Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
5. oszály
II. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: A 2021 olyan négyjegyű szám, melyben a számjegyek összege 5. Hány ilyen négyjegyű szám van?

(10 pont)

1. feladat megoldás: A megfelelő számjegynégyesek:
A=(5, 0, 0, 0), B=(4, 1, 0, 0), C=(3, 2, 0, 0), D=(3, 1, 1, 0), E=(2, 1, 1, 1), F=(2, 2, 1, 0)

(3 *pont*)

(csoportonként 0.5 pont)
A – 1 db

(1 *pont*)

E – 4 db

(1 *pont*)

B, C –6 – 6 db

(1 – 1 *pont*)

(akkor is, ha felsorolja, akkor is, ha kiszámolja)
D, F – 9 – 9 db

(1 – 1 *pont*)

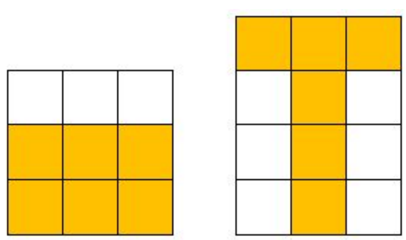
(akkor is, ha felsorolja, akkor is, ha kiszámolja)
Összesen 35 db

(1 *pont*)

***Összesen*.....................(10 *pont*)**

2. feladat: 6 *db* egységnégyzetből építünk sokszögeket úgy, hogy a négyzetlapokat teljes oldaluk mentén illesztjük össze.

a) Keress olyanokat, amelyek beleférnek egy 3×3-as négyzetbe. Rajzolj le 4 különbözőt! (Két ilyen sokszög különböző, ha sem forgatva, sem tükrözve nem hozhatók fedésbe.)



Jó Rossz

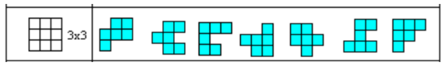
b) Lehet-e egy ilyen sokszög kerülete $10, 11, 12$ négyzetoldal? (Itt már gondolhatsz olyanokra is, amelyek nem férnek el egy 3×3-as négyzetben.)

c) Legfeljebb hány négyzetoldal lehet az ilyen sokszögeknek a kerülete ?

(10 pont)

2. feladat megoldás: a) Ahány jót rajzol, annyiszor $0,5$ pont, legfeljebb

(2 *pont*)



b) 10 lehet (3×2-es téglalap)

(1 *pont*)

12 lehet: elegendő egy jó példa bemutatása (minden olyan, mely nem 3×2-es,
de tartalmaz 2×2-es négyzetet jó - ezt nem kell bizonyítania, észrevennie sem*)

(1 *pont*)

Páratlan nem lehet:
biz1: kezdetben 6 lap $6 \times 4 = 24$ oldal

(1 *pont*)

Minden illesztésnél 2 oldalt veszítünk,

(1 *pont*)

így csak páros kerület érhető el.

(1 *pont*)

biz2: Járjuk körbe az egyik csúcstól indulva. Minden "jobbra-balra" lépést
meg kell tenni visszafelé,

(1 *pont*)

és minden "le-fel" lépést meg kell tenni visszafelé ahhoz, hogy visszaérjünk a kiindulási csúcshoz.

(1 *pont*)

Így csak páros kerület érhető el.

(1 *pont*)

c) 14 a maximális kerület.

(1 *pont*)

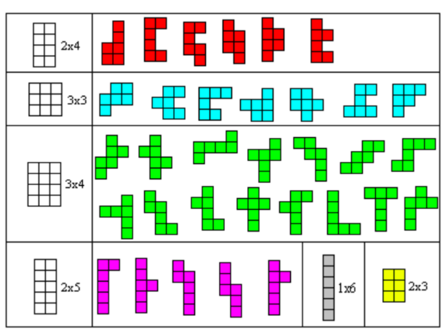
A 6 négyzetlapot egyesével illesztve mindegyiket legalább egy oldalán ragasztjuk.
Ez legalább 5 ragasztás,

(1 *pont*)

azaz 5×2 él veszteség a 24-ből. $(24 - 10 = 14)$

(1 *pont*)

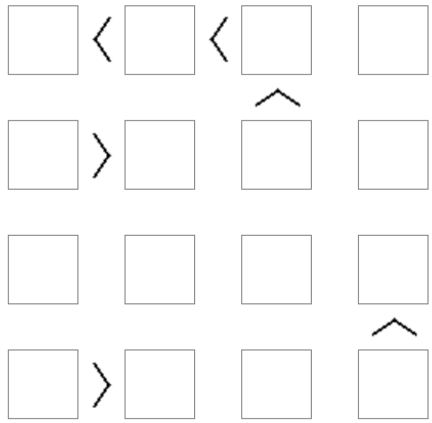
***Összesen*..................... (10 *pont*)**



az ábra forrása:http://www.mathematische-basteleien.de/hexominos.htm

(* a $K = 12$ esethez szükséges olyan négyzetlap, amelyiket az egyesével építés során egyidejűleg 2 oldalán ragasztjuk. Mivel összefüggő alakzatunk van minden lépésben, és csak 6 lapunk, ez nem lehet két szemköztes, csakis két szomszédos oldal. Akkor pedig épp egy 2×2-es négyzet keletkezik.)

3. feladat: A következő feladvány FUTOSHIKI névre hallgat. Minden mezőbe az $1, 2, 3, 4$ számok egyike kerülhet úgy, hogy minden sorban, és minden oszlopban mind a 4 szám pontosan egyszer szerepel. Emellett a táblázatban jelölt relációknak is teljesülniük kell. Töltsd ki a táblázatot!



(10 pont)

3. feladat megoldás: Az első sor: $1, 2, 3, 4$ és a második sorban a 3. elem 4

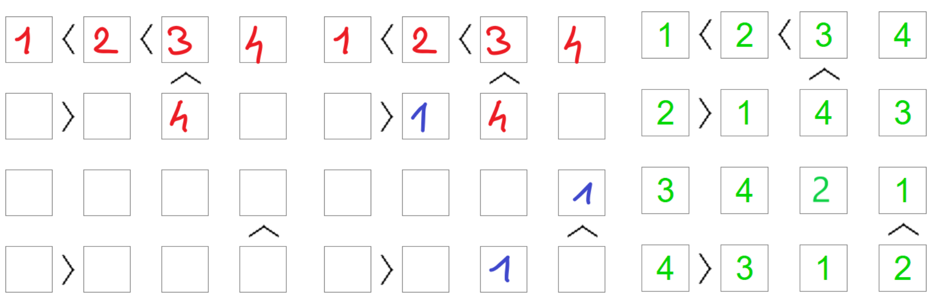
(*összesen* 1 *pont*)

A további 3 db 1-es elhelyezése

(1 *pont*)

Minden további helyesen beírt szám

(1 − 1 *pont*)



***Összesen*.................... (10 *pont*)**

megj: Más sorrendben történő kitöltés esetén is az első 5 szám elhelyezése

(*összesen* 1 *pont*)

a következő 3 szám elhelyezése

(1 *pont*)

Minden további szám

(1 − 1 *pont*)

4. feladat: Egy kocka három lapja zöld, a többi piros. Azt is tudjuk, hogy amelyik lap zöld, az azzal szomszédos lapok közül kettő lap zöld. Kiterítettük ennek a kockának egy hálóját. Ha az 1. számú lap zöld, akkor mely lapok lehetnek zöldek? (Keresd meg az összes lehetőséget!)

(10 pont)

4. feladat megoldás: Mivel bármely 2 zöld lap szomszédos, ezért van egy közös csúcs,

(2 *pont*)

ami az 1-es lapnak is csúcsa.

(2 *pont*)

Ezért 4 eset van.

(2 *pont*)

Ha az A a közös csúcs, akkor $1, 2, 4$,

(1 *pont*)

ha a B, akkor $1, 4, 5$

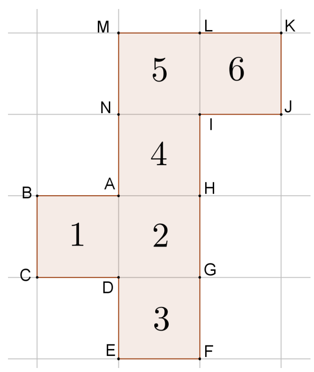
(1 *pont*)

ha C, akkor $1, 3, 5$

(1 *pont*)

ha D, akkor $1, 2, 3$

(1 *pont*)



***Összesen*.................... (10 *pont*)**

5. feladat: Egy 4×4-es tábla mezőire korongokat kell helyeznünk úgy, hogy teljesülnek a következők:
(1) Amelyik korong az 1. vagy a 2. sorban van, az nincs a 3. vagy 4. oszlopban.
(2) Ha egy mező sorának, vagy oszlopának sorszáma páros, akkor abban a mezőben legfeljebb egy korong lehet.
(3) Ha két mezőnek van közös oldala, akkor csak az egyiken lehet korong, mindkettőn nem.
(4) A megmaradt mezőkre 2, vagy 3 korongnak kell kerülnie.

a) Legalább hány korongot kell tennünk a táblára?
b) Legfeljebb hány korongot tehetünk a táblára?

(10 pont)

5. feladat megoldás: (1) miatt 4 mezőbe nem kerül korong

(1 *pont*)

Nézzük a minimumot.
(2) szerint lehet, hogy nincs korong a páros sorszámú, vagy oszlopszámú mezőkben.

(1 *pont*)

(4) szerint 2 kerül a többibe, de (3) miatt a piros és a zöld közül csak az egyikbe.

(1 *pont*)

Legkevesebb $2+2+2=6$ korongot tettünk a táblára

(1 *pont*)

	1.	2.	3.	4.
1.			X	X
2.			X	X
3.				
4				

,

	1.	2.	3.	4.
1.		0	X	X
2.	0	0	X	X
3.		0		
4	0	0	0	0

,

	1.	2.	3.	4.
1.	2	0	X	X
2.	0	0	X	X
3.	2	0	**2**	**2**
4	0	0	0	0

,

Nézzük a maximumot.
(2) szerint lehet, hogy 1 korong van a páros sorszámú, vagy oszlopszámú mezőkben.

(1 *pont*)

(4) szerint 3 kerülhet a többibe, de

(1 *pont*)

(3 miatt a vagy csak a színezett, vagy csak a fehér mezőkbe kerülhet korong.

(1 *pont*)

Legfeljebb $3+3+3+1+1+1=12$ korongot tettünk a táblára.

(1 *pont*)

	1.	2.	3.	4.
1.		1	X	X
2.	1	1	X	X
3.		1		
4	1	1	1	1

,

	1.	2.	3.	4.
1.	3	1	X	X
2.	1	1	X	X
3.	3	1	3	3
4	1	1	1	1

,

	1.	2.	3.	4.
1.	3	1	X	X
2.	1	1	X	X
3.	3	1	3	3
4	1	1	1	1

***Összesen*.................... (10 *pont*)**