1. feladatsor **2012.09.07.**

1. Egy kör alakú asztalnál ül Cili, Dezső és Elek. Mindegyikük választ egy számot, nekünk pedig elárulják, hogy mi a két másik gyerek által választott szám összege. Cili 20-at mond, Dezső 8-at, Elek pedig 6-ot. Melyik számra gondolt Elek? (Mindegyik gyerek tökéletesen számol.)

2. Van 3 piros és 2 kék sapkánk. Cili, Dezső és Elek szemét bekötöttük, majd mindhármuk fejére tettünk egy-egy sapkát, a megmaradt két darab sapkát pedig eldugtuk. Cili fejéről levettük a kötést, és megkérdeztük tőle a fején lévő sapka színét.

– Nem tudom – felelte Cili, miután megnézte a két másik gyerek fején lévő sapkát.

Ezután levettük Dezső fejéről is a kötést. Tőle is megkérdeztük, milyen színű a sapkája.

– Én sem tudom – felelte Dezső, miután megnézte a két másik gyerek sapkáját.

Ekkor Elek felkiáltott:

– Én már tudom a sapkám színét!

Ti meg tudjátok mondani, milyen színű volt Elek sapkája? És indoklást tudtok-e adni a válaszotokra? (A gyerekek nagyon okosak, levonják az összes logikailag helyes következtetést.)

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalára befelé megrajzoljuk az ABE szabályos háromszöget. Mekkora szöget zár be a DE és a DC szakasz? Szerkessz ábrát is a feladathoz. (A szerkesztés lépéseit nem kell leírni.)

4. Le lehet-e fedni hézagmentesen és átfedés nélkül egy 8×8-as táblát 1×2-es dominókkal úgy, hogy a táblát ne lehessen egy egyenes vágással kettévágni anélkül, hogy ketté ne vágnánk egy dominót?

5. Le lehet-e fedni hézagmentesen és átfedés nélkül egy 23×23-as négyzetet egy darab 1×1-es, néhány 2×2-es és néhány 3×3-as négyzettel?

Beadási határidő: 2012.09.13

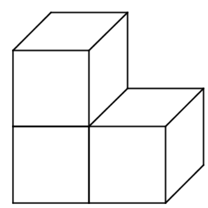
2. feladatsor **2012.09.14.**

1. Képezz négyjegyű számokat az 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával. Hány számot kaptál? A kapott számok közül hány páros? Ha a kapott számokat nagyság szerint növekvő sorrendbe állítod, melyik szám áll a 4., 7., 12. és 20. helyen?

2. Ha az 1995-öt és az 1867-et elosztjuk ugyanazzal a kétjegyű számmal, akkor mind a kétszer ugyanazt a maradékot kapjuk. Milyen kétjegyű számmal oszthattunk? Mi lehetett a maradék?

3. Egy (8×8-as) sakktáblán kivágunk két átellenes sarkot. Le lehet-e fedni a maradék 62 mezőt 31 darab 1×2-es dominóval?

4. Három egyforma kockából összeragasztunk egy L betűhöz hasonló alakzatot. Legkevesebb hány ilyen alakzatból lehet összerakni egy kockát? (Igyekezz minél átláthatóbb ábrát készíteni. Az ábrának nem muszáj térbelinek lennie.)



5. Le lehet-e fedni hézagmentesen és átfedés nélkül egy 6×6-os táblát 1×2-es dominókkal úgy, hogy a táblát ne lehessen egy egyenes vágással kettévágni anélkül, hogy ketté ne vágnánk egy dominót?

Beadási határidő: 2012.09.20

3. feladatsor **2012.09.21.**

1. Mennyi az 1000 osztóinak szorzata?

2. Egy szultánnak 143 felesége volt. A szultán 1000 napon keresztül adót szedett, az első napon 144 aranyat, a többi napon pedig mindig eggyel több aranyat, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani a feleségei között. Meg tudta-e tenni?

3. Van-e olyan négyzetszám, amely csak 5-ös számjegyet tartalmaz?

4. Négyzetrácsos lapon felveszünk 3 pontot, A-t, B-t és C-t. Az A ponthoz képest a B pont két egységgel jobbra és egy egységgel felfelé van, a C pont pedig öt egységgel jobbra van (szintén az A ponthoz képest). Mekkora az $ABC\sphericalangle$ szög nagysága?

5. Tízen ülnek egy kör alakú asztalnál, és mindenki gondol egy számra. Ezután mindenki bemondja a két szomszédja által gondolt szám átlagát (az összegük felét). A következő számok hangzanak el: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Melyik számra gondolt az, aki a 6-ot mondta?

Beadási határidő: 2012.09.28

4. feladatsor **2012.09.28.**

1. a, b és c különböző egész számok. Mennyi $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ legnagyobb lehetséges értéke?

2. Határozd meg az első száz szám összegét, melyek nem tartalmazzák az egyes számjegyet.

3. Ötszemélyes autókkal és kilencszemélyes mikrobuszokkal el kell szállítani 87 személyt. Hányat rendeljünk, hogy minden ülőhelyet kihasználjunk, és mindenkit egyszerre szállítsanak el? Az összes megoldást keresd meg.

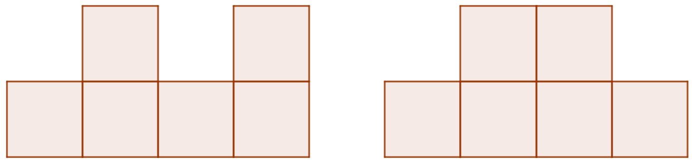
4. Egy $ABCD$ négyzet AB oldalára befelé megrajzolom az ABE szabályos háromszöget,BC oldalára befelé pedig a BCF szabályos háromszöget. Bizonyítsd be, hogy a DEF háromszög szabályos.

5. Meg lehet-e adni 8 pontot a síkon úgy, hogy pontosan 42 darab egyenlő szárú háromszöget határozzanak meg?

Beadási határidő: 2012.10.05

5. feladatsor **2012.10.05.**

1. Egy asztalra leraktunk néhány egyforma kockát. A következő elöl- és oldalnézetet kaptuk:



Legkevesebb hány kockát tehettünk le az asztalra?

2. (a) Egy szabályos hatszög egyik csúcsában megrajzoljuk az összes átlót. Mekkora szögekre bontják ezek a hatszög adott csúcsánál lévő szögét?

(b) Mekkora a szabályos hatszögben a leghosszabb átló és az oldal aránya?

3. Van négy tojásunk, kettő közülük záp. Van egy jósnő, akihez ha elviszünk két tojást, akkor rámutat az egyikre. Ha a két tojás között van záp, mindenképp egy záp tojásra mutat. (Ha nincs köztük záp, akkor is rámutat az egyikre.) A jósnő egy tanácsért 100 forintot kér. Legkevesebb hány forintból tudjuk biztosan megtalálni a két záptojást?

4. Le lehet-e fedni egy 90×90-es négyzetet 1×4-es dominókkal?

5. (a) Van-e olyan négyzetszám, amely 3 darab 4-es számjegyre végződik? (Számológépet, számítógépet ne használj.)

(b) Van-e olyan legalább kétjegyű négyzetszám, amely csak négyes számjegyből áll?

Beadási határidő: 2012.10.12

6. feladatsor **2012.10.12.**

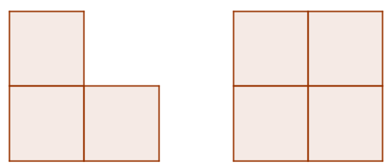
1. Az ABC szabályos háromszög magassága $9\,cm$. Melyek azok a d távolságok, melyekre igaz a következő állítás: létezik az ABC háromszög belsejében olyan pont, mely a háromszög minden oldalegyenesétől legalább d távolságra van?

2. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal, és így tovább, maga a hatjegyű szám osztható 6-tal. Mi lehet ez a hatjegyű szám?

3. Egy szabályos hatszögben megrajzoljuk azokat az átlókat, melyek a másodszomszédos csúcsokat kötik össze. Ezek a szakaszok feldarabolják a szabályos hatszögünket. Mutasd meg, hogy a kapott darabokból összerakható három darab egybevágó szabályos hatszög. (Egy darabból is állhat egy hatszög.)

4. Keresd meg az összes olyan a, b pozitív egész számot, melyekre teljesül, hogy $2^a - 1 = 3^b$.

5. Egy 9×7-es téglalapot lefedünk (átfedés nélkül) az ábrán látható kétféle alakzattal. Hányat használhattunk fel a fedésben a négyzetből?



Beadási határidő: 2012.10.19

7. feladatsor **2012.10.26.**

1. A gyerekek a csúnya fán játszottak, amikor hirtelen mind lepotyogtak róla.

Aladár esés közben az A, B, C ágakat érintette ebben a sorrendben.
Balambér esés közben a D, E, F ágakat érintette ebben a sorrendben.
Celina esés közben a G, A, C ágakat érintette ebben a sorrendben.
Dorina esés közben a B, D, H ágakat érintette ebben a sorrendben.
Endre esés közben az I, C, E ágakat érintette ebben a sorrendben.

Szegény Zsuzsi az esés közben mind a kilenc ágat érintette, és közben azon töprengett, hogy az eddigi információkat figyelembe véve vajon hányféle lehet a kilenc ág sorrendje?

2. Található-e három olyan egész szám, melyek összege 2012, szorzata pedig 999999?

3. Egy téglalap egyik átlójának felezőmerőlegese a téglalap hosszabb oldalából a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora lehet a téglalap két átlója által bezárt szög?

4. A szabályos hétszög egyik csúcsában megrajzoljuk az összes átlóját. Mekkora az az öt darab szög, melyekre felbontják ezek az átlók a szabályos hétszög adott csúcsánál lévő szögét? (A szögeket tört alakban add meg.)

5. A következő szerkesztés eljárásban a körző mellett a betolóvonalzót használjuk. A betolóvonalzó egy olyan vonalzó, melyen megjelöltek két pontot. A szokásos szerkesztési lépések mellett megengedett szerkesztési lépés az is, hogy ha adott két metsző egyenes, és rajtuk kívül egy pont, akkor a betolóvonalzónkat úgy mozgassuk, hogy áthaladjon a megadott ponton, és a vonalzón lévő két pont ráessen a két megadott egyenesre. Mutasd meg, hogy az alább leírt módszer alkalmas a síkon előre megrajzolt tetszőleges hegyesszög harmadolására.

Legyen adva a síkon az AOB hegyesszög. A szög OA szárán vegyük fel azt az X pont, melyre az O és az X pont távolsága a betolóvonalzón lévő két pont távolságának fele. Az X pontból szerkesszünk párhuzamost és merőlegest a szög OB szárának egyenesével/egyenesére: így kapjuk az e és az f egyenest. Ezután a betolóvonalzót helyezzük el úgy, hogy átmenjen az O ponton, és a vonalzón lévő két pont ráessen az e és az f egyenesre. Ha most megrajzoljuk a vonalzó által meghatározott egyenest, az harmadolni fogja a megadott szöget.

Beadási határidő: 2012.11.07. (Szerda!)

8. feladatsor **2012.11.09.**

1. (a) Lehet-e 9 egymást követő **egész** szám összege prímszám?

(b) Lehet-e 11 egymást követő **egész** szám összege prímszám?

2. Adott a síkban egy egyenes és rajta kívül két pont, A és B. Az egyenes melyik P pontjára lesz a $d(P, A) + d(P, B)$ távolságösszeg a lehető legkisebb?

3. Mit kapunk eredményül, ha 840 összes osztójának összegét elosztjuk a 840 összes osztója reciprokának összegével?

4. Bergengóciában néhány város között oda-vissza közlekedő járatokat szeretnének létesíteni. A gazdasági válság hatására azonban van néhány megkötés: a vezetés szeretné, ha egy városból legfeljebb 3 repülőjárat közlekedne, és bármely városból bármely városba el lehetne jutni legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány város esetén vállalod egy ilyen közlekedési hálózat tervezését?

5. Egy sorozatot képzünk a következő szabállyal. A sorozat első tagja a 12. Ha a sorozat egy adott tagja kisebb, mint 2012, akkor a következő tag kiszámításához a meglévő taghoz hozzáadjuk a számjegyeinek összegét. Ha a sorozat egy adott tagja legalább 2012, akkor a következő tag kiszámításához a meglévő tagból levonjuk a számjegyeinek összegét. Mennyi a sorozat egymilliomodik és egymillióegyedik tagjának összege?

Beadási határidő: 2012.11.16.

9. feladatsor **2012.11.16.**

1. Ha egy diák elkölti először a pénze $\frac{3}{5}$-ét, majd a maradék $\frac{1}{4}$-ét, akkor 1650 forinttal kevesebb pénze marad, mintha az eredeti összeg $\frac{1}{5}$-ét költötte volna el. Mennyi pénze volt eredetileg a diáknak?

2. Adott két egyenes, melyek metszik egymást, de a metszéspontjuk nem fért ki a lapra. Szerkesztendő csak körzővel és vonalzóval a két egyenes által meghatározott szöget felező egyenesnek a lapra kiférő szakasza. (Csak olyan szerkesztési lépéseket lehet végrehajtani, amelyek kiférnek a papíron.)

3. Van 100 kék és 99 piros sapkánk. 100 gyermek szemét bekötjük, es feltesszük a fejükre a sapkákat. Ezután az első gyermek kinyitja a szemét, és megállapítja, hogy nem tudja megmondani a fején lévő sapka színét. Ezután a második gyermek is kinyitja a szemét, és ő is megállapítja, hogy nem tudja megmondani a fején lévő sapka színét. Ez így folytatódik egészen az utolsó előtti (99.) gyermekig. Milyen színű sapka van a századik gyermek fején? (A gyermekek hallják egymás válaszát, és nagyon-nagyon okosak.)

4. Egy számot tökéletes számnak nevezünk, ha a szám egyenlő a nála kisebb osztóinak összegével (Például 6=1+2+3). Mennyi lehet egy tökéletes számban az osztók reciprokának összege? (Például a 6 esetében 1/1+1/2+1/3+1/6=2.)

5. Egy kettőhatványról tudjuk, hogy három egyforma számjegyre végződik. Mi lehet ez a számjegy? (Nem kell megadni ilyen kettőhatványt.)

Beadási határidő: 2012.11.23.

10. feladatsor **2012.11.23.**

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

2. Bizonyítsd be, hogy $13^{100} + 3 \cdot 5^{99} + 8$ osztható 24-gyel.

3. Adott a síkon az ABC szabályos háromszög. Keresd meg az összes olyan M pontot a síkon, amelyre az ABM és az ACM háromszög is egyenlő szárú.

4. Egy ABC háromszög magasságvonalainak hosszúsága m_a, m_b és m_c (más szóval ezek a csúcsok távolságai a velük szemközti oldalaktól). Igaz-e, hogy mindig létezik olyan háromszög, melynek oldalai m_a, m_b és m_c hosszúságúak?

5. Alma és Béni a következő játékot játsszák: Béni felír kilenc kártyára (nem feltétlenül különböző) egész számot. Ezután a két gyerek egy háromszor hármas táblázat mezőibe felváltva elhelyezik ezt a kilenc számkártyát. A számkártyák elhelyezését Alma kezdi. Alma nyer, ha az első és a harmadik oszlopba elhelyezett számok összege legalább akkora, mint az első és a harmadik sorba elhelyezett számok összege, különben pedig Béni. Van-e valamelyik gyereknek nyerő stratégiája?

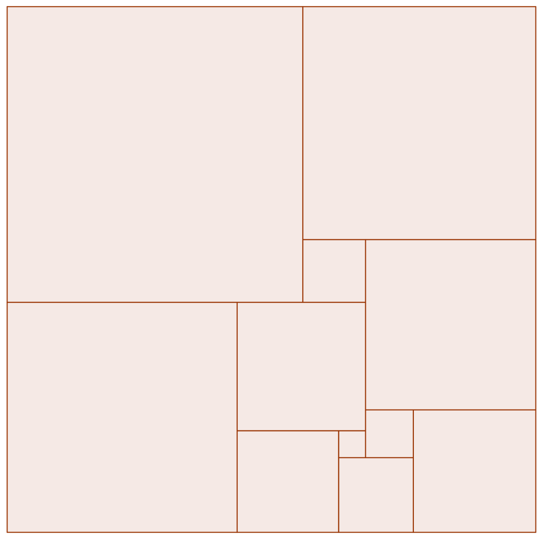
Beadási határidő: 2012.12.01. (Szombat)

11. feladatsor **2012.12.01.**

1. Helyezz el zárójeleket az alábbi összefüggés bal oldalán úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség!

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 = 7.$$

2. Az ábrán látható téglalapot csupa négyzetre bontottuk, a legkisebb négyzet oldala egy egység. Mekkorák a téglalap oldalai?



3. Egy 3×3-as táblázat ki van töltve 9 számmal. Tudjuk, hogy az első, a második és a harmadik oszlopban, illetve az első és a második sorban a középső szám a két szélső szám átlaga. Igaz-e, hogy a harmadik sorban is a két szélső szám átlaga a középső szám?

4. Keresd meg az összes olyan pozitív p, q, r prímszámot, melyekre teljesül, hogy

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1.$$

5. Ketten a következő játékot játsszák: egy $1 \times n$-es táblázat mezőibe felváltva írnak egymástól függetlenül A vagy B betűt. Ha valamelyikük lépése után három egymás melletti mezőből kiolvasható a BAB szó, az adott lépést megtevő játékos nyer. (Ha nem alakul ki az n. mező kitöltése után sem a BAB szó, a játék döntetlennel végződik.)

(a) Van-e olyan n, amelynél az első játékosnak van olyan stratégiája, mellyel biztosan nyer?

(b) Van-e olyan n, amelynél a második játékosnak van olyan stratégiája, mellyel biztosan nyer?

Beadási határidő: 2012.12.07.

12. feladatsor **2012.12.07.**

1. Egy erdőben tölgyfák és nyárfák vannak, az erdő 1/5 része tölgyfa. Az erdőben kivágják a nyárfák egy részét. A favágás után az erdő 1/4 része tölgyfa. Hányad részét vágták ki a nyírfáknak?

2. A 81-jegyű A szám minden számjegye 1-es. Mutasd meg, hogy az A szám osztható 81-gyel.

3. Keresd meg az összes olyan $a \leq b \leq c$ pozitív egész számot, melyekre teljesül, hogy

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$

4. Bizonyítsd be, hogy a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint ugyanennek az oldalnak egy tetszőleges pontjából a két másik oldalra állított merőleges szakaszok hosszának összege.

5. Ali és Babi a következő játékot játsszák: Ali négy egymás mellett lévő korongra felír egy-egy pozitív egész számot. Ezután Babi kezd, és felváltva elvesznek egy-egy korongot a sor valamelyik széléről. Babi nyer, ha az általa elvett korongokon lévő számok összege legalább akkora, mint Ali korongjainak összege. Van-e valamelyik gyereknek nyerő stratégiája?

Beadási határidő: 2012.12.14.

13. feladatsor **2012.12.14.**

1. Egy vidámparkban a körhintán egységes belépőjegy van felnőtteknek és gyerekeknek egyaránt, de az első valahány menet a felnőtteknek és a gyerekeknek is ingyen van. A felnőtteknek kevesebb menet van ingyen, mint a gyerekeknek. Két felnőtt egy gyerekkel összesen 20 menetért 3200 Ft-ot fizetett, három felnőtt két gyerekkel összesen ugyanennyi menetért csak 2600 Ft-ot, két felnőtt három gyerekkel pedig 2400 Ft-ot. Hány menet van ingyen a gyerekeknek, illetve a felnőtteknek, ha mindenki kihasználta az összes ,,ingyen" menetét?

2. Keresd meg az összes olyan k egész számot, melyre $\frac{2k+5}{k+1}$ egész szám.

3. Az A és a B szám ugyanazt a maradékot adja 72-vel osztva. Igaz-e, hogy az A^2 és a B^2 szám ugyanazt a maradékot adja 144-gyel osztva?

4. Egy végtelen négyzetrácson valaki 40 négyzetet pirosra színez. Melyik az a legnagyobb n szám, melyre igaz, hogy biztosan ki lehet választani a piros négyzetek közül n darabot úgy, hogy ne legyen közös pontjuk (a négyzetekhez az oldalaik és a csúcsaik is hozzátartoznak)?

5. Négy egymást követő pozitív egész számot összeszorzunk, és az eredményhez hozzáadunk egyet. Mutasd meg, hogy biztosan négyzetszámot kapunk.

Beadási határidő: 2012.12.21.