Kardos Gyula Emlékverseny 2011 – 10. évfolyam

1.) Egy hiperbola *csúcsérintőinek* nevezik a fókuszokat összekötő egyenesre merőleges két érintőt. Bizonyítsd be, hogy egy hiperbola tetszőleges, a csúcsérintőktől különböző érintőjének a két csúcsérintő közé eső szakasza mindkét fókuszból derékszögben látszik.

2.) Az $\mathbf{A}$ mátrixról tudjuk, hogy

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

az $\mathbf{A}$ inverzéről pedig, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Határozd meg az $\mathbf{A}$ mátrixot.
(b) Legyen

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Keress olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre teljesül az $\mathbf{AX}$=$\mathbf{BA}$ egyenlőség,

3.) Az alábbi két állításról döntsd el, hogy igaz-e vagy hamis. Ha igaz, bizonyítsd be, ha pedig hamis, akkor mutass ellenpéldát.
(A) Ha $\mathbf{X}^2=\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}$=$\mathbf{0}$.
(B) Ha $\mathbf{X}^4=\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}^2=\mathbf{0}$.
A $\mathbf{0}$ a nullmátrixot jelöli, amelyre tehát

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4.)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan $\mathbf{X}$ mátrix, amelyre $\mathbf{X}^2=\mathbf{A}$.
(b) Bizonyítsd be, hogy pontosan **két** olyan $\mathbf{X}$ mátrix van, amelyre $\mathbf{X}^2=\mathbf{B}$.
(c) Bizonyítsd be, hogy pontosan **négy** olyan $\mathbf{X}$ mátrix van, amelyre $\mathbf{X}^2=\mathbf{C}$.

5.) Bizonyítsd be, hogy az $f : x \mapsto \frac{1}{x},\ x \neq 0$ függvény grafikonja hiperbola. Hol vannak a fókuszai és milyen hosszú a valós féltengely (a)?

Kardos Gyula Emlékverseny 2011 – 11. évfolyam

1.) Az $\mathbf{A}$ mátrixról tudjuk, hogy

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

az $\mathbf{A}$ inverzéről pedig, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}.$$

Oldd meg az $\mathbf{AX}$=$\mathbf{BA}$ ”mátrix-egyenletet”, ha

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

2.) Bizonyítsd be, hogy az $f : x \mapsto \frac{1}{x},\ x \neq 0$ függvény grafikonja hiperbola. Hol vannak a fókuszai és milyen hosszú a valós féltengely (a)?

3.) Legyen e egy adott hiperbola tetszőleges érintője, az e egyenesnek a fókuszoktól mért távolságai pedig rendre d_1 és d_2. Bizonyítsd be, hogy a d_1d_2 szorzat értéke nem függ az e érintő megválasztásától.

4.) Legyen

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 12 & -5\end{pmatrix}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy az $\mathbf{XY}=\mathbf{M}$ egyenlőség végtelen sok $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ mátrixra teljesül.
(b) Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ olyan mátrixok, amelyekre $\mathbf{AB}=\mathbf{M}$. Határozd meg a $(\mathbf{BA})^2$ mátrixot.

5.) Legyen

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Legyen $\mathcal{F}$ az $\{F_0(0;1), F_1(1;1), F_2(1;2), F_3(2,3), F_4(3;5)\ldots F_n(f_n;f_{n+1}),\ldots\}$ pontok halmaza a derékszögű koordinátarendszerben, ahol f_n az n-edik Fibonacci számot jelöli. Mi az $\mathcal{F}$ halmaz képe az $\mathbf{F}$ transzformáció során?
(b) Bizonyítsd be, hogy létezik két egymásra merőleges, az origón átmenő egyenes, amelyet az $\mathbf{F}$ transzformáció önmagára képez le. Milyen transzformációja az $\mathbf{F}$ ezeknek az egyeneseknek?
(c) Jelölje f a (b)-részbeli két egyenes közül azt, amelyiknek a meredeksége pozitív. Milyen viszonyban van az $\mathcal{F}$ ponthalmaz és az f egyenes? Mi következik ebből az F_{n+1}/F_n arányra?

Kardos Gyula Emlékverseny 2011 – 12. évfolyam

1.) Bizonyítsd be, hogy az $f : x \mapsto \frac{1}{x},\ x \neq 0$ függvény grafikonja hiperbola. Hol vannak a fókuszai és milyen hosszú a valós féltengely (a)?

2.) A két alábbi állításról döntsd el, hogy igaz-e vagy hamis. Ha igaz, bizonyítsd be, ha pedig hamis, akkor mutass ellenpéldát.
(A) Ha $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}$=$\mathbf{0}$.
(B) Ha $\mathbf{X}^4 = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$.

3.) Az $\mathbf{X}$ mátrixról tudjuk, hogy a négyzete az egységmátrix. Milyen értékeket vehet fel $|\mathbf{X}|$, az $\mathbf{X}$ mátrix determinánsa? Bizonyítsd be, hogy ha $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ és $|\mathbf{X}|$ értéke 1, akkor $\mathbf{X}$ vagy az egységmátrix, vagy pedig az egységmátrix ellentettje.

4.) Legyen

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy pontosan két olyan egyenes van, amelyet a $\mathbf{T}$ transzformáció önmagára képez le.
(b) Bizonyítsd be, hogy az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenletű h hiperbolát a $\mathbf{T}$ transzformáció önmagára képezi le. (Ez azt is jelenti, hogy a h minden pontja előáll valamely h-beli pont képeként.)
(c) Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan, **egész számokból** álló m, n számpár van, amelyre $m^2 - 2n^2 = 1$.

5.) Mi azon P pontok halmaza a derékszögű koordinátarendszerben, amelyekből az $y = x^2$ egyenletű parabolához egymással $30°$-os szöget bezáró érintők húzhatók? (A feladatban két érintő hajlásszögét az általuk meghatározott szögtartományok közül annak a mérőszámaként értelmezzük, amelyik tartalmazza a parabolát.)

A versenyen bizonyítás nélkül felhasználható HASZNOS TÉNYEK

1.) A kanonikus helyzetű hiperbola egyenlete

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \quad \text{ahol} \quad A \cdot B \cdot C \neq 0 \quad \text{és} \quad A \cdot B < 0,$$

tehát például $2x^2 - y^2 = 1$ egy hiperbola egyenlete. (Egy ilyen egyenletben egyébként is föltehető, hogy $C = 1$.)

2.) E hiperbola aszimptota-párjának az egyenlete:

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

tehát például a fenti hiperbola aszimptotapárjának az egyenlete $2x^2 - y^2 = 0$. (A bal oldalon két négyzet különbségét szorzattá alakítva az $y = \sqrt{2}x$ és az $y = -\sqrt{2}x$ egyenletű egyenesek adódnak.)

3.) Tetszőleges

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrixhoz vannak olyan p, q valós számok, hogy

$$\mathbf{A}^2 = p \cdot \mathbf{A} - q \cdot \mathbf{I},$$

ahol $\mathbf{I}$ az egységmátrix. Rádásul itt $p = a_{11} + a_{22}$, a főátlóban álló elemek összege, q pedig a mátrix determinánsa. (Aki nem hiszi, számoljon utána!)

Ez a meszemenően általánosítható eredmény *Cayley-Hamilton tétel* néven ismert, és remekül használható egy mátrix hatványainak vizsgálatakor.

***

FONTOS! A versenyen kalkulátor NEM használható!