinti az e egyenest, rendre az A illetve B pontokban, továbbá a két kör érinti egymást a C pontban. Igazold, hogy ACB szög derékszög!

4. A sakktábla bal alsó mezőjét letakartuk. A maradék 63 mező lefedhető-e 3×1-es dominókkal?

5. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott a két befogó hosszának összege, továbbá az egyik hegyesszöge!