

12. szakkör – online

A 11. szakkört online tartjuk Discordon február 2. kedd délután. Én 15.00 és 17.00 óra között be leszek jelentkezve a szakkör Discord szerverére, ott tudtok kérdezni, megoldásokról velem beszélgetni.

Aki eddig nem járt szakkörön, de online szívesen csatlakozna, az írjon emailt hujterb@fazekas.hu címre, és akkor elküldöm a Discord szerverünk linkjét.

Néhány lazán kapcsolódó algebra és számelmélet feladat

Két ide kapcsolódó, korábbi feladat: 6.1, 5.3. Érdemes ezek megoldását felidézni. Ide tartozik még az 5.5* feladat is (de az nehezebb, nem beszéltük még meg).

12.1. feladat: Zoltán azt vette észre, hogy akármilyen egész számra igaz, hogy ha megszorozza a kettővel nagyobb számmal, majd hozzáad egyet, akkor négyzetszámot kap. Igaza van-e?

12.2. feladat: Négy egymást követő szám közül vettem a középső kettő szorzatát, majd kivontam a szélső kettő szorzatát. Eredményül 4-et kaptam. Melyik négy számból indultam ki?

12.3. feladat: a) Lehet-e két egymást követő szám szorzata négyzetszám?

b) Lehet-e 3 egymást követő szám szorzata köbszám?

12.4. feladat: Tekintsük a köbszámok sorozatát: 1, 8, 27, 64, 125, ...

a) Ha a szomszédosak különbségeit nézzük: 7, 19, 37, 61 ... eddig csupa prímszám. Mindig prím lesz?

b) Bizonyítsd be, hogy két szomszédos köbszám különbsége sosem osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel sem.

c) Két köbszám különbsége prímszám. Bizonyítsd be, hogy ez csak szomszédos köbszámokra lehetséges.

d) Két pozitív köbszám összege lehet-e prím (az $1 + 1 = 2$ összegén kívül)?

12.5*. feladat: Legyenek az a , b és c olyan természetes számok, melyekre $a \mid b^2$, $b \mid c^2$ és $c \mid a^2$ teljesül.

a) Van ilyen feltételekkel olyan a, b, c számhármass, melyre nem igaz, hogy $abc \mid (a + b + c)^6$?

b) Mutassuk meg, hogy minden a feltételt teljesítő a, b, c számhármásra $abc \mid (a + b + c)^7$.

Megjegyzés: $x \mid y$ azt jelenti, hogy x osztója y -nak.

Egyéb feladatok

12.6. feladat: Hét barát körmérkőzéses teniszbajnokságot rendez. Tudjuk hogy az egyes emberek által elért győzelmek számai a következők: 5, 5, 5, 2, 2, 1, 1. Fel tud-e ez a hét ember állni egy körvonalra úgy, hogy mindenki legyőzte a jobb oldali szomszédját?

12.7. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen T a C -ből induló magasság talppontja, O pedig a háromszög körülírt körének középpontja. Bizonyítsd be, hogy az $ATOC$ és a $BTOC$ négyszögek területe megegyezik.