11-es tehetséggondozó szakkör

Teljes indukció, összegzések

1. Igazoljuk a következő oszthatóságokat minden pozitív természetes számra:

   a) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$;

   b) $17 \mid 7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$;

   c) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

2. Nevezetes 9sszegképletek: az első n pozitv természetes szám, négyzetszám, köbszám összege.

3. Határozzuk meg a következő kifejezések zárt alakját:

   a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$;

   b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$.

4. Általános módszer az $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ összeg kiszámítására.

5. Határozzuk meg a következő kifejezések zárt alakját, ahol n pozitv természetes szám:

   a) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

   b) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

   c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

6. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket, ahol n pozitv természetes szám:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, ha $n \geq 2$.

   b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, ha $n \geq 2$.

7. Milyen n természetes számra teljesül, hogy $2^n > n^2$?

8. Mutassuk meg, hogy n egyenes a síkot legfeljebb $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja fel!

9. Mutassuk meg, hogy n kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja fel!

10. Milyen n esetén tudjuk n darab halmaz kapcsolatát körökből álló Venn-diagrammal ábrázolni?

Indirekt bizonyítások

1. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{n}$ irracionális, amennyiben n pozitív egész, nem négyzetszám.
2. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ irracionális szám.
3. Bizonytsuk be, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ irracionális szám.
4. Mit mondhatunk az $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$ szám irracionalitásáról? (n pozitv egész).
5. Bizonyítsuk be, hogy irracionális szám tizedestört alakjában

   a) legalább egy számjegy;

   b) legalább két számjegy

   végtelen sokszor szerepel.
6. Bizonyítsuk be, hogy négy irracionális szám között mindig van három, amelynek az összege is irracionális.
7. Szabályos rácssokszögek. Mutassuk meg, hogy nem létezik szabályos rácsháromszög. Létezik-e szabályos rácsötszög, rácshatszög? Mit mondhatunk általában a szabályos rács-n-szög létezéséről, ha $n > 6$?

Euklideszi algoritmus, diofantoszi egyenletek

1. Legnagyobb közös osztó, kitüntetett közös osztó.
2. Euklideszi algoritmus.
3. Legyenek a és b egész számok. Mutassuk meg, hogy az a és b számok legnagyobb közös osztója alkalmas u és v egészekkel kifejezhető $(a;b)=au+bv$ alakban.
4. Legyenek a,b,c rögzített egész számok. Mutassuk meg, hogy az $ax+by=c$ diofantoszi egyenletnek akkor és csak akkor létezik megoldása, ha $(a;b)\mid c$.
5. Legyenek a,b,c rögzített egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $c\mid ab$ és $(a;c)=1$, akkor $c\mid b$.
6. Mutassuk meg, hogy az alábbi törtek semmilyen n pozitv egész esetén nem egyszerűsíthetők:

   a) $\dfrac{3n+5}{7n+12}$;

   b) $\dfrac{3n^2+1}{4n^2+3}$.
7. Lineáris diofantoszi egyenletek megoldása.
8. Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenleteket:

   a) $43x+25y=98$;

   b) $7x+11y=118$.

Vektorokkal megoldható feladatok

1. Egy háromszög oldalaira kifelé szerkesszünk négyzeteket. Két különböző négyzet egy-egy csúcsát szomszédosnak nevezzük, ha össze vannak kötve ugyanazzal a háromszögcsúccsal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek oldalai párhuzamosak és egyenlők az egy-egy szomszédos csúcspárt összekötő szakaszokkal.

2. Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$.

3. Tekintsük az $ABCD$ húrnégyszög ABC, BCD, ABD, ACD részháromszögének magasságpontjait. Bizonytsuk be, hogy ezek a magasságpontok az $ABCD$ négyszöggel egybevágó négyszöget alkotnak.

4. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{c} = |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{a} + |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{b}$ vektor párhuzamos az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok szögének szögfelezőjével.

5. Euler-egyenes: A súlypontba mutató helyvektort felhasználva igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja, súlypontja és magasságpontja egy egyenesen van, és a súlypont harmadolja a magasságpont és a körülírt kör középpontja közötti szakaszt.

6. Feuerbach-kör: Bizonyítsuk be vektorok segítségével, hogy egy háromszög magasságtalppontjai, oldalfelező pontjai, valamint a magasságpont ls a csúcsok közötti szakaszok felezőpontjai egy körön vannak.

7. Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk először egy A pontra, majd a tükörképet egy B pontra, az így nyert képet pedig egy C pontra; tovább folytatva újra A-ra, B-re és végül C-re. Bizonyítsuk be, hogy a hatodik tükrözés visszaviszi P-t az eredeti helyzetbe.

8. Az O pontból két félegyenes indul ki. Az egyik félegyenesen lévő A_1, illetve A_2 pontba az O-ból az $\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{a}$ vektor vezet ($\lambda \neq 0$), a másikon lévő B_1, illetve B_2 pontba viszont a $\mathbf{b}$, illetve $\square\mathbf{b}$ vektor ($\square \neq 0$). Határozzuk meg az A_1B_2 és a B_2A_1 egyenesek metszéspontjába mutató $\mathbf{v}$ vektort (az A_1 és A_2, illetve a B_1 és B_2 pontok különbözők, az A_1B_2 egyenes nem párhuzamos B_1A_2-vel).

9. Az $ABCD$ négyszögben nincsenek párhuzamos oldalak. Legyen az AB és CD egyenesek metszésponja E, az AD és BC egyeneseké F. Bizonyítsuk be, hogy az AC, BD, EF szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak.

10. Legyen P és Q az ABC háromszög AB, illetve AC oldalán lévő belső pont úgy, hogy $BC = CQ$. Jelölje a BC oldal felezőpontját E, a PQ szakasz felezőpontját F. Igazoljuk, hogy az EF egyenes párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezővel!

Addíciós tételek alkalmazásai

1. Bizonyítsuk be, hogy
$$8 \cdot \cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \operatorname{ctg} 10°.$$

2. Igazoljuk a következő trigonometrikus azonosságot, ahol $\sin x \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}$.
$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 2^2x \cdots \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1} \cdot \sin x}.$$

3. Igazoljuk a következő trigonometrikus azonosságot, ahol $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}}.$$

4. Igazoljuk a következő trigonometrikus azonosságot, ahol $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}$.

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{nx}{2}.$$

5. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \frac{3}{2} \\ \cos^2 x - \sin^2 y &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

6. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{\pi}{3} \\ \sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

7. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 x &= \sin y \\ \cos^4 x &= \cos^2 y \end{aligned}\right\}$$

8. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \log_2 y - \log_2 x &= 1 \\ \log_3\big(\cos(x+y)\big) - \log_3\big(\sin(x+y)\big) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

9. Fejezzük ki $\cos nx$-et $\cos x$ polinomjaként (n pozitív egész szám).

10. Csebisev-polinomok.

Kúpszeletek

1. Ellipszis, hiperbola, parabola definíciója, jellemző adataik.
2. Az ellipszis egyenlete.
3. A hiperbola egyenlete.
4. Kúpszeletek: az elnevezés indoklása, Dandelin-gömbök, Dandelin-tétel.

Komplex számok

1. Komplex számok defincíója, algebrai és trigonometrikus alak.

2. Műveletek komplex számokkal.

3. Hatványozás, gyökvonás, egységgyökök.

4. A másodfokú egyenlet megoldóképlete.

5. Legyen $n > 2$ természetes szám. Bizonytsuk be, hogy

   a) $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$;
   b) $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$.

6. Adjuk meg a komplex számsíkon az alábbi feltételeket kielégítő pontok halmazát:

   a) $1 < |z| < 2$;
   b) $|z| = 2$;
   c) $|z + \mathrm{i}\,| \leq 1$;
   d) $|z - \mathrm{i}\,| = |z + \mathrm{i}\,|$;
   e) $|z| < |z + \mathrm{i}\,|$;
   f) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$. Emlék: Apolloniusz-kör.

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

   a) $z^2 + 2 = 0$;
   b) $z^2 - 2z + 2 = 0$;
   c) $z^2 + 8z + 17 = 0$.

8. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

   a) $\sqrt{-1}$;
   b) $\sqrt{4}$;
   c) $\sqrt[3]{1}$;
   d) $\sqrt{\mathrm{i}}$;
   e) $\sqrt[3]{8}$;
   f) $\sqrt[4]{16}$;
   g) $\sqrt[4]{-16}$.

9. Tegyük fel, hogy a z komplex számra $z^2 + z + 1 = 0$ teljesül. Számtsuk ki a $z^{65} + z^{-65}$ kifejezés értékét!

10. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezéseket:

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$;

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$;

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$;

(d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots$.

11. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x,$$

ahol $x \in \mathbb{R}$. Ötlet: Írjuk fel kétféleképpen a $(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^5$ kifejezést.

12. Harmadfokú egyenletek. Cardano-képlet és alkalmazása.