Gráfok spektruma

Hraskó András

Előadás a spec. mat. tagozaton tanító tanárok továbbképzésén 2003. márciusában, illetve ugyanezen időszak szakköri anyaga az FPI 11-12-es tehetséggondozó szakkörén

1. A spektrum

Képzeljük el, hogy egy gráf minden csúcsánál van egy szám (kizárjuk, hogy mindegyik 0 legyen). Minden csúcshoz odaírunk egy új számot is, az éllel szomszédos csúcsokon eredetileg álló számok összegét. Így most mindegyik csúcsnál két szám áll: az eredeti és az új. Előfordulhat-e, hogy az új és a régi szám aránya mindegyik csúcsnál ugyanazzal a λ számmal egyenlő? Mely λ esetén lehetséges ez? Hogyan kell megválasztanunk az eredeti számokat ahhoz, hogy egy előírt λ arányt kapjunk? Az arányossági tényezőként előforduló λ arányok a gráf *sajátértékei*, halmazuk a gráf *spektruma*, az egyes sajátértékekhez tartozó az arányosságot teljesítő eredeti számkitöltések a *sajátvektorok.*

Ezek a fogalmak a fizikából származnak. Egy húr, amelynek két vége rögzített csak néhány periodikus mozgásra képes. Ezek a periodikus mozgások a húr sajátrezgései, frekvenciáik - a sajátfrekvenciák - csak a húr anyagától és hosszától függenek. A húr csak ezeknek a frekvenciáknak megfelelő hangokat képes kiadni magából. Bárhogy is pendítjük meg a húrt, az csak olyan mozgásra lesz képes, amely ezekből a sajátrezgésekből áll össze. Attól függően, hogy az egyes sajátrezgések milyen mértékben vannak jelen a húr mozgásában más és más összetett hangot hallunk, de a lehetséges összetevők adottak.

Az elnevezéseket azonban nem a hang-, hanem a fényjelenségek motiválták. Már régen megfigyelték, hogy ha a fény elé prizmát tesznek, akkor az különböző alapszínekre esik szét. Az eszközök finomodása által elérhetővé vált alaposabb vizsgálat azt mutatta, hogy általában a színkép nem folytonos: bizonyos hullámhosszak megjelennek benne, bizonyosak pedig nem. A részletes felbontásban nem folytonos szivárványszerű minta, hanem fekete tartományok között elkülönülve megjelenő színes sávok - spektrumvonalak - láthatók.

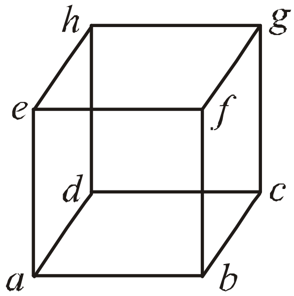
Azonban már a legegyszerűbb eset, a hidrogén színképe sem egyezett meg a húr "hangképének" egyszerű mintáival. Míg a húr egyféle sajátfrekvenciával és annak többszöröseivel (felharmonikusok) képes rezegni, a hidrogén atom színképe --- Balmer vonalak --- ennél bonyolultabb. Niels Bohr adta meg azt a képletet, amely a különböző pályákon keringő elektronok frekvenciából kifejezi az átlépéskor kibocsátott fény frekvenciáját. Képlete csakis a legegyszerűbb atom, a hidrogén esetén írta le jól a spektrumot.

Werner Heisenberg táblázatba rendezte a különböző elektronpályák közti átugrás adatait. A rendszer leírására a különböző táblázatok összeszorzására is szüksége volt: újrafelfedezte a mátrixszorzást. Elméletében minden fizikai mennyiségnek (energia, impulzus stb.) egy-egy mátrix felel meg, a mennyiségek lehetséges értékei az adott mennyiségnek megfelelő mátrix sajátértékei. Éppen így a gráf sajátértékei is felfoghatók egy mátrix - a gráf incidenciamátrixának - sajátértékeiként.

A távoli csillagokból kevés információ jut el hozzánk fényükön kívül. Mégis, e fény spektrumát vizsgálva megfejthetjük a csillag mozgását, anyagi összetételét.
Épp így a gráf spektruma is sokat elárul magáról a gráfról. Ebből szeretnénk rövid ízelítőt adni.

2. Három gráf spektruma

1. feladat Határozzuk meg
a) a kocka;
b) az ötszög;
c) a Petersen-gráf
spektrumát és írjuk le az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorok rendszerét!



a) Az ábra jelöléseinek megfelelően az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:

$$\lambda\cdot a = b+d+e, \qquad \lambda\cdot b = a+c+d, \qquad \lambda\cdot c = b+d+g,$$
$$\lambda\cdot d = a+c+h, \qquad \lambda\cdot e = a+f+h, \qquad \lambda\cdot f = b+e+g,$$
$$\lambda\cdot g = c+f+h, \qquad \lambda\cdot h = d+e+g.$$

Válasszunk ki négy páronként nem szomszédos csúcshoz tartozó egyenletet, és adjuk össze őket:

$$\lambda\cdot a + \lambda\cdot c + \lambda\cdot f + \lambda\cdot h = 3\cdot(b+d+e+g),$$
$$\lambda\cdot b + \lambda\cdot d + \lambda\cdot e + \lambda\cdot g = 3\cdot(a+c+f+h).$$

Az első egyenlet λ-szorosának és a második háromszorosának összegéből sok tag kiesik. Marad, hogy

$$\lambda^2\cdot(a+c+f+h) = 9\cdot(a+c+f+h),$$

és teljesen hasonlóan:

$$\lambda^2\cdot (b+d+e+g) = 9\cdot(b+d+e+g).$$

Ez a két egyenlet háromféleképpen teljesülhet egyszerre: vagy $\lambda = 3$, vagy $\lambda = -3$, vagy

$$a+c+f+h=b+d+e+g = 0. \qquad (*)$$

$\lambda = 3$ azt jelenti, hogy mindegyik csúcsnál álló szám egyenlő a szomszédjainak átlagával. Állítjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha mindegyik szám egyenlő. Valóban, a legkisebb szám csak úgy lehetne a szomszédainak átlaga, ha azok mind egyenlőek volnának vele. De akkor azok is legkisebbek, így egyenlők a szomszédaikkal. Így tovább haladva látható, hogy minden szám egyenlő lesz.

$\lambda = -3$ csak úgy lehetséges, hogy a 4 páronként nem szomszédos csúcson álló számok egymással egyenlők, a másik négy csúcson pedig ezeknek a számoknak az ellentettje áll. Ez azért van így, mert ha a $\lambda = -3$ -hoz tartozó sajátvektorban a 4 páronként nem szomszédos csúcson álló négy számot a (-1)-szereseikre cseréljük, akkor a $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátvektort kell kapnunk.

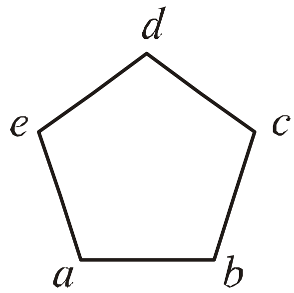
Tegyük fel most, hogy $\lambda \neq \pm 3$, hanem a $(*)$ feltétel teljesül. Ekkor

$$\lambda\cdot a = b+d+e = -g, \qquad \lambda\cdot g = c+f+h = -a,$$

így $\lambda^2\cdot a = \lambda\cdot (\lambda\cdot a) = -\lambda\cdot g = a$. Nem mindegyik szám 0, ezért $\lambda = 1$, vagy $\lambda = -1$. Korábbi egyenleteinkből leolvasható, hogy a $\lambda = 1$ sajátértéknek pontosan azok a vektorok a saját-vektorai, amelyek teljesítik a $(*)$ feltételt, és emellett a szemköztes csúcsokra írt számok egymás ellentettjei. Ezek a vektorok három szabad paraméterrel adhatók meg: pld a, c és f értéke tetszőleges lehet, de a többi változó ezek után már meghatározott:

$$h = -b = -(a+c+f), \quad e = -c, \quad g = -a, \quad d = -f.$$

$\lambda = 1$ esetén a szemköztes csúcsokra írt számok egyenlők és ugyanígy 3 változó értéke adható meg tetszőlegesen. A sajátértékhez tartozó sajátvektorokban a szabadon megadható paraméterek száma a sajátérték *multiplicitása*. Ebben az esetben a 3 és a (-3) sajátértékek



multiplicitása 1, míg az 1-é és a (-1)-é 3.

b) Az ábra jelöléseivel most

$$\lambda\cdot a = b+e, \quad \lambda\cdot b = c+a, \quad \lambda\cdot c = d+b, \quad (**)$$

$$\lambda\cdot d = e+c, \quad \lambda\cdot e = a+d. \quad (***)$$

Az összes egyenlet összege:

$$\lambda\cdot (a+b+c+d+e) = 2\cdot(a+b+c+d+e),$$

amiből $\lambda = 2$, vagy $a+b+c+d+e = 0$. $\lambda = 2$ pontosan akkor teljesül, ha mindegyik szám egyenlő. Ha a számok összege egyenlő, akkor a

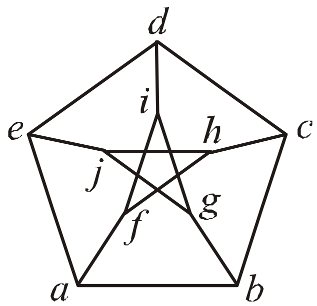
$$\lambda\cdot a = b+e, \qquad \lambda^2\cdot a = \lambda\cdot b + \lambda\cdot e = a+c+d+a$$

egyenletekből $(\lambda+\lambda^2)\cdot a = a + (a+b+c+d+e) = a$. Ugyanilyen összefüggés bármelyik csúcsra írt számmal felírható, tehát $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, amiből $\lambda = (-1\pm\sqrt{5})/2$.

Mindkét sajátértékhez két szomszédos csúcshoz tartozó szám is tetszőlegesen megadható, a többi a (**), (***) egyenletek alapján már egyértelműen adódik, és megfelelően "körbeér" (kihasználjuk, hogy $\lambda^2 = 1 - \lambda$):

$$a = a, \quad b = b, \quad c = \lambda\cdot b - a, \quad d = \lambda\cdot c - b = -\lambda\cdot b - \lambda\cdot a,$$

$$e = \lambda\cdot d - c = -b + \lambda\cdot a, \qquad a = \lambda\cdot e - d = a, \; b = \lambda\cdot a - e = b.$$



c) Az összes egyenlet összegéből most az adódik, hogy $\lambda = 3$ vagy a változók értékeinek összege 0. A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorban mindenütt ugyanaz a szám áll. Ezután adjuk össze külön a "belső" és külön a "külső" ötszöghöz tartozó egyenleteket:

$$(\lambda-2)\cdot(a+b+c+d+e) = f+g+h+i+j,$$

$$(\lambda-2)\cdot(f+g+h+i+j) = a+b+c+d+e.$$

Ezekből

$$(\lambda-2)^2\cdot(a+b+c+d+e) = a+b+c+d+e,$$
$$(\lambda-2)^2\cdot(f+g+h+i+j) = f+g+h+i+j,$$

tehát vagy
$a+b+c+d+e = f+g+h+i+j = 0$, vagy $\lambda = 3$, vagy $\lambda = 1$. $\lambda=1$ esetén a, b, c, d és e értékét tetszőlegesen előírhatjuk, a többi csúcshoz tartozó szám már egyértelműen adódik:

$$f = a-b-e, \qquad g = b-c-a, \qquad h = c-d-b, \qquad i = d-e-c, \qquad j = e-a-d,$$

és mindig sajátvektort kapunk. Pld f szomszédainak összege:

$$a+h+i = a+c-d-b+d-e-c = a-b-e = f.$$

Az 1-től és 3-tól különböző sajátértékek sajátvektoraira $a+b+c+d+e = f+g+h+i+j = 0$ teljesül.
$\lambda\cdot a = b+f+e$, $\quad \lambda^2\cdot a = \lambda\cdot b + \lambda\cdot f + \lambda\cdot e = (c+g+a) + (h+i+a) + (j+d+a)$,
így $\lambda^2\cdot a + \lambda\cdot a = 2a$, azaz $(\lambda^2 + \lambda - 2)\cdot a = 0$.
Hasonló összefüggés bármelyik másik változóra levezethető, tehát ha nem mindegyiknek 0 az értéke, akkor $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, azaz $\lambda = 1$, vagy $\lambda = -2$. A $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektoroknak négy szabad paramétere van. Ha pld a külső ötszög öt számát úgy választjuk meg, hogy összegük 0 legyen, akkor a belső csúcsok értékei már egyértelműen adódnak:

$$f = -2\cdot a-b-e = c+d-a, \quad g = d+e-b, \qquad h = e+a-c, \qquad i = a+b-d, \qquad j = b+c-e,$$

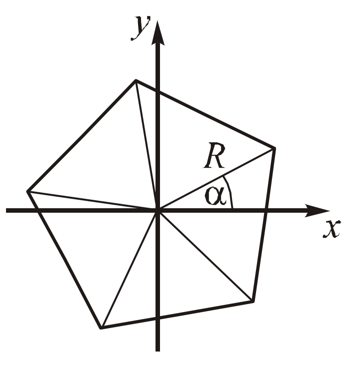
és mindig sajátvektort kapunk. Pld f szomszédainak összege:

$$a+h+i = a+e+a-c+a+b-d = (a+b+c+d+e)+2a-2c-2d=-2\cdot f.$$

Házi feladat Álljon az F gráf két csúcsból, a két csúcs közötti élből, és az egyik csúcshoz tartozó hurokélből.
a) Határozzuk meg F spektrumát!
b) Írjuk mind a két csúcsra az 1 számot. Bontsuk fel ezt a vektort sajátvektorok összegére!
c) Határozzuk meg a) és b) alapján a Fibonacci sorozat explicit képletét!

3. Két gráf geometriája

Érdekes módon függ össze a második legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza a gráf geometriai megvalósíthatóságával. Rajzoljunk le egy szabályos ötszöget a koordinátarendszerbe úgy, hogy középpontja az origó legyen!



A csúcsok x-koordinátái:

$$R\cdot\cos a, \quad R\cdot\cos(a+\frac{2p}{5}) \quad R\cdot\cos(a+\frac{4p}{5}) \quad R\cdot\cos(a+\frac{6p}{5}) \quad R\cdot\cos(a+\frac{8p}{5}).$$

Ha mindegyik koordinátát ráírjuk a neki megfelelő csúcsra, akkor az ötszög-gráf

$$l \;=\; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\cos\;\frac{2p}{5}$$

sajátértékéhez tartozó sajátvektort kapunk! Valóban, a

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

azonosság alapján:

$$R\cdot\cos\left(a+\frac{2np}{5}\right)+R\cdot\cos\left(a+\frac{(2n+4)p}{5}\right)=R\cdot\cos\left(a+\frac{(2n+2)p}{5}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{2p}{5}\right)$$

Hasonlóan igazolható, hogy a csúcsok *y*-koordinátái is ugyanehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort adnak.

Helyezzünk most egy kockát a térbeli derékszögű koordinátarendszerbe úgy, hogy középpontja az origó legyen! Ha most minden csúcsra fölírjuk az egyik (de mindegyiknél ugyanazt) a koordinátáját, akkor a $\lambda=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektort kapunk. Ezt a három koordinátára egyszerre is ellenőrizhetjük: csak azt kell megmutatni, hogy a kocka középpontjából az egyik csúcsba mutató vektor megegyezik a középpontból a csúcs szomszédaiba mutató vektorok összegével.

4. A Colin de Verdière gráf paraméter

Az utóbbi évek kutatásai ilyen jellegű összefüggésekre derítettek fényt (lásd [5]). Colin de Verdière a Schrödinger operátor hatását vizsgálta Riemann felületeken. A felületet egy gráffal modellezte, így egy gráfra vonatkozó sajátértékproblémát kapott, így jutott el alapvető eredményeihez.

Legyen adva egy *G* gráf, az éleire tetszőleges módon írjunk pozitív számokat.[1] és határozzuk meg az így kapott élsúlyozott gráf spektrumában a második legnagyobb sajátérték multiplicitását. A maximális multiplicitás, amely egy adott gráfnál a különböző súlyozásoknál fellép, a gráf Colin de Verdière gráf paramétere ($\mu(G)$).

Az utóbbi évek kutatásainak eredménye szerint:

Tétel

a) $\mu(G) \le 1$ $\Leftrightarrow$ *G* utak diszjunkt uniója.
b) $\mu(G) \le 2$ $\Leftrightarrow$ *G* outerplanar[2].
c) $\mu(G) \le 3$ $\Leftrightarrow$ *G* síkba rajzolható.
d) $\mu(G) \le 4$ $\Leftrightarrow$ *G* csomózódás nélkül megjeleníthető a térben[3].

Az a)-c) állításokat maga Colin de Verdière, a d) állítást egyik irányban Robertson, Seymour és Thomas, a másik irányban pedig Lovász és Schrijver bizonyította be. Az állítások nagyon erősen geometriai tartalmúak, és a korábbi példákon az állítások direkt geometriai interpre-

[1] Bizonyos speciális elrendezéseket az úgynevezett Erős Arnold tulajdonságnak nem megfelelőket nem szabad megengedni, de ezt itt nem részletezzük, lásd [5].
[2] azaz lerajzolható a síkban úgy, hogy minden csúcsa a végtelen, külső tartomány határán legyen.
[3] azaz a gráf bármelyik két diszjunkt körének egyikéhez illeszthető egy felület, amely nem metszi a másik kört

tációit láthattuk. A bizonyítások kerülőutat használnak, ezért bizonyos hiányérzetet okoznak még a felfedezőkben is. A kerülőút a "gráfminorok Robertson-Seymour-féle elmélete".
Egy gráf minorja egy olyan gráf, amely megkapható belőle élek törlésével, összehúzásával, izolált csúcsok törlésével, kettős élek és hurokélek megszüntetésével. Az elmélet azt mondja ki, hogy ha egy gráftulajdonság olyan, hogy biztosan nem teljesül egy gráfra, ha valamely minorjára nem teljesül, akkor meghatározható véges sok tiltott gráf úgy, hogy a tulajdonság pontosan akkor nem teljesül egy gráfra, ha tartalmazza minorként e tiltott gráfok bármelyikét.
Az elmélet a gráfok síkbarajzolhatósági tételét veszi alapul, azt általánosítja messzemenően: tudjuk, hogy a síkbarajzolhatóság tiltott gráfjai a "teljes ötös" (K_5) és a "három ház, három kút" ($K_{3,3}$). A fenti d) állítást pld úgy sikerült igazolni, hogy megállapították a csomómentes ábrázolhatóság tiltott gráfjainak csoportját (Petersen-család), megmutatták, hogy a $\mu(G)$ függvény minormonoton, és megmutatták, hogy a $\mu(G) \leq 4$ gráftulajdonság tiltott gráfjai is pontosan a Petersen-család tagjai. Talán ezek alapján már érthető, hogy mi okozza a hiányérzetet.

5. Alapvető tételek a sajátértékek és vektorok rendszeréről

Vizsgáljuk meg jobban három példánkban a sajátértékek rendszerét! Alább minden sajátértéket annyiszor soroltunk föl amennyi a multiplicitása.

Kocka: 3, -3, 1, 1, 1, -1, -1, -1.
Ötszög: 2, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Petersen-gráf: 3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.

Két egyszerű megfigyelést tehetünk:

(1) A sajátértékek száma (multiplicitással számolva) annyi, ahány csúcsa van a gráfnak.
(2) A sajátértékek összege 0 (minden sajátértéket annyiszor számolva, amennyi a multiplicitása).

Az (1), (2) összefüggések bármely hurokél nélküli gráf spektrumára teljesülnek (súlyozott élekkel is). (1) szerint a sajátvektorok összes szabadsági foka megegyezik a gráf csúcsainak számával, tehát az egész rendszer szabadsági fokainak számával. Ez a tulajdonság annak felel meg, hogy a húr által keltett bármely hang felbontható a sajátrezgések összegére.

Az (1), (2) állítások könnyen bizonyíthatók, ha a gráf spektrumát a gráf incidencia-mátrixának spektrumaként értelmezzük. Ebben a megközelítésben ugyanis a sajátértékek az A-λI mátrix (A a gráf incidenciamátrixa, I az egységmátrix) determinánsának gyökei és a determináns λ egy olyan polinomja, amelynek foka a gráf csúcsainak száma, az eggyel kisebb fokú tag együtthatója pedig hurokmentes gráfban[4] zérus.

6. A Hoffmann-Singleton tétel

Egy klasszikus feladat (lásd pld Bergengóc példatár I. 19. példa):

[4] azaz amikor A fődiagonálisában mindenütt 0 áll

Feladat A Bergengóc Közlekedési Minisztérium felkért egy légitársaságot, hogy indítson ingajáratokat az ország legfontosabb városai között úgy, hogy egy városból legfeljebb három másikba induljon járat, de legfeljebb egy átszállással el lehessen jutni bármelyik városból bármelyik másikba. Legfeljebb hány város között lehet megszervezni ilyen összeköttetést? (Ingajárat: két város közti összeköttetés.)

Ismeretes, hogy a feladat megoldása 10, és az optimális gráf a Petersen-gráf.

Próbáljuk variálni a feladatot! Engedjük meg, hogy minden városból legfeljebb r másikba menjen ingajárat. Ilyenkor legfeljebb hány város között oldható meg az összeköttetés?

Az általános esetben $1 + r + r\cdot(r - 1) = r^2 + 1$ a közvetlenül adódó felső korlát. Egyáltalán nem nyilvánvaló azonban meghatározni, hogy mely r esetén szervezhető meg az összeköttetés ennyi város között. Alább az ezzel kapcsolatos matematikai fogalmakkal és egy érdekes tétellel ismerkedünk meg.

Egy gráf reguláris, ha egyszerű és benne minden csúcs foka ugyanakkora. Ha ez a fokszám r, akkor azt is mondjuk, hogy a gráf r-reguláris. Egy gráf átmérője a legtávolabbi csúcsainak távolsága. Az előbb azt láttuk be, hogy egy r-reguláris 2 átmérőjű gráfnak legfeljebb r^2+1 csúcsa lehet.

Tétel (*Hoffmann-Singleton*)
Ha egy r-reguláris 2 átmérőjű gráfnak $r^2 + 1$ csúcsa van, akkor $r = 1, 2, 3, 7$ vagy 57.

Tekintsünk egy tetszőleges r-reguláris 2 átmérőjű gráfot r^2+1 csúccsal. Egy, az ötszögnél és a Petersen-gráfnál már látott trükkel meghatározhatjuk a sajátértékeket.

Ha az összes feltételi egyenletet összeadjuk, akkor azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = r$ vagy pedig a csúcsokra írt összes szám összege 0. A $\lambda_1 = r$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokban minden szám egyenlő, ez úgy bizonyítható, ahogy a kockánál is láttuk. Tehát a $\lambda_1 = r$ sajátérték multiplicitása 1.

Térjünk át a $\lambda_1 \neq r$ esetre.Tekintsünk egy tetszőleges csúcsot. Ennek r szomszédja van. Az r szomszédnak $r\cdot r$ szomszédja van. Ezek között r-szer szerepel az eredeti csúcs, a többi r^2-r szomszédban az eredeti csúcstól és annak szomszédaitól különböző csúcsok mindegyike pontosan egyszer szerepel. Ennek alapján bármely sajátértékre, és bármely csúcsra írt számra

$$l \cdot a + l^2 \cdot a = (r-1) \cdot a + \Sigma,$$

ahol Σ az összes csúcsra írt szám összegét jelöli, tehát esetünkben a 0-t. Ha nem mindegyik csúcsra írt szám 0, akkor szükségképpen $\lambda^2+\lambda - (r-1) = 0$, azaz

$$l_2 = \frac{-1+\sqrt{4r-3}}{2}, \quad l_3 = \frac{-1-\sqrt{4r-3}}{2}.$$

Jelölje a két sajátérték multiplicitását rendre m_2 és m_3. Az előző fejezetben megfogalmazott (1) és (2) tulajdonság alapján

(3) $\qquad m_2 + m_3 = r^2,$

(4) $\qquad r + m_2\cdot\lambda_2 + m_3\cdot\lambda_3 = 0,$

ahol tehát m_2 és m_3 (nemnegatív) egész számok. A sajátértékek helyére a korábban kapott értékeket írva kapjuk, hogy

$$2r-(m_1+m_2)+(m_1-m_2)\cdot\sqrt{4r-3}=0,$$

azaz (3) alapján

(5) $$2r-r^2+(m_1-m_2)\cdot\sqrt{4r-3}=0.$$

Ismeretes, hogy egész szám gyöke vagy egész, vagy irracionális. Ha

$$\sqrt{4r-3}$$

irracionális, akkor szükségképpen $m_2 - m_3 = 0$ és $2r - r^2 = 0$. Az utóbbi egyenletből $r = 2$, tehát a már vizsgált ötszögről van szó. Ha

$$\sqrt{4r-3}=s$$

egész, akkor $r = (s^2+3)/4$. Ezt (5)-be helyettesítve, 16-tal szorozva az

$$s^4-2\cdot s^2 - 16\cdot (m_2-m_3)\cdot s - 15 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek együtthatói egészek, így az s pozitív egész szám csak akkor lehet gyöke az egyenletnek, ha osztja 15-öt, tehát

$s = 1, 3, 5$ vagy 15 és így $r = 1, 3, 7$ vagy 57.

Az $r = 7$ esetre Hoffmann és Singleton konstruáltak is egy gráfot (lásd [6]). Az $r = 57$ eset máig eldöntetlen.

Házi feladat

Egy társaságban mindenkinek ugyanannyi ismerőse van, és bármely két embernek is egyforma számú (legalább 1) közös ismerőse van. Következik-e ebből, hogy a társaságban mindenki ismer mindenkit?

Irodalomjegyzék

[1] Babai L., Frankl P.: Linear algebra methods in combinatorics, Preliminary Version 2 (Sept. 1992) Dep. of Computer Sci. Univ. of Chicago

[2] Kiss Gy., Szőnyi T.: Véges geometriák}, Polygon könyvtár, Szeged 2001.

[3] Lovász L.: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

[4] Bollobás B.: Extremal graph theory, Academic Press, 1978

[5] H.v.d. Holst - Lovász L. - A. Schrijver: The Colin de Verdière graph parameter, letölthető a http://research.microsoft.com/Users/lovasz/ címről

[6] Gács A. - Hraskó A. - Szőnyi T. : Reguláris gráfok, az Új matematikai mozaik című kötetben, Typotex Kiadó, 2002.

Érdekes gráfelmélettel kapcsolatos webhelyek:

http://www.emba.uvm.edu/~archdeac/problems/problems.html

http://www1.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory/people/alphabetic.html

http://www.math.fau.edu/locke/unsolved.htm

http://www.math.tu-berlin.de/~zuther/math/graph/homes.html